RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B64 (2017), 255–293

Perfectoid 空間論の整数論への応用 (Number theoretic applications of the theory of perfectoid spaces)

By

伊藤 哲史 (Tetsushi Ito)*

Abstract

We give a brief survey on number theoretic applications of the theory of perfectoid spaces recently obtained by Peter Scholze and his collaborators. We explain basic strategies and some ideas of the proofs of the weight-monodromy conjecture for complete intersections, comparison theorems for torsion coefficients for rigid analytic varieties, and the construction of Galois representations associated with regular algebraic cuspidal automorphic representations of GL_n over totally real or CM fields as well as torsion cohomology classes of locally symmetric varieties. In this paper, no new results are given, and most of the arguments explained are only briefly sketched.

§1. はじめに

perfectoid 空間論は Peter Scholze 氏 (1987–) により創始・発展された非 Archimedes 局所体上の解析幾何学の理論である．perfectoid 空間論が国際的に初めて公表されたのは，2011 年 3 月に Princeton 高等研究所 (Institute for Advanced Study) で行われた Galois 表現に関する研究集会においてであると思う．perfectoid 空間論は，混標数の非 Archimedes 局所体上の問題を，正標数の場合に帰着させる解析幾何の枠組みとして導入された．

perfectoid 空間論には，その導入直後から今日に至るまで，整数論への驚くべき応用が次々と発見されている．例えば，Scholze 氏自身 (と共同研究者) による結果として，

1. 完全交叉多様体に対する重さ・モノドロミー予想の解決 ([65, §9])

Received May 1, 2015. Revised September 22, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11G18, 11G25, 11R39, 14G22, 14G35.
Key Words: *perfectoid spaces, weight-monodromy conjecture, p-adic Hodge theory, Shimura varieties, Galois representations.*
Supported by JSPS Kakenhi 20674001, 26800013.
*Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.
e-mail: tetsushi@math.kyoto-u.ac.jp

2. adic 空間の族に対する p 進 Hodge 理論の比較同型 ([67], [66, §3]).
3. GL_n の保型表現や局所対称空間の mod p^m 係数コホモロジー類に伴う Galois 表現の構成 ([68])

などがある．また，本稿ではほとんど紹介することができなかったが，perfectoid 空間論の重要な応用の一つとして，Scholze と Weinstein による p 可除群の変形のモジュライ空間への応用 (無限レベルの Rapoport-Zink 空間に対する Faltings-Fargues 同型) がある ([71]).

これらの応用例はほんの一部に過ぎない．最近では Scholze 氏以外の研究者も perfectoid 空間論を応用するようになってきた．分岐理論への応用 ([39])，p 進 Langlands 対応の幾何的実現への応用 ([18])，モチヴィックなノルム体の理論への応用 ([83]) などもある．今後は，岩澤理論，p 進保型形式，p 進 L 関数，p 進代数群の表現論など，様々な分野への応用が研究されるようになるかもしれない．

本稿の目的は，理想としては，perfectoid 空間論の整数論への応用を解説することであった．しかし，もちろんそんなことは不可能であった (そんなことは初めから分かりきっていたのだが)．著者の能力不足により，表題に反して，perfectoid 空間論の応用についてまともな解説をすることはほとんどできていないことをお詫びする．perfectoid 空間論には本稿で説明できていない重要事項も沢山ある．また，説明と著者の能力の都合上，必要以上に簡略化して説明した結果，正しくないあるいは誤解を招く記述が含まれてしまった箇所も多いと思う．せめて perfectoid 空間論が応用されている雰囲気が少しでも伝われば幸いと思ってはいたのだが，それがどこまで実現されたかは分からない．

本稿では perfectoid 空間の定義や基本性質は復習しない．[82], [65] などを参照していただきたい．次節以降，人名の敬称は省略する．

注． 説明の都合上，紹介する定理の主張を (意図的に) 大雑把なものにした箇所が多い．(“証明” と書かれていても，そのほとんどが雑な説明にすぎない．) 定理を紹介する際にはできるだけ文献を引用するように心がけたので，正確な設定・主張については適宜文献にあたっていただきたい．perfectoid 空間論やその応用を本格的に勉強する際は，もっと信頼度の高い文献にあたられることを勧める．perfectoid 空間の定義や基本性質については，津嶋氏の解説 [82] が日本語で分かりやすく書かれているので参照するとよいだろう．Scholze 氏の論文はどれも専門家以外への配慮があり，とても明快に書かれている．この分野に興味のある人には一読を勧める．perfectoid 空間論に関する Scholze 氏自身による解説が [66], [69], [70] にある．また，[33], [57], [63] もあわせて参照していただくと理解が深まるのではないかと思う．

§ 2. Perfectoid 空間論の “使い方”

perfectoid 空間論には様々な応用があるが，その “使い方” には一定のパターンがあるように思う．どうやら，perfectoid 空間論は，整数論に現れる様々な不変量の “極限” の考察を正当化する仕組みとして機能しているようである．

perfectoid 空間論の技術的特徴としては,

- Huber による adic 空間の理論を基礎に置いていること,
- 本質的に有限生成性をみたさない, 非 Noether 的な対象であること,
- 標数の異なる perfectoid 空間のエタール・サイトを比較する仕組み — tilt と呼ばれる — を理論の内部に標準装備していること

が挙げられる. 幸い, adic 空間論はとても一般的な位相環の理論を基礎にしているから, perfectoid 空間論を展開する基礎理論としては適している (他の非 Archimedes 的解析幾何学の枠組み (例えば [34]) を基礎理論として perfectoid 空間論を展開することもできるかもしれないが). また, adic 空間の幾何学やエタール・コホモロジーについては, Huber 自身によりすでに確立された理論があるから, それらを活用して perfectoid 空間論を応用できるというメリットもある. しかし, これらはあくまでも技術的側面であって, これだけを眺めていても整数論への応用は見えてこない.

perfectoid 空間は, adic 空間のうち特殊な (やや技術的な) 条件をみたすものであった:

$$\big(\text{perfectoid 空間}\big) \subset \big(\text{adic 空間}\big).$$

adic 空間論は極めて汎用度の高い理論であり, 代数幾何や整数論に通常現れるような空間 (スキームや形式スキームなど) は, ほぼすべて含まれてしまう:

$$\big(\text{スキーム}\big) \subset \big(\text{形式スキーム}\big) \subset \big(\text{adic 空間}\big).$$

しかし, 著者のような理解の浅い人間からは, adic 空間の一般論で扱おうとしている対象は広すぎて, 幾何学がまともに展開できない対象も含んでいるようにも見える (例えば位相環 (の組) から自然に定めた構造前層が層にならないことがある). 実際にはある程度調べやすいクラスに制限して研究することも多い. 基礎となる可換環 — p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の代数拡大の完備化やその整数環など — を一つ固定して, その環上の有限型スキームの形式的完備化に伴う解析空間のみを考えるといった具合である. こういったクラスの空間には確かに 非 Noether 的なものも含まれてはいるが, ある種の有限性を持つことが多い. 技術的細部に注意を払うことさえできれば — これは時として非自明なことではあるが — 通常のスキーム論とほぼ同様の理論が展開できる場合もある. adic 空間論を始めとする種々の非 Archimedes 的解析幾何の古典的応用— 曲線・アーベル多様体・志村多様体の p 進一意化理論, p 進保型形式の理論, p 進微分方程式論, p 進積分論など — においては, これらのクラスで十分なことも多いようである.

ところで, perfectoid 空間は adic 空間ではあるが, 大抵の場合は上述のような有限性を持つクラスには属さない. 整数論に通常現れるような空間は, 大抵の場合, perfectoid 空間にはならない. つまり,

$$\big(\text{整数論的に興味のある空間}\big) \subset \big(\text{adic 空間}\big) \supset \big(\text{perfectoid 空間}\big)$$

だが，その共通部分はほとんどない:

$$\big(\text{整数論的に興味のある空間}\big) \cap \big(\text{perfectoid 空間}\big) \approx \big(\text{ほとんどない}\big).$$

adic 空間や p 進 Hodge 理論そのものを研究している専門家を除くと，perfectoid 空間自体は興味のある空間とは言えないかもしれない．

それでは，なぜ，perfectoid 空間論が整数論の問題に対してこれほどまでに強力な応用を持つのだろうか．整数論における種々の不変量の “極限” の考察が一つの鍵のように思う．すなわち，

- 整数論において考察される種々の不変量 (例えばイデアル類群，保型形式，代数的サイクル，Galois 表現，Hasse-Weil ゼータ関数など) は，ある種の空間のコホモロジー (例えば Galois コホモロジー，層係数コホモロジー，エタール・コホモロジーなど) を通して記述されることが多い．

- 実際には，個々の不変量そのものよりも，その “極限” に深い構造・意味が隠されていることが多い．そういった不変量の “極限” を自然に扱うことは容易ではなく，問題に応じた ad hoc な方法で乗り切ることも多い．

- perfectoid 空間論は本質的に非 Noether 的な解析幾何学であり，整数論に現れる種々の不変量の “極限” を統一的かつ自然に理解する枠組みを与える．整数論では不変量の “極限” を扱う場面は多岐に渡るから，それだけ，perfectoid 空間論の活躍の場が広がることになる．

不変量の “極限” について，いくつかの例を挙げて説明する．

1. 岩澤理論においては，代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大 K_∞/K の中間体のイデアル類群の p-部分のノルムに関する射影極限を，完備群環 $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\mathrm{Gal}(K_\infty/K)]]$ 上の加群として考察する．個々の中間体のイデアル類群よりも，その極限である Λ 加群にこそ本質的な情報が含まれていると考える．しかし，“K_∞ のイデアル類群” を文字通り考えてもあまり意味は無い．類体論を使って K_∞ の無限次副 p アーベル拡大に翻訳して研究するのが常套手段であり，それは強力かつ重要な手法ではあるのだが，やや ad hoc にも見える．

2. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上有限型のスキームの重要な不変量として Hasse-Weil ゼータ関数がある．Hasse-Weil ゼータ関数は ℓ 進エタール・コホモロジー $H^i(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ への幾何的 Frobenius 作用を用いて計算できる．しかし，多くの場合，$H^i(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ は見せかけのコホモロジー理論であって，

$$H^i(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \; = \; \big(\varprojlim_n H^i(X \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})\big) \otimes_{\mathbb{Z}_\ell} \overline{\mathbb{Q}}_\ell$$

の右辺が正しい．整数論において興味のある ℓ 進コホモロジーは，コホモロジーの一般論で自然に扱えるものではない．理論的正当化は可能であるが ([28], [46])，やや ad hoc に見える．(Scholze と Bhatt は，スキームに対して “副エタール・サイト” を導入し，それを用いた ℓ 進コホモロジーの基礎付けの研究も行っている ([8])．Scholze 自身による p 進 Hodge 理論の研究 ([67]) に触発されたようである．perfectoid 空間論で培われた極限操作に関する技術が，スキーム論の発展にも寄与している．)

3. p 進体 $K/\mathbb{Q}_p$ 上のアーベル多様体 A に対して，p^m 等分点 $A[p^m]$ は整数論における基本的な研究対象である．実際には，個々の $A[p^m]$ よりもその系列 $\{A[p^m]\}_m$ — p 可除群という — に興味深い情報が隠されていることが多い．Tate 加群 $T_pA = \varprojlim_m A[p^m](\overline{K})$ やその有理版 $V_pA = T_pA \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ から定まる p 進 Galois 表現などである．p 可除群に関する重要な定理の中には，有限レベル $A[p^m]$ では成り立たないものも多い (例えば [75, Theorem 4])．ところが，各 $A[p^m]$ は群スキームだが，その極限 “$\varprojlim_m A[p^m]$” は (普通の意味では) 群スキームではないので，その扱いは ad hoc にならざるを得ない．(Scholze と Weinstein は，p 可除群の Tate 加群やその有理版を adic 空間として扱うことで，Dieudonné 関手についての一般的な結果を得ている ([71, §3])．有限性を持つ空間に留まっていては，こうした結果に到達することは難しい．)

4. p 進保型形式の理論では，保型形式の列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ に対して，Fourier 係数や Hecke 固有値の p 進解析族を考察する．個々の保型形式 f_n は複素正則関数 (あるいは保型表現) として確固たる意味を持つが，その極限 “$\lim_{n\to\infty} f_n$” には意味がない．この正当化のために，Fourier 係数の極限を形式的ベキ級数として考察したり，Hecke 環の (一見人工的な) 射影極限を取ったり，モジュラー曲線 (より一般には志村多様体) の整モデルの極限 (標準塔・井草塔) の形式的完備化上の連接層の切断を使ったり，巨大な係数を持つ群コホモロジーを使うことがある．これらは技術的には大切なものだが，ad hoc な手法にも見える．

5. 保型形式の空間に作用する Hecke 作用素を理解する一つの方法として，保型形式の空間のレベルを上げていった帰納極限へのアデール群の作用を通して p 進代数群の既約許容表現を構成して佐武パラメータの理論として理解するというものがある (例えば [51])．適当な条件下において，保型形式はモジュラー曲線 (より一般には志村多様体) 上のベクトル束の切断やコホモロジー類と解釈できるから，私たちは，“モジュラー曲線上のベクトル束の切断やコホモロジー類の帰納極限” に興味があると言える．しかし，“モジュラー曲線上のベクトル束の切断やコホモロジー類の帰納極限” を “モジュラー曲線の射影極限上のベクトル束の切断やコホモロジー類” と考えるのは困難である．その都度有限レベルに降りてくるといった ad hoc な方法に頼ることも多い．同様の困難には，志村多様体の局所版である Rapoport-Zink 空間を研究する際にも直面する．しかし，ad hoc な方法ばかりに頼っていては，Faltings-Fargues 同型のような無限レベル特有の現象を理解することは難しい ([31], [71])．

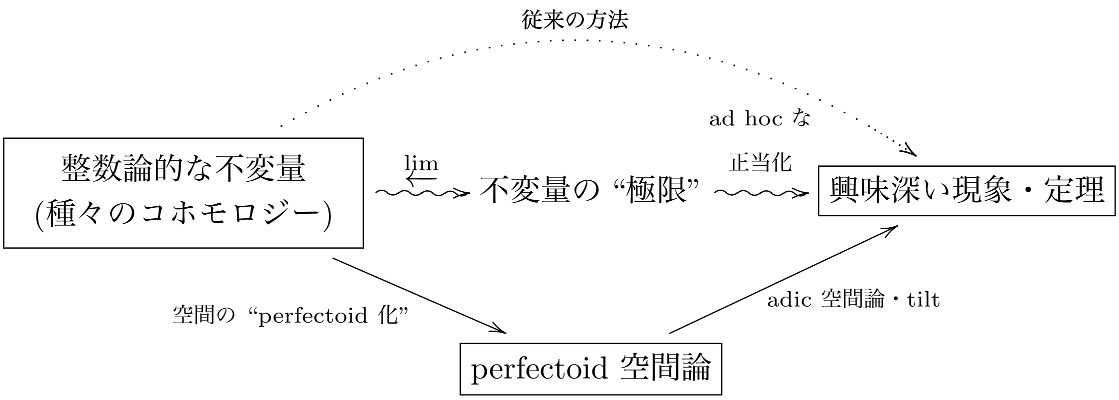
perfectoid 空間論は，従来の理論では ad hoc にしか扱えなかった “極限” を，直接

かつ自然に扱うことを可能にする枠組みを与えているように思う．模式的に書けば，

$$\big(\,\text{整数論的に興味のある空間の “極限”}\big) \;\subset\; \big(\text{perfectoid 空間}\,\big) \;\subset\; \big(\text{adic 空間}\,\big)$$

と考えられる．

perfectoid 空間においては，通常の代数幾何や整数論に現れる有限性の条件は，大抵の場合みたさない．しかし，強力な adic 空間論のおかげで，ある程度まともな幾何学が展開できる空間にはなっている (例えば perfectoid 空間では構造前層は層になる．エタール・コホモロジーの理論も展開できる)．もちろん，tilt という道具が，perfectoid 空間上で自由自在に使えることは大きな利点である．



perfectoid 空間論の整数論への応用 (模式図)

Perfectoid 空間論の “使い方” (まとめ)

ステップ 1 (極限への移行) まず，考えている問題を整理して，どのような空間のどのようなコホモロジーの極限に関する問題として理解できるかを考察する．このステップは問題ごとに異なるから，一般的なアプローチがあるわけではない．

ステップ 2 (perfectoid 化) 次に，考えたい不変量の “極限” を，“空間の極限” のコホモロジーと解釈する．“空間の極限” は通常の代数幾何学の範疇では意味を持たないこともあるが，それにあたるものが perfectoid 空間になることを証明する．いわば “空間の perfectoid 化” を証明するステップである．技術的にはここが一番のポイントとなる．

ステップ 3 (正標数への帰着) 晴れて不変量の “極限” が “perfectoid 空間のコホモロジー” と解釈できたら，いよいよ問題を解決するステップである．perfectoid 空間に標準装備されている tilt を使って，正標数の場合に問題を帰着して解決することが多い．

もちろんこれはかなり大雑把な説明であって，実際の応用はこんなに単純ではない．各ステップの意味付け・正当化のために追加の議論が必要になることも多い．いくつかの応用例について，次節以降で見ていく．

注． 現時点で perfectoid 空間論の応用として解決されている問題の多くは，これらのアプローチが適用可能なものに限られているようである．したがって，考えている問題が，

- エタール・コホモロジーの問題として解釈可能であり，
- 正標数においては解決済 (または解決可能) である

必要がある．整数論には，もちろん，エタール・コホモロジー以外のコホモロジー理論 (例えばクリスタル・コホモロジーやモチヴィック・コホモロジーなど) に関する問題もあるが，そのような問題を perfectoid 空間論を使って直ちに解決することは難しいかもしれない．また，正標数で未解決の問題については，perfectoid 空間論を使って解決することは難しいと思われる．

注． 整数論に現れる “極限” はもちろんこれだけではない．Taylor-Wiles 系や Euler 系に現れる射影極限は，補助的な素数列 $p_1, p_2, \ldots$ に関する人工的なものである．現在のところ，このような極限は可換環が完全交叉であることを示すために補助的に用いられるものであって，それ自身には幾何的な意味は無いと考えられているようである．

§ 3. tilt の応用例 — Perfectoid 空間論以前

perfectoid 空間論の応用において鍵となるのは，何と言っても，理論に標準装備されている標数変更の仕組み — tilt — であろう．ここでは tilt の応用の “おもちゃのモデル” (toy model) として，次の定理を紹介する．

定理 3.1. p を素数，$\mathbb{Q}_p$ を p 進体とする．$\mathbb{Q}_p$ に 1 の p ベキ乗根をすべて添加した体 $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ の絶対 Galois 群

$$\mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})\right)$$

の副 p Sylow 部分群は，自由副 p 群である．

定理 3.1 自体にはそれほどの面白みはないかもしれないが，自明な主張ではないだろう．ここでは，この定理を，perfectoid 空間論の考え方を用いて証明しよう．鍵となるのは，

“とても分岐した無限次拡大体においては，絶対 Galois 群の p 部分が
単純な法則に支配される”

という現象である．このような現象は，perfectoid 空間論を応用する場面において頻繁に現れる．

定理 3.1 の証明のポイントは，$\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ の p 進完備化

$$K := \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})^\wedge$$

が perfectoid 体になることである．$\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p$ は岩澤理論でおなじみの無限次 Galois 拡大であるから説明は不要であろう．

注． 実は，この定理において $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ という体そのものには，それほど大きな意味はない．例えば $\mathbb{Q}_p$ に p の p ベキ乗根をすべて添加した体 $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ — これは Kisin 加群の理論 ([50]) で活躍する $\mathbb{Q}_p$ の非 Galois 拡大である — を考えても定理 3.1 は同様に成立する．($\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ の p 進完備化が perfectoid 体になることを使えば証明は同様である．)

証明． $\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ の p 進完備化を $K := \mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})^\wedge$ とおく．K は perfectoid 体である．その tilt $K^\flat$ は標数 p の perfectoid 体であり，それらの絶対 Galois 群の間に標準的な同型が存在する．具体的には，

$$K^\flat \ := \ \mathrm{Frac}\big(\varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \big) \ \cong \ \big(\mathbb{F}_p((t))(t^{1/p^\infty})\big)^\wedge$$

である ([82])．p 進完備化が絶対 Galois 群を変えないこととあわせて，

$$\mathrm{Gal}\big(\overline{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})\big) \ \cong \ \mathrm{Gal}\big(\overline{K}/K\big) \ \cong \ \mathrm{Gal}\big(\overline{K^\flat}/K^\flat\big)$$

を得る ($K^\flat$ は正標数の perfectoid 体なので完全体であるから，$\overline{K^\flat}$ は $K^\flat$ の分離閉包と等しい)．この同型において $\mathrm{Gal}\big(\overline{\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})}/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})\big)$ の副 p Sylow 部分群に無限次 Galois 理論で対応する $\overline{K^\flat}/K^\flat$ の中間体を $\overline{K^\flat}/L/K^\flat$ とおく．Artin-Schreier 系列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \overline{L} \xrightarrow{x\mapsto x^p-x} \overline{L} \longrightarrow 0$$

を用いて Galois コホモロジーを計算することで，

$$H^2(\mathrm{Gal}(\overline{L}/L), \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 0$$

が分かる．副 p 群の一般論より，$\mathrm{Gal}(\overline{L}/L)$ は自由副 p 群である ([72, I, §4.2, Proposition 24, Corollaire 2])． □

単純すぎる例かもしれないが，ここで紹介した定理 3.1 には，§2 で説明した perfectoid 空間論を使うための 3 つのステップ — 極限への移行，perfectoid 化，正標数への帰着 — が一通り現れている．

定理 3.1 の証明を振り返っておこう．証明のポイントは，

- tilt を使って正標数の perfectoid 体 $K^\flat$ に帰着させることと，
- 正標数の体においては，Galois コホモロジーが Artin-Schreier 系列を用いて "簡単に" 計算できること

であった．K と $K^\flat$ の間には直接の体論的関係は無い ($\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} K^\flat = p > 0$ だから，一方が他方の部分体になることはない)．それにも関わらず両者の絶対 Galois 群が比較できてしまうところに，tilt という操作の不思議さ・面白さがある．Artin-Schreier 系列は Galois コホモロジーを計算する強力な道具だが，正標数の世界にしか存在しない．tilt により，それを標数 0 の世界に "移送" できる．このような操作を系統的に行うことを可能にする非 Archimedes 的解析幾何学の枠組みが，perfectoid 空間論である．

注．　もちろん定理 3.1 を tilt を使わずに証明することもできる．簡単な演習問題なので，興味のある読者は定理 3.1 の直接の証明を試みていただきたい．Kummer 理論を用いて定理 3.1 を証明しようとすると，結局のところ，K が perfectoid 体であることを証明するのと同様の議論を行うことになるだろう．

注．　tilt の考え方自体は新しいものではない．標数の異なる非 Archimedes 局所体を近似する理論は，"近い局所体" (close local field) の理論や "ノルム体" (field of norms) の理論として古典的に知られている．分岐理論，局所相互法則，p 進 Galois 表現，p 進代数群の表現論などへの応用が知られている ([26], [48], [32], [87])．

§4.　完全交叉多様体に対する重さ・モノドロミー予想

perfectoid 空間論の最初の非自明な応用例として，完全交叉多様体に対する重さ・モノドロミー予想の解決が挙げられる．Scholze 自身，重さ・モノドロミー予想の解決が perfectoid 空間論を導入する当初の動機であったと述べている ([66, §1])．

重さ・モノドロミー予想は非 Archimedes 局所体上の有限型の代数多様体のエタール・コホモロジーに対する予想である．一見すると perfectoid 空間論の範疇ではない．それにも関わらず perfectoid 空間論が応用できてしまうことは，perfectoid 空間論の適用範囲の広さを表している．

§4.1.　重さ・モノドロミー予想

まずは，重さ・モノドロミー予想の主張を復習する．p を素数，K を剰余標数が p の非 Archimedes 局所体とする (K は $\mathbb{Q}_p$ または $\mathbb{F}_p((t))$ の有限次拡大である)．ℓ を p と異なる素数とし，体同型

$$\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \;\cong\; \mathbb{C}$$

を固定する ($\mathbb{C}$ は複素数体)．K の剰余体を $\mathbb{F}_q$ とおけば，q は p のベキである．自然な連続全射 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ の核を I_K とおく (I_K を K の惰性群という)．次

のような完全系列がある:

$$1 \longrightarrow I_K \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) \longrightarrow 1$$

$\mathrm{Frob}_q \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ を幾何的 Frobenius 元とする．これは，$x \in \overline{\mathbb{F}}_q$ に対し，$\mathrm{Frob}_q(x) = x^{1/q}$ で定義される元であり，$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ の位相的生成元である．

X を K 上の固有かつ滑らかなスキームとする．このとき，ℓ 進エタール・コホモロジー

$$H^i(X \otimes_K K^{\mathrm{sep}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

は有限次元 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 線形空間であり，K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ が連続に作用する．惰性群 I_K の作用による固定部分 $H^i(X \otimes_K K^{\mathrm{sep}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{I_K}$ には $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$ が自然に作用するから，この作用に関する Frob_q の固有値が考えられる．

1970 年頃に，Deligne は，エタール・コホモロジーと Hodge 理論との類似や，代数幾何・整数論における種々の予想 (特に Grothendieck のモチーフ理論や L 関数の解析的性質 (収束半径・極の位置) の考察) を踏まえて，次の予想を提出した．

予想 4.1 (重さ・モノドロミー予想 ([22]))． $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ を I_K-固定部分 $H^i(X \otimes_K K^{\mathrm{sep}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{I_K}$ への Frob_q の作用の固有値とする．このとき，不等式

$$\left|\iota(\alpha)\right| \ \leq \ q^{i/2}$$

が成立する (ここで $|\cdot|$ は複素絶対値を表す)．

注. X の Hasse-Weil ゼータ関数は

$$\frac{1}{1-\alpha q^{-s}}$$

という形の関数の交代積で書けるから，予想 4.1 は Hasse-Weil ゼータ関数の局所因子の極や零点の位置の評価を与える．予想 4.1 は代数多様体やモチーフから定まるゼータ関数・L 関数の性質を研究する上でも大切な予想である．

注. 予想 4.1 のより精密なバージョンとして，ℓ 進エタール・コホモロジーに “重さフィルトレーション” と “モノドロミー・フィルトレーション” と呼ばれる減少フィルトレーションを定義して，それらが “次数のずれ” を除いて一致するという形の予想もある ([44], [65, §9])．もし予想 4.1 が一般的に成り立てば，Poincaré 双対性や Künneth 公式を組み合わせることでフィルトレーションを用いた精密版の予想も導かれるから ([25, Théorème 1.8.4] の証明を参照)，予想 4.1 の主張が問題の本質的な困難さを表していると思う．

注. 現在のところ，予想 4.1 は X の次元が 3 以上の場合は一般には未解決である．予想 4.1 の難しいところは，K の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ を構成する 2 つの構成要

素 — 幾何的 Frobenius 元と惰性群 — の不思議な関係を主張しているところにあるように思う．このような関係はエタール・コホモロジーの一般論からは，なかなか見えてこない．予想 4.1 はエタール・コホモロジーに隠された整数論的情報 — 時としてそれは，L 関数の極や零点として私たちの "目に見える" ようになるのだが — を表した予想である．

注．　X が整数環 $\mathcal{O}_K$ 上の固有かつ滑らかなモデル $\mathfrak{X}$ を持つ場合は，エタール・コホモロジーの (固有射および滑らかな射に対する) 底変換定理から導かれる同型

$$H^i(X \otimes_K K^{\mathrm{sep}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \;\cong\; H^i(\mathfrak{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} \overline{\mathbb{F}}_q, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

がある．惰性群 I_K の作用は自明になり，予想 4.1 は $\mathbb{F}_q$ 上の固有かつ滑らかなスキームのエタール・コホモロジーへの Frob_q の作用の問題に帰着される．これは，X が射影的な場合は Deligne が "Weil I" において解決している ([23])．射影的でない固有スキームの場合は "Weil II" による ([25])．オルタレーションを用いて "Weil I" に帰着することもできる ([21])．なお，この場合は，予想 4.1 の不等式は等式となる．

注．　$K = \mathbb{F}_q((t))$ であって X が $\mathbb{F}_q$ 上超越次数 1 の体上定義されている場合は，予想 4.1 は Deligne により "Weil II" の中で解決されている ([25], [49])．Deligne による証明には関数体上の大域的手法 (関数体の類体論・L 関数の解析的性質など) が用いられた．この結果は "Weil II" において確立されたコホモロジー論の諸定理 (純な重さを持つ ℓ 進層の圏の半単純性や強 Lefschetz 定理など) の基礎ともなった．より一般に K が正標数の場合も，"Weil II" に帰着することで予想 4.1 を証明することができる ([80], [45])．

注．　$i \leq 2$ の場合や $i \geq 2\dim X - 2$ の場合は，オルタレーションと超平面切断を用いて 2 次元の場合に帰着して Rapoport-Zink の重さスペクトル系列を用いることで予想 4.1 を証明することができる ([21], [59], [62])．また，$i = 1$ の場合は，Picard-Lefschetz 定理や，アーベル多様体の Néron モデルの性質を用いて証明することもできる ([89])．

注．　X が総実代数体または CM 体上定義され，ℓ 進エタール・コホモロジー $H^i(X \otimes_K K^{\mathrm{sep}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ から定まる Galois 表現が保型表現に伴う Galois 表現の直和 (の局所成分) で書ける場合，局所・大域 Langlands 対応の整合性を用いることで予想 4.1 が証明可能な場合がある ([78], [12])．(なお，[78] の証明は，ユニタリ型の志村多様体の半安定モデルの特殊ファイバーのエタール・コホモロジーを，井草多様体のエタール・コホモロジーを用いて計算することにより行われる．上述の重さスペクトル系列 (を p の外の Hecke 環の作用で分解したもの) の E_2 退化が証明され，予想 4.1 が導かれる．) また，ℓ 進 Galois 表現の潜保型性 (例えば [5]) を用いることで，証明可能な代数多様体のクラスを広げることもできる．例えばあるクラスの Calabi-Yau 多様体 (例えば [4]) に対して証明することができる．しかし，このような方法で扱える Galois 表現は Hodge-Tate の重さが異なる (§6 で述べる "正則代数的" な保型表現に対応する) 必要があるから，扱えるクラスはかなり制限される．最近は，このような方向への潜保型性の応用としては，Patrikis と Taylor による決定的な結果 [58, Corollary B] がある．

§4.2. Perfectoid 空間論の重さ・モノドロミー予想への応用

Scholze は，perfectoid 空間論の応用として，重さ・モノドロミー予想 (予想 4.1) が完全交叉多様体の場合に成り立つことを示した．

定理 4.2 ([65, Theorem 9.6])**.** $K/\mathbb{Q}_p$ を有限次拡大とする．

$$X \subset \mathbb{P}^N_K$$

を滑らかな完全交叉多様体とする．このとき，X に対する予想 4.1 が成立する．

ほぼ同様の方法で，X が射影的で滑らかなトーリック多様体における集合論的な完全交叉 (set theoretic complete intersection) の場合も証明できる．“完全交叉” は，それほど広くはないが興味深い代数多様体を多数含むクラスである．混標数の場合の予想 4.1 が，このようなある程度広いクラスの代数多様体で証明されたのは初めてのことである．その証明方法の斬新さも相まって，定理 4.2 は驚きを持って迎えられた．

証明. 予想 4.1 の主張は惰性群 I_K の作用による固定部分への Frob_q の作用に関するものであるから，K を剰余次数が有限であるような代数拡大の p 進完備化 K' に置き換えて示せば十分である．実際，

$$H^i(X \otimes_K \overline{K}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{I_K} \ \subset \ H^i(X \otimes_K \overline{K'}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)^{I_{K'}}$$

であるから，もし右辺について予想 4.1 が成立すれば，左辺についても成立する．

定理 3.1 を参考に，tilt を用いて正標数の場合に帰着して証明することを考えよう．K に 1 の p ベキ乗根をすべて添加した体の p 進完備化を $K' = K(\mu_{p^\infty})^\wedge$ とおく ($K' = K(p^{1/p^\infty})^\wedge$ とおいてもよい)．K'/K の剰余次数は有限であり，$\mathrm{Gal}(\overline{K'}/K') \subset \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ である．さらに，tilt により，K' と $(K')^\flat$ の絶対 Galois 群は同型である．

しかし，問題はそれほど単純ではない．X は K 上の有限型スキームであるから，$X \otimes_K K' \subset \mathbb{P}^N_{K'}$ に伴う adic 空間は perfectoid 空間ではない．したがって，$X \otimes_K K'$ の tilt “$(X \otimes_K K')^\flat$” を考えることはできない．

そこで，次のような (やや人工的な) 極限への移行操作を行う．$X \otimes_K K' \subset \mathbb{P}^N_{K'}$ に伴う adic 空間を

$$(X \otimes_K K')^{\mathrm{ad}} \ \subset \ (\mathbb{P}^N_{K'})^{\mathrm{ad}}$$

とおく．このとき，射影座標を p 乗する射

$$\varphi\colon [x_0 : x_1 : \cdots : x_N] \mapsto [x_0^p : x_1^p : \cdots : x_N^p]$$

に関する射影極限 “$\varprojlim_\varphi (\mathbb{P}^N_{K'})^{\mathrm{ad}}$” は，次の意味で perfectoid 空間とみなすことができる:

> perfectoid 空間 Y と，adic 空間の射 $Y \longrightarrow (\mathbb{P}^N_{K'})^{\mathrm{ad}}$ の射影系であって，底空間の間の写像 $|Y| \longrightarrow \varprojlim_\varphi |(\mathbb{P}^N_{K'})^{\mathrm{ad}}|$ が同相写像であり，任意の $y \in Y$ に対して，y の像の剰余体の帰納極限から y の剰余体への写像が稠密な像を持つ．

これを

$$Y \ \sim \ \varprojlim_{\varphi} (\mathbb{P}^N_{K'})^{\mathrm{ad}}$$

と書く ([65, Definition 7.14]). このとき，Y のエタール・トポスは，$(\mathbb{P}^N_{K'})^{\mathrm{ad}}$ のエタール・トポスの射影極限と同型になる ([65, Theorem 7.17]).

さて，Y は perfectoid 空間であるから，その tilt $Y^\flat$ を考えることができる．このとき $(K')^\flat$ 側でも

$$Y^\flat \ \sim \ \varprojlim_{\varphi} \left(\mathbb{P}^N_{(K')^\flat}\right)^{\mathrm{ad}}$$

となることが証明できる．(証明のポイントは，$\mathbb{P}^N$ や φ が基礎体によらない組み合わせ的データによるチャートの貼り合わせで構成されることである．同様の構成はトーリック多様体でも可能である．)

次に，$X \subset \mathbb{P}^N_K$ が完全交叉であることを用いる．X の定義方程式の係数を p 進的に十分近似することで，tilt 側の射影的代数多様体 $Z \subset \mathbb{P}^N_{(K')^\flat}$ であって以下をみたすものの存在が示せる ([65, §9]):

Z は $\mathbb{F}_q$ 上の超越次数が 1 の体上定義され，エタール・コホモロジーの単射

$$\psi\colon H^i\big(X \otimes_K K^{\mathrm{sep}}, \mathbb{Q}_\ell\big) \ \hookrightarrow \ H^i\big(Z \otimes_{(K')^\flat} \overline{(K')^\flat}, \mathbb{Q}_\ell\big)$$

であって，tilt による絶対 Galois 群の同型

$$\mathrm{Gal}\left(\overline{K'}/K'\right) \ \cong \ \mathrm{Gal}\left(\overline{(K')^\flat}/(K')^\flat\right)$$

と両立するものが存在する．

この部分の証明には，Huber による adic 空間のエタール・コホモロジー論 ([42]) が用いられる．特に，Rigid 解析空間の族に対するコホモロジーの連続性定理 ([43, Theorem 3.6 (a)]) が重要である．一見突拍子もない主張にも見えるが，コホモロジー論的枠組みさえ整えば，ψ の構成そのものは標準的な議論の組み合わせであり，難しくない．こうして，混標数の体 K 上の代数多様体 X のエタール・コホモロジーが，正標数の体 $(K')^\flat$ 上の代数多様体 Z のエタール・コホモロジーの中に埋め込まれる．

さて，“Weil II” により，予想 4.1 は Z に対して成立する ([25]). tilt による絶対 Galois 群の同型が幾何的 Frobenius 元や惰性群と両立することが tilt の構成法から分かるから，予想 4.1 は X に対しても成立することがしたがう． □

注．　重さ・モノドロミー予想には (対数的) クリスタル・コホモロジーを用いて定式化するバージョンも存在する ([56]). しかし，クリスタル・コホモロジーについては tilt で直接比較することが難しいと思われることから，perfectoid 空間論を用いて解決することは難しそうである．

§5. p 進 Hodge 理論への応用

p 進 Hodge 理論は，p 進体上の空間に対して定まる性質の異なるコホモロジーを繋ぐ理論である．特にエタール・コホモロジーのような "位相的" なコホモロジーと，de Rham コホモロジーやクリスタル・コホモロジーのような "連接層的・微分形式的" なコホモロジーを結ぶ理論を "p 進 Hodge 理論" と呼ぶことが多い．今日では p 進 Hodge 理論については様々なアプローチが知られている．スキームの場合の伝統的な方法 (例えば [81], [30], [6]) では，程度の差はあるものの，オルタレーションを用いて扱いやすい整モデル (例えば半安定モデルや対数的に滑らかなモデル) を構成して，対数幾何学の具体的な計算を行うことが多い．

Scholze は，perfectoid 空間論の応用として，adic 空間に対して p 進 Hodge 理論の比較同型 (de Rham 比較同型) を証明した ([67], [66, §3])．Scholze の方法は整モデルを用いない p 進解析幾何的なものである．オルタレーションや対数幾何学は使わない．スキームのみならず，より一般に，Rigid 解析空間の固有かつ滑らかな族についても適用可能であるという利点もある．技術的にはもちろん大きく異なるが，証明の発想は C^∞ 多様体の de Rham 比較同型の古典的証明に近いかもしれない ([85], [11]).

§5.1. Scholze の比較同型 (構成可能 $\mathbb{F}_p$ 層の場合)

説明を簡単にするため，de Rham 比較同型の一歩前の段階である "$\mathbb{F}_p$ 層の比較同型" を紹介する．

基礎体として $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の p 進完備化 $C := (\overline{\mathbb{Q}}_p)^\wedge$ をとる．C は perfectoid 体である．X を $\mathrm{Spa}(C, \mathcal{O}_C)$ 上固有な adic 空間とする．$X_{\text{ét}}$ を X のエタール・サイトとする ([42])．$X_{\text{ét}}$ 上の層 $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X^+$ を，エタール射

$$U = \mathrm{Spa}(A, A^+) \longrightarrow X$$

に対して

$$\mathcal{O}_X(U) = A, \qquad \mathcal{O}_X^+(U) = A^+$$

と定める．$\mathcal{O}_X$ を X 上の正則関数の層と見たとき，"値が 1 以下" であるような関数のなす部分層が $\mathcal{O}_X^+ \subset \mathcal{O}_X$ である．$\mathbb{L}$ を $X_{\text{ét}}$ 上の $\mathbb{F}_p$ 加群に値を取る構成可能層 (constructible sheaf) とする．そのような $\mathbb{L}$ を構成可能 $\mathbb{F}_p$ 層 (constructible $\mathbb{F}_p$-sheaf) という．

Scholze は adic 空間 X 上の構成可能 $\mathbb{F}_p$ 層 $\mathbb{L}$ に対し，エタール・コホモロジーの有限性を示した．そして，エタール・コホモロジーを連接層のコホモロジーと "almost に" 結びつける定理を証明した．

定理 5.1 ([67, Theorem 5.1], [66, Theorem 3.13])．

1. $H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L})$ は有限次元 $\mathbb{F}_p$ 線形空間である．$i > 2\dim X$ なら，$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L}) = 0$ である．

2. almost 同型

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_C/p \ \cong_a \ H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_X^+/p)$$

が存在する．($\cong_a$ は almost 同型を表す ([82])．)

注． 定理 5.1 は，X が固有かつ滑らかで，$\mathbb{L}$ が局所定数の場合は [67] で証明された．また， Rigid 解析空間に対する特異点解消定理 ([9], [79]) を用いることで，“滑らか” の仮定を外すことができる ([66, §3])．しかし，一般には “固有” の仮定を外すことはできない (反例がある)．

定理 5.1 (2) の両辺は異なる種類のコホモロジーであることに注目されたい．簡単なコホモロジー論的議論により，定理 5.1 の主張を $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ 局所系に対して示すこともできる．定数層 $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ に対して定理 5.1 を適用し，m に関する射影極限をとり，p を可逆にすることで，左辺からは p 進エタール・コホモロジー

$$\left(\varprojlim_m H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}} \mathcal{O}_C/p^m\right) \otimes_{\mathcal{O}_C} C \ = \ H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$$

が得られる．また，詳細は省略するが，副エタール・サイト $X_{\text{pro-ét}}$ を用いた計算により，右辺からは

$$\begin{aligned}\left(\varprojlim_m H^i(X_{\text{ét}}, \mathcal{O}_X^+/p^m)\right) \otimes_{\mathcal{O}_C} C &= H^i(X_{\text{pro-ét}}, \widehat{\mathcal{O}}_X^+) \otimes_{\mathcal{O}_C} C \\ &= H^i(X_{\text{pro-ét}}, \widehat{\mathcal{O}}_X) \\ &\cong \bigoplus_{s+t=i} H^s(X, \Omega_X^t)(-t)\end{aligned}$$

が得られる．こうして，いわゆる “Hodge-Tate 分解” が証明される (古典的な p 可除群の場合は [75] を参照)．ここで，$\widehat{\mathcal{O}}_X^+$ は副エタール・サイト上の層であって，

$$\widehat{\mathcal{O}}_X^+ := \varprojlim_m \mathcal{O}_X^+/p^m, \qquad \widehat{\mathcal{O}}_X := \widehat{\mathcal{O}}_X \otimes_{\mathcal{O}_C} C$$

で定義される ([67, Definition 4.1])．さらにもう少し議論することで，de Rham 比較同型を証明することもできる:

有限次拡大体 $K/\mathbb{Q}_p$ 上定義された固有かつ滑らかな adic 空間 X_0 に対し，$\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用と両立する同型

$$H^i\big((X_0 \otimes_K \overline{K})_{\text{ét}}, \mathbb{Q}_p\big) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{dR}} \ \cong \ H^i_{\text{dR}}(X_0) \otimes_K B_{\text{dR}}$$

が存在する ([67, Corollary 1.8], [69, Theorem 11.8])．

より一般に，adic 空間の固有族 $f\colon X \longrightarrow Y$ に対する de Rham 比較同型も証明できる．(詳細は [67], [66, §3] を参照．)

注． Hodge-de Rham スペクトル系列の退化も証明できる ([67, Corollary 1.8], [69, Theorem 11.9])．Scholze の手法は純 p 進解析幾何的なものなので，代数化できない adic 空間に対しても適用可能である．複素数体 $\mathbb{C}$ 上の場合と異なり，Hodge-de Rham スペクトル系列の退化の証明において "Kähler" といった条件は不要である．$\mathbb{C}$ 上では Hodge-de Rham スペクトル系列の退化しない (Kähler でない) 複素多様体が知られている (岩澤多様体と呼ばれる ([37, p. 444]))．Scholze の定理の帰結として，そのような多様体は adic 空間の世界には存在しないことが分かる．

§ 5.2. Adic 空間の副エタール・サイト

定理 5.1 の証明には副エタール・サイト (pro-étale site) が用いられる．副エタール・サイトの正確な定義は省略するが，およそ次のようなものである (正確な定義は [67, Definition 3.9] を参照)．

"被覆" の構成要素としての開集合を一般化して "エタール射" も含めたものがエタール・サイトであったことを思い出そう．エタール・サイトをさらに拡張して，adic 空間の射の系列

$$V_\lambda \longrightarrow U \longrightarrow X$$

であって，$U \longrightarrow X$ がエタール射で，$V_\lambda \longrightarrow U$ が有限エタール全射の射影系となっているようなものも含めたものが，副エタール・サイト $X_{\text{pro-ét}}$ である．系列 $V_\lambda \longrightarrow U \longrightarrow X$ に対し，底空間の射影極限 $\varprojlim_\lambda |V_\lambda|$ を考えることができる．底空間のレベルで被覆となっているものを "副エタール被覆" と定めることで，サイトの構造を入れる．

注． 底空間を用いたこのような素朴な定義が機能するところに，基礎理論として adic 空間論を採用したことの利点がある．古典的な Rigid 幾何学のような "許容被覆 (admissible covering)" を考慮しながら副エタール・サイトを導入するのは，かなり困難であろう．

副エタール・サイト $X_{\text{pro-ét}}$ の対象 $V_\lambda \longrightarrow U \longrightarrow X$ であって，$V_\lambda = \mathrm{Spa}(A_\lambda, A_\lambda^+)$ と書けるものを考える．

$$R^+ := \left(\varinjlim_\lambda A_\lambda^+ \right)^\wedge, \qquad R := R^+ \otimes_{\mathcal{O}_C} C$$

とおく ($()^\wedge$ は p 進完備化)．組 (R, R^+) が perfectoid 代数となるとき，やや非公式な言い方かもしれないが，

"$V_\lambda \longrightarrow U \longrightarrow X$ は perfectoid 空間である"

と言うことにする ([67, Definition 4.3 (i)])．このとき，

$$\mathrm{Spa}(R,R^+)\in X_{\text{pro-ét}}$$

とも書く．

次の命題は perfectoid 空間論を adic 空間に応用する際の鍵である．なお，この命題は X が滑らかとは限らない場合も成立する (Colmez による)．

命題 5.2 ([67, Proposition 4.8], [20])．　X を局所 Noether 的な $\mathrm{Spa}(C,\mathcal{O}_C)$ 上の adic 空間とする．このとき，X は副エタール位相について局所的に perfectoid 空間である．すなわち，$X_{\text{pro-ét}}$ の対象 $V_\lambda\longrightarrow U\longrightarrow X$ であって perfectoid 空間であるものが，X の副エタール位相の基底をなす．

命題 5.2 の証明は技術的であり，著者には説明できない．ここではその代わり，命題 5.2 が成り立ちそうだという雰囲気を説明する．副エタール位相で局所的に考える際は，

"座標の p^m 乗根を付け加える"

という操作が許される．命題 5.2 の主張は，この操作をどんどん繰り返して帰納極限をとり，p 進完備化をとることで perfectoid 代数が得られる，ということである．perfectoid 代数の例 — $C\langle T_1^{1/p^\infty},\ldots,T_n^{1/p^\infty}\rangle$ など — を念頭に置けば，命題 5.2 は自然な主張に見えるかもしれない．

古典的な p 進 Hodge 理論では，p 進周期環に由来する種々の極限計算のために，"層の形式的な射影系" を用いて ad hoc な計算を行うことがあった．そのため，種々の "自然な計算" の正当化が困難なものになることも多かった．adic 空間 X に対して副エタール・サイト $X_{\text{pro-ét}}$ を導入する利点は，そうした p 進周期環の計算を，形式的な射影系を用いることなく，層のレベルで直接実現できてしまうことである．例えば，§5.1 で説明した

$$\widehat{\mathcal{O}}_X^+ \;:=\; \varprojlim_m \mathcal{O}_X^+/p^m$$

は $X_{\text{pro-ét}}$ 上の層である ($X_{\text{pro-ét}}$ 上の "層の形式的な射影系" ではない!)．

エタール・サイト $X_{\text{ét}}$ 上の層 $\mathcal{F}$ を副エタール・サイト $X_{\text{pro-ét}}$ に引き戻してもコホモロジーは変化しない ([67, Corollary 3.17])．すなわち，

$$H^i(X_{\text{ét}},\mathcal{F})\;\cong\;H^i(X_{\text{pro-ét}},\mathcal{F})$$

が成り立つ ($\mathcal{F}$ の引き戻しを同じ記号で書いた)．$X_{\text{pro-ét}}$ は，p 進周期環の計算が可能となるように，$X_{\text{ét}}$ をうまく拡張したものである．$X_{\text{pro-ét}}$ を用いることにより，種々の議論の見通しがよくなるばかりでなく，自然な一般化も可能になる．

§5.3.　定理 5.1 の証明の方針

定理 5.1 の証明の方針を説明する．構成可能層に関する標準的なコホモロジー論の議論により，$\mathbb{L}$ が $\mathbb{F}_p$ 局所系の場合 (エタール局所的に定数層と同型な場合) に示せば十分である ([66, §3.2])．

とても大雑把に言うと，定理 5.1 の証明は次のステップに分けられる．

ステップ 1 ([67, Lemma 4.12])

任意のアフィノイド perfectoid 空間 $U = \mathrm{Spa}(R, R^+) \in X_{\text{pro-ét}}$ に対し，almost 同型

$$H^i(U, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_X^+/p) \ \cong_a \ \begin{cases} \text{almost 有限生成 } \mathcal{O}_C/p \text{ 加群} & i = 0 \\ 0 & i > 0. \end{cases}$$

を示す．

この主張は，有限エタール被覆 $U' \longrightarrow U$ を取ることで $\mathbb{L}$ が定数層の場合に帰着される．定数層の場合は，アフィノイド perfectoid 空間の構造層のエタール・コホモロジーの almost な計算 (almost 消滅定理) を用いて示される ([65, Proposition 7.13])．

ステップ 2 ([67, Lemma 5.6])

詳しくは説明しないが，適当な条件をみたすアフィノイド開集合 $V \subset X$ に対し，

$$H^i(V_{\text{ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_V^+/p) \ \cong_a \ 0 \qquad (i > \dim V)$$

であって，さらに，V に真に含まれる (strictly contained) 有理的部分集合 $V' \subset V$ に対して制限写像

$$H^i(V_{\text{ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_V^+/p) \ \longrightarrow \ H^i(V'_{\text{ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{V'}^+/p)$$

の像が almost 有限生成 $\mathcal{O}_C$ 加群であることを示す．

この主張の証明は次のように行われる．まず，V に課した条件 (ここでは説明していないが) を用いることで，Galois 群が $\mathbb{Z}_p^{\dim X}$ である副エタール被覆

$$\widetilde{V} \ \longrightarrow \ V$$

であって，$\widetilde{V}$ が perfectoid 空間になるものがとれる (命題 5.2 も参照)，Cartan-Leray スペクトル系列を用いて V のコホモロジーを位相群

$$\mathrm{Gal}(\widetilde{V}/V) \ \cong \ \mathbb{Z}_p^{\dim X}$$

のコホモロジーで計算する．$\mathbb{Z}_p^{\dim X}$ のコホモロジー次元が $\dim X$ となることがポイントである．(このような議論は p 進 Hodge 理論において典型的なものである．[75] において，すでに同様の計算が現れている．[30] も参照．)

後半の像の (almost な) 有限性の証明には，アフィノイド代数の関数解析的性質 (完全連続作用素の性質) を用いる (説明は省略する)．

ステップ 3 ([67, Lemma 5.9])

アフィノイド開集合による開被覆 $X = \bigcup_i V_i$ であって，各 V_i がステップ 2 の条件をみたすものをとる．これを用いて，

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_X^+/p) \;\cong_a\; \begin{cases} \text{almost 有限生成 } \mathcal{O}_C/p \text{ 加群} & 0 \le i \le 2\dim X \\ 0 & i > 2\dim X \end{cases}$$

を示す．このステップにおいては，X が固有であることが本質的である．

ステップ 4 ([67, Theorem 5.1])

C の tilt を $C^\flat$ とおく．素元 $\pi \in \mathcal{O}_{C^\flat}$ であって $\mathcal{O}_{C^\flat}/\pi = \mathcal{O}_C/p$ となるものをとる．$X_{\text{pro-ét}}$ 上の層 $\mathcal{O}_X^+$ に対する tilt を

$$\widehat{\mathcal{O}}^+_{X^\flat} := \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_X^+/p, \qquad \widehat{\mathcal{O}}_{X^\flat} := \widehat{\mathcal{O}}^+_{X^\flat} \otimes_{\mathcal{O}_{C^\flat}} C^\flat$$

で定めれば，$\widehat{\mathcal{O}}^+_{X^\flat}/\pi = \mathcal{O}_X^+/p$ となる．これより，$X_{\text{pro-ét}}$ 上の層の系列 (Artin-Schreier 系列)

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{\mathcal{O}}_{X^\flat} \xrightarrow{\varphi - \mathrm{id}} \widehat{\mathcal{O}}_{X^\flat} \longrightarrow 0 \tag{5.1}$$

が構成される (φ は Frobenius 写像．エタール・サイトの tilt 同値を用いることで，この系列の完全性が証明できる)．$\mathbb{L}$ とのテンソル積をとることで

$$0 \longrightarrow \mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \widehat{\mathcal{O}}_{X^\flat} \longrightarrow \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \widehat{\mathcal{O}}_{X^\flat} \longrightarrow 0$$

が得られる．

ステップ 3 で示した

$$H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_X^+/p) \;\cong\; H^i(X_{\text{pro-ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_X^+/p)$$

の almost 有限生成性より，$H^i(X_{\text{pro-ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \widehat{\mathcal{O}}_{X^\flat})$ は有限次元 $C^\flat$ 線形空間であり，Frobenius 写像と両立する同型

$$H^i(X_{\text{pro-ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \widehat{\mathcal{O}}_{X^\flat}) \;\cong\; (C^\flat)^r$$

が存在する ([67, Lemma 2.12]．これは “almost 世界の単因子論” とでもいうべき結果である)．

以上をまとめると，

$$\begin{aligned} H^i(X_{\text{ét}}, \mathbb{L}) &\cong H^i(X_{\text{pro-ét}}, \mathbb{L}) \\ &\cong H^i(X_{\text{pro-ét}}, \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{F}_p} \widehat{\mathcal{O}}_{X^\flat})^{\varphi=1} \\ &\cong \left((C^\flat)^r\right)^{\varphi=1} \\ &\cong \mathbb{F}_p^r \end{aligned}$$

となって所望の有限性が得られる．定理 5.1 (2) の almost 同型も同様に証明できる．

定理 5.1 の証明を振り返っておこう．ポイントは，

- $X_{\text{pro-ét}}$ において，X が局所的に perfectoid 空間とみなせることと，
- $X_{\text{pro-ét}}$ 上に Artin-Schreier 型の完全系列 (5.1) が構成でき，それを用いてコホモロジーの計算を行うこと

であった．(本当は，これ以外にも説明できていないポイントは沢山あるのだが．)

複雑さの度合いは大きく異なるが，証明の方針は，定理 3.1 と似たアイデアに基づいていると言える．$X_{\text{pro-ét}}$ において，perfectoid 空間が adic 空間の "good cover" ([11, I, §5], [85]) を与えていると考えることもできるかもしれない．

§6. Galois 表現の構成

§6.1. 保型表現に伴う Galois 表現

前節までに述べた perfectoid 空間論の応用例は，局所的あるいはコホモロジー論的なものであって，技術的色彩の強いものであった．より大域的な整数論への応用として，Scholze は保型表現に伴う Galois 表現を構成した．

以下では ℓ を素数とし，体同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ を固定する．

定理 6.1 ([68, Theorem 1.0.4, Corollary 5.4.2])**.** $n \geq 2$ とする．F を総実代数体または CM 体とし，π を $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の正則代数的な尖点的保型表現とする．このとき，π に伴う ℓ 進 Galois 表現が存在する．

ここでは保型表現に伴う ℓ 進 Galois 表現の正確な定義は省略する (正確な主張は [68, Corollary 5.4.2] を参照)．大雑把に言うと，半単純連続表現

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

であって，L 関数の等式

$$L(s,\pi) = L(s+(n-1)/2, \rho)$$

をみたすもの (もう少し正確に言うと，ほとんどすべての素点 v に対して，v における局所因子の等式が成り立つもの) が存在するということである．

定理 6.1 は，ℓ 進版の類体論 ([73, II, 2.3])

$$\big(\text{代数的連続 1 次元表現 } \rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times\big)$$
$$\overset{1:1}{\leftrightarrow} \big(\text{代数的 Hecke 指標 } \pi\colon \mathbb{A}_F^\times/F^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times\big)$$

の非可換版である．GL_n/F の大域 Langlands 対応 ([68, Conjecture 1.0.1], [19], [77], [14])

$$\big(\text{代数的な半単純連続表現 } \rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\big)$$
$$\overset{1:1}{\leftrightarrow} \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F) \text{ の代数的保型表現}\big)$$

に対し，現在知られている最も一般的な結果の一つである．

保型表現に伴う ℓ 進 Galois 表現は，L 関数の一致以外にも様々な技術的条件をみたすことが期待されている．しかし，[68] で構成された ρ に対しては，それらの条件がすべて証明されているわけではない．例えば，ρ は ℓ を割り切る素点で “de Rham” である — このとき ρ は “代数的” であるという — ことが期待されているが，この条件は π が自己双対的でない場合はまだ証明されていない．[68] で構成された ρ に対して，これらの技術的条件を確かめていくことは，今後の重要な研究課題である．

実は，定理 6.1 が Scholze により証明される少し前に，同様の定理が Harris-Lan-Taylor-Thorne によって証明されていた ([38]).

Scholze による証明も Harris-Lan-Taylor-Thorne による証明も，志村多様体の境界のコホモロジーへの Hecke 作用の固有値と，尖点形式の空間への Hecke 作用の固有値の間の mod p^m での合同を各 $m \geq 1$ について構成して，擬表現により Galois 表現を構成するという方針は似ている．しかし技術的細部は大きく異なる．Harris-Lan-Taylor-Thorne が比較的伝統的な代数幾何・数論幾何の手法 — 志村多様体の通常部分 (ordinary locus) のコンパクト化やそのコホモロジー (Rigid コホモロジーなど) — を用いるのに対し，Scholze の方法は perfectoid 空間論を本質的に用いる超越的・p 進解析幾何的なものである．興味深いことに，Scholze の方法においては，志村多様体のコンパクト化の境界の詳細な幾何的性質はさほど重要ではない．有限レベルの志村多様体の mod p^m 係数 コホモロジーに関する困難を，“極限” に一気に移行して perfectoid 空間論を用いることで解消するのである．技術的には，Scholze 自身による比較同型 (の mod p^m 係数の場合) と，後述する Hodge-Tate 周期写像が本質的な役割を果たす．

注． $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現が “正則代数的” とは “regular algebraic” の和訳である (正確には “regular C-algebraic” である ([14]))．これは，複素関数論における “正則 (holomorphic)” とは異なる概念なので，注意されたい．重さが 2 以上の正則 (holomorphic) な楕円保型形式には，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の正則代数的 (regular algebraic) な保型表現を対応させることができる．しかし，重さ 1 の場合は，代数的だが正則代数的ではない保型表現が対応する．

注． $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の尖点的保型表現は，代数的であっても正則代数的とは限らないから，定理 6.1 で扱えないケースも多数存在する．代数的な保型表現のクラスはずっと広大であり，代数多様体 (より一般に純モチーフ) のエタール・コホモロジーに実現される既約 Galois 表現に対応する尖点的保型表現をすべて含むと期待されている．例えば，重さ 1 の正則 (holomorphic) な楕円保型形式に対応する保型表現や，Laplace 作用素の固有値が $1/4$ の Maass 波動形式に対応する保型表現は代数的だが正則代数的ではない．$\mathbb{Q}$ 上の次元 $g \geq 2$ のアーベル多様体から定まる Galois 表現は，$\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の代数的だが正則代数的ではない保型表現に対応すると予想されている (いわゆる “楕円曲線の保型性予想” の高次元アーベル多様体版)．この予想の $\mathbb{Q}$ 上のアーベル曲面の場合の正則 (holomorphic) な Siegel 保型形式を用いた定式化は，[88, §8, Example 2] で与えられた．また，代数的だが正則代数的ではない保型表現に伴う Galois 表現の構成に関する最近の結果は，[35]

を参照 (古典的には [27] である).

§ 6.2. 自己双対的な場合・擬表現

さて，これからいくつかのステップに分けて定理 6.1 の証明の方針を説明する．証明の細部は複雑であり，これまでにも増して大雑把で不正確な説明になってしまうことをお詫びする．(各ステップごとに文献を挙げるようにしたので，以下の説明を決して鵜呑みにせず，適宜文献にあたっていただきたい．)

まず，定理 6.1 の背景について簡単に復習する ([19], [77], [14] も参照)．定理 6.1 の特別な場合は以前より知られていた．$F = \mathbb{Q}$, $n = 2$ の場合の定理 6.1 が，モジュラー曲線や久賀 - 佐藤多様体のエタール・コホモロジーを用いて証明されることは，よく知られている (Eichler, 志村五郎, Deligne)．比較的最近の結果としては，次のようなものがある．

定理 6.2 ([4, Theorem 1.1, Theorem 1.2], [17]). 保型表現 π が "自己双対的" なら，π に対する定理 6.1 が成立する．

この定理は，保型表現論の最新の結果 (基本補題・安定跡公式など) に，志村多様体 (特に $\mathrm{U}(1, n-1) \times \mathrm{U}(0, n) \times \cdots \times \mathrm{U}(0, n)$ 型の志村多様体) のエタール・コホモロジーの計算結果を組み合わせることで証明される．自己双対的な保型表現の定義は技術的なので省略する．ポイントは，要するに，保型表現論の種々の結果 (いわゆる Langlands 関手性) を用いることで志村多様体のエタール・コホモロジーに実現できる場合は定理 6.1 は知られていた，ということである．

実は，自己双対的な保型表現の中には，志村多様体のエタール・コホモロジーに実現できないものが存在するのだが，擬表現 (pseudo-representation) の手法 ([86], [76], [16]) により Galois 表現の存在が証明されている場合に帰着できるので，大きな問題はない ([17])．ここで，擬表現とは，次のような主張を正当化して証明するために用いられる技法である．

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現の列 $\{\pi_i\}_{i \geq 1}$ が存在して，以下の 2 つの条件をみたせば，定理 6.1 は π に対して成り立つ．
  - 定理 6.1 が各 π_i に対して成立する．
  - π_i の Hecke 固有値の $i \to \infty$ における極限が，π の Hecke 固有値に ℓ 進収束する．($\iota \colon \overline{\mathbb{Q}}_\ell \cong \mathbb{C}$ により Hecke 作用素の固有値を $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ の元とみなす．)

アイデアは単純である．

> もし，保型表現の列 $\{\pi_i\}_{i \geq 1}$ であって，それらの Hecke 固有値の列が π の Hecke 固有値に ℓ 進収束するものが存在すれば，ℓ 進 Galois 表現の列 $\{\rho_i\}_{i \geq 1}$ も "しかるべき意味" で ℓ 進収束して，その収束先は π に伴う ℓ 進 Galois 表現になるだろう

ということである．この “しかるべき意味” を正当化するのが擬表現である．

このように，保型形式の Hecke 固有値の合同を用いて Galois 表現を構成するという手法は，今日では標準的なものである．楕円保型形式の場合は古くから行われていた．(少なくとも [74], [27], [40] の研究に遡る．)

§6.3. 局所対称空間のコホモロジー

§6.2 で説明したように，定理 6.1 では π が自己双対的でない場合が問題となる．もし，自己双対的でないような (正則代数的かつ尖点的な) 保型表現 π に対し，“π に ℓ 進位相で近い” ような自己双対的な保型表現の列 $\{\pi_i\}_{i\geq 1}$ が存在すれば問題は解決するだろう．しかし，一般にはそのような列の存在は期待できない．自己双対的でない保型表現を自己双対的な保型表現の列で近似するのは無理がある．

ここで諦めてはいけない．π が自己双対的でなくても，

“直和 $\pi\oplus\pi^\vee$ にあたるもの”

は自己双対的であろう．(もう少し正確に言うと，$\pi^\vee$ は π の反傾表現を指標でひねったものである．F が CM 体の場合は，さらに F の複素共役でもひねる必要がある．詳細は [68, 5.2] を参照．) “直和 $\pi\oplus\pi^\vee$ にあたるもの” の構成法が，保型表現論において知られている．一つの候補としては $\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_n$ から GL_{2n} への放物誘導 (Eisenstein 級数) がある ([53])．ここでは，Scholze にならって，もう少し違う代数群

$$G:=\begin{cases}\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{Sp}_{2n} & F\text{ が総実代数体の場合}\\ \mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}}\mathrm{U}(n,n) & F\text{ が CM 体の場合 }(F^+\text{ は }F\text{ の最大総実部分体})\end{cases}$$

への放物誘導を考えよう (Sp_{2n} の行列の大きさは $2n\times 2n$，Res は Weil 制限である．このような代数群 G を選ぶ理由は，後述するように，G から志村多様体が構成できるからである．) $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n$ は G の 極大 Levi 部分群となり，

$$(\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})=\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$$

の保型表現 π から，$G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の保型表現への放物誘導を考えることができる．これが，“直和 $\pi\oplus\pi^\vee$ にあたるもの” の正体である．

さて，π は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の正則代数的な尖点的保型表現なので，その指標ひねりの無限成分はコホモロジー的 (cohomological) である ([19], [84], [14])．したがって，π (の指標ひねり) は，Weil 制限 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n$ の局所対称空間

$$X_U^{\mathrm{GL}_n}\;=\;\mathrm{GL}_n(F)\backslash\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)/(U_\infty\times U)$$

の係数付き特異コホモロジーに寄与する．(ここで，$U_\infty\subset\mathrm{GL}_n(F\otimes_\mathbb{Q}\mathbb{R})$ は極大コンパクト部分群と $\mathbb{R}_{>0}$ で生成された群，$U\subset\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_{F,f})$ は十分小さな開コンパクト部分群である．) π の Hecke 固有値の系 (system of Hecke eigenvalues) は，$X_U^{\mathrm{GL}_n}$ の特異コホモ

ロジーへの Hecke 作用の固有値の系として実現できる．したがって，$X_U^{\mathrm{GL}_n}$ のコホモロジーを研究したい．しかし，(F が総実で $n=2$ の場合を除き) $X_U^{\mathrm{GL}_n}$ は代数多様体にはならないから，代数幾何・数論幾何の手法が適用できないという困難がある．

一方，G の局所対称空間

$$X_{\widetilde{U}}^G \ = \ G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})/(\widetilde{U}_\infty \times \widetilde{U})$$

は複素構造を持つことが知られている．($\widetilde{U}_\infty$ は modulo 中心でコンパクトな $G(\mathbb{R})$ の閉部分群であって，$G(\mathbb{R})/\widetilde{U}_\infty$ が Hermite 対称領域の有限個の直和となるもの．$\widetilde{U} \subset G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ は十分小さな開コンパクト部分群であって，U としかるべき意味で両立するものをとる．) また，$\mathbb{Q}$ 上の斜交群への埋め込み

$$G \ \hookrightarrow \ \mathrm{Sp}_{2g}$$

であって Hermite 対称領域の構造と両立するものが存在するので ([24, §1.3], [64])，$X_{\widetilde{U}}^G$ は Hodge 型の志村多様体になる．志村多様体の一般論より，$X_{\widetilde{U}}^G$ は代数体上定義された準射影的な代数多様体になることも分かる ([24])．

GL_n の局所対称空間 $X_U^{\mathrm{GL}_n}$ と G の志村多様体 $X_{\widetilde{U}}^G$ の関係は，次のようなものである．$X_{\widetilde{U}}^G$ には Borel-Serre コンパクト化と呼ばれる自然なコンパクト化が存在する ([10]):

$$j_{\widetilde{U}}^{G,\mathrm{BS}} \colon X_{\widetilde{U}}^G \ \hookrightarrow \ X_{\widetilde{U}}^{G,\mathrm{BS}}.$$

包含写像 $j_{\widetilde{U}}^{G,\mathrm{BS}}$ はホモトピー同値なので両者のコホモロジーは同一視できる．ただし，一般には $X_{\widetilde{U}}^{G,\mathrm{BS}}$ は代数多様体ではなく “角を持つ実多様体” (real manifold with corners) になる．その境界は G の真放物部分群の共役類に応じた分割を持つ:

$$X_{\widetilde{U}}^{G,\mathrm{BS}}\backslash X_{\widetilde{U}}^G \ = \ \coprod_{P\subset G,\ P\neq G} X_{\widetilde{U}}^P.$$

P として $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\,\mathrm{GL}_n$ に対応する放物部分群をとれば，実トーラス束

$$X_{\widetilde{U}}^P \ \longrightarrow \ X_U^{\mathrm{GL}_n}$$

が得られる．これを用いてコホモロジーを計算することで，“直和 $\pi\oplus\pi^\vee$ にあたるもの” (放物誘導) が Borel-Serre コンパクト化の境界のコホモロジー

$$H^i\big(X_{\widetilde{U}}^{G,\mathrm{BS}}\backslash X_{\widetilde{U}}^G,\ \mathcal{F}\big)$$

に寄与することが証明できる．($\mathcal{F}$ は π の無限成分から定まる局所系である．)

このようにして，問題は，志村多様体 $X_{\widetilde{U}}^G$ の Borel-Serre コンパクト化 $X_{\widetilde{U}}^{G,\mathrm{BS}}$ に対し，その境界 $X_{\widetilde{U}}^{G,\mathrm{BS}}\backslash X_{\widetilde{U}}^G$ のコホモロジーへの Hecke 作用の問題に帰着される．しかし，志村多様体 $X_{\widetilde{U}}^G$ は代数多様体であるが，その Borel-Serre コンパクト化 $X_{\widetilde{U}}^{G,\mathrm{BS}}$ は代数多様体ではないので，境界のコホモロジーの整数論的研究は困難なことが多い．

§6.4. 境界の mod p^m 係数コホモロジー

Scholze は，志村多様体の境界の mod p^m 係数コホモロジーについて，次のような驚くべき定理を証明した．

定理 6.3 ([68, Corollary 5.2.6])． p を素数，$m \geq 1$ とする．Borel-Serre コンパクト化の境界の $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ 係数コホモロジー

$$H^i\bigl(X^{G,\mathrm{BS}}_{\widetilde{U}} \backslash X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\bigr)$$

への (p の外の) Hecke 作用の固有値の系は，$G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の尖点形式の空間への Hecke 作用の固有値の系の mod p^m として実現できる．

注． 定理 6.1 に応用する場合は，定数係数の場合だけでなく，$\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$-局所系 (保型表現 π の無限成分から定まる局所系 $\mathcal{F}$ を適当な $\mathbb{Z}_p$-格子をとってから mod p^m したもの) を係数とするコホモロジーも考える必要がある．p における開コンパクト部分群を十分小さくすることで係数が定数層の場合に帰着できるので，定理 6.3 の主張は定数係数の場合に証明しておけば応用上も十分である ([68, 5.4])．

ここで，Borel-Serre コンパクト化の境界のコホモロジーには，ある種の Eisenstein 級数 ("直和 $\pi \oplus \pi^\vee$ にあたるもの" など) も寄与する．したがって，定理 6.3 は

"境界のコホモロジーに寄与する Eisenstein 級数の Hecke 固有値は，
尖点形式の Hecke 固有値と mod p^m で合同である"

という主張を含む．このような結果は，少なくとも楕円保型形式に対しては古くより研究されており，岩澤理論などに応用を持つことがよく知られている ([61], [54])．

定理 6.3 の適用範囲はそれにとどまらない．一般に，$H^i\bigl(X^{G,\mathrm{BS}}_{\widetilde{U}} \backslash X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\bigr)$ のような mod p^m 係数コホモロジーには，古典的な保型形式からは来ないようなコホモロジー類が大量に含まれているからである．専門家の間では，

"ほとんどの mod p^m 係数コホモロジー類は保型形式から来ないだろう"

という予想さえあるようである (例えば [7], [15] を参照)．

今日まで，局所対称空間の mod p^m 係数コホモロジーを系統的に研究する手法は，ほとんど知られていなかった．定理 6.3 のような一般的な結果が専門家の間でどの程度予想されていたか著者は知らないが，いずれにせよ，定理 6.3 が今後の保型形式・保型表現の整数論的研究に大きな影響を与える結果であることは間違いないだろう．([68] の表題が，"On Galois representations..." ではなく "On torsion..." となっていることに注目されたい．)

§6.5. 定理 6.3 ⇒ 定理 6.1

ここでは定理 6.3 から定理 6.1 がどのように導かれるかを説明する．実際に証明を書くとかなりややこしくなるが，基本的には，この部分は標準的な議論の積み重ねである．

$p=\ell$ とおく．定理 6.3 より，各 $m\geq 1$ に対し，“直和 $\pi\oplus\pi^\vee$ にあたるもの” (放物誘導) と mod ℓ^m で合同な Hecke 固有値の系を持つ $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現 Π_m の存在が示される．

現在では，$G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点的保型表現 Π に対して，Π に伴う ℓ 進 Galois 表現が構成されている．というのも，準分裂古典群の保型表現の分類定理 ([1], [55]) により，次のような主張が証明できるからである (正確な主張は [68, Theorem 5.1.2] を参照):

- 正整数 $n_1,\ldots,n_r\geq 1$ と $\mathrm{GL}_{2n_i}(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 π_i であって，次をみたすものが存在する．
  - F が総実の場合は $n_1+\cdots+n_r=2n+1$ (F が CM 体の場合は $n_1+\cdots+n_r=2n$)
  - π_i は $\mathrm{GL}_{2n_i}(\mathbb{A}_F)$ の自己双対的な尖点的保型表現である．
  - Π に伴う ℓ 進 Galois 表現は，$\pi_1,\ldots,\pi_r$ に伴う ℓ 進 Galois 表現の直和である．

各 $m\geq 1$ に対して Π_m に伴う ℓ 進 Galois 表現が存在するから，擬表現を用いることで，“直和 $\pi\oplus\pi^\vee$ にあたるもの” に伴う $2n+1$ 次元 (F が CM 体の場合は $2n$ 次元) の ℓ 進 Galois 表現が構成できる．さらにもう少し議論をすると — “分割統治” (divide and conquer) により — その中から π に伴う n 次元の ℓ 進 Galois 表現を切り出すことができる ([68, 5.3])．

§6.6. コンパクト台付き mod p^m 係数コホモロジーへの帰着

定理 6.3 は局所対称空間の Borel-Serre コンパクト化という代数多様体でない位相空間 (角を持つ実多様体) の mod p^m 係数コホモロジーに関するものなので，そのままでは扱いにくい．次のような簡単な議論により，志村多様体のコンパクト台付き mod p^m 係数コホモロジーに関する主張に帰着させることができる．

補題 6.4. すべての i について，志村多様体 $X^G_{\widetilde{U}}$ のコンパクト台付き mod p^m 係数コホモロジー

$$H^i_c\big(X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\big)$$

への Hecke 作用の固有値の系が $G(\mathbb{A}_\mathbb{Q})$ の尖点形式の空間への Hecke 作用の固有値の系の mod p^m として実現できるなら，定理 6.3 が成り立つ．

証明. $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーに関する長完全列

$$\begin{aligned}\longrightarrow\quad H^i_c\big(X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\big)\quad &\longrightarrow H^i\big(X^{G,\mathrm{BS}}_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\big)\\ \longrightarrow H^i\big(X^{G,\mathrm{BS}}_{\widetilde{U}}\backslash X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\big) &\longrightarrow H^{i+1}_c\big(X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\big)\longrightarrow\end{aligned}$$

を使う．包含写像 $j^{G,\mathrm{BS}}_{\widetilde{U}}$ はホモトピー同値なので $X^{G,\mathrm{BS}}_{\widetilde{U}}$ のコホモロジーは $X^G_{\widetilde{U}}$ のコホモロジーと同一視できる:

$$H^i\big(X^{G,\mathrm{BS}}_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\big)\ \cong\ H^i\big(X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\big).$$

これらの写像は Hecke 作用と両立するから，志村多様体のコホモロジー $H^i\bigl(X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\bigr)$ と，コンパクト台付きコホモロジー $H^i_c\bigl(X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\bigr)$ への Hecke 作用について定理 6.3 の主張が示されれば，境界のコホモロジー $H^i\bigl(X^{G,\mathrm{BS}}_{\widetilde{U}}\backslash X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\bigr)$ に対しても示される．Poincaré 双対定理より，コンパクト台付きコホモロジーに対する主張が (すべての i について) 分かれば十分である． $\square$

コンパクト台付きコホモロジー $H^i_c\bigl(X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\bigr)$ は数論幾何の世界の不変量である (その定義には Borel-Serre コンパクト化のような代数多様体でない位相空間を持ち出す必要はない)．代数多様体の mod p^m 係数コホモロジーの研究は困難なことが多く，これで問題が簡単になったとはとても言えないのだが，定理 6.3 を数論幾何の世界の問題に帰着することはできた．

§6.7. 無限レベルの志村多様体・Hodge-Tate 周期写像

§6.6 までの議論により，定理 6.3 の証明のためには，志村多様体 $X^G_{\widetilde{U}}$ のコンパクト台付き mod p^m 係数コホモロジー $H^i_c\bigl(X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\bigr)$ への Hecke 作用を，$G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の尖点形式の空間への Hecke 作用と結びつければよいことが分かる．これは，すなわち，

"mod p^m 係数コホモロジー類と尖点形式の間の mod p^m での合同"

の構成問題である．このような問題は難しすぎて手が付けられないことも多いのだが，Scholze は，perfectoid 空間論を鮮やかに応用することで，これを解決した．実際に Scholze が証明したのは，次のような主張である:

> $H^i_c\bigl(X^G_{\widetilde{U}},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\bigr)$ への Hecke 作用の固有値の系は，p における開コンパクト部分群を十分小さくすることにより (p におけるレベルを十分上げることにより)，$G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の尖点形式の空間への Hecke 作用の固有値の系の mod p^m として実現できる．

(こうした "p におけるレベルの不定性" は保型形式の合同の研究によく現れる自然な現象であり，それ自体は珍しいものではない．)

Scholze による証明のポイントは

- 無限レベルの志村多様体が，perfectoid 空間とみなせることと
- 無限レベルの志村多様体上に定義される Hodge-Tate 周期写像を用いることで，コホモロジーの具体的な計算 (Čech コホモロジーによる almost な計算) が可能になること

である．有限レベルの志村多様体の mod p^m 係数コホモロジーは難しくて手が付けられない．しかし，p におけるレベルをどんどん上げた "極限" をとると，志村多様体が perfectoid 空間という "単純な構造" を持つことが分かり，そのコホモロジーが制御可能となるのである．計算の鍵である Hodge-Tate 周期写像は，無限レベルの志村多様体上で定義される写像であり，有限レベルには落ちてこない p 進解析的写像である．

記号をいくつか導入する．まず，$G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$ の開コンパクト部分群 $\widetilde{U}$ として，p 部分とそれ以外の直積に分かれているものをとる:

$$\widetilde{U} = \widetilde{U}_p \times \widetilde{U}^p \ \subset \ G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) = G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{A}^p_{\mathbb{Q},f}).$$

p の外の開コンパクト部分群 $\widetilde{U}^p$ として，十分小さいものを一つ選んで固定する．p における開コンパクト部分群 $\widetilde{U}_p$ をどんどん小さくしていったときのコンパクト台付き mod p^m 係数コホモロジーの帰納極限を

$$\widetilde{H}^i_c(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \ := \ \varinjlim_{\widetilde{U}_p} H^i_c\big(X^G_{\widetilde{U}_p \times \widetilde{U}^p},\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}\big)$$

とおく．志村多様体 $X^G_{\widetilde{U}}$ には，Borel-Serre コンパクト化とは別に，“極小コンパクト化” (あるいは “Baily-Borel-佐武コンパクト化”) と呼ばれるコンパクト化が存在する ([29], [52]):

$$j^{G,\min}_{\widetilde{U}}\colon X^G_{\widetilde{U}} \ \hookrightarrow \ X^{G,\min}_{\widetilde{U}}.$$

極小コンパクト化 $X^{G,\min}_{\widetilde{U}}$ は射影的代数多様体になる．$X^{G,\min}_{\widetilde{U}}$ は保型形式の代数幾何的研究において自然に現れる代数多様体だが，一般には，包含写像 $j^{G,\min}_{\widetilde{U}}$ はホモトピー同値でなく $X^{G,\min}_{\widetilde{U}}$ は特異点を持つため，$X^{G,\min}_{\widetilde{U}}$ のコホモロジーの直接の研究は困難である．通常は，他のコンパクト化の理論も併用して研究することが多いようである．(志村多様体の種々のコンパクト化とそのコホモロジーの比較 (特に Zucker 予想) については [36] を参照．)

$\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の p 進完備化を C とおく．極小コンパクト化 $X^{G,\min}_{\widetilde{U}}$ を C 上の代数多様体とみなし，それに伴う adic 空間を $(X^{G,\min}_{\widetilde{U}})^{\mathrm{ad}}$ とおく．斜交群への $\mathbb{Q}$ 上の埋め込み

$$G \ \hookrightarrow \ \mathrm{Sp}_{2g}$$

であって，Hermite 対称領域の構造と両立するものを一つ固定する ([24, §1.3], [64])．$\mathscr{F}\ell_{2g}$ を Sp_{2g} の旗多様体とする．すなわち，$2g$ 次元線形空間 $\mathbb{Q}_p^{2g}$ に非退化交代形式を 1 つ固定し，$\mathbb{Q}_p^{2g}$ に含まれる全等方的な g 次元部分空間のなす代数多様体を $\mathscr{F}\ell_{2g}$ とする．Plücker 埋め込み

$$\mathscr{F}\ell_{2g} \hookrightarrow \mathbb{P}^N_{\mathbb{Q}_p}, \qquad N = \binom{2g}{g} - 1$$

により $\mathscr{F}\ell_{2g}$ は $\mathbb{Q}_p$ 上の射影的代数多様体となる．$\{s_J\}_{J\subset\{1,\ldots,2g\},|J|=g}$ を射影座標とする．$\mathscr{F}\ell_{2g}$ に伴う adic 空間を $\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g}$ とおき，

$$\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g,J} := \big\{(s_J) \in \mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g} \ \big|\ |s_J| \le |s_{J'}|\ (\forall J' \subset \{1,\ldots,2g\},\ |J'| = g)\big\}$$

とおく．$\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g,J} \subset \mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g}$ はアフィノイド開集合である．次のような開被覆が得られる:

$$\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g} \ := \bigcup_{J\subset\{1,\ldots,2g\},\ |J|=g} \mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g,J}$$

例 6.5. $F=\mathbb{Q}$ の場合は，斜交群への埋め込みとして恒等写像をとることができる．さらに $g=1$ の場合 (モジュラー曲線の場合) は，$\mathscr{F}\ell_2=\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p}$ (射影直線) であり，

$$\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2,\{1\}}=\bigl\{z\in(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}}\bigm| |z|\le 1\bigr\},$$
$$\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2,\{2\}}=\bigl\{z\in(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}}\bigm| |z|\ge 1\bigr\}\cup\{\infty\}$$

となる．$(\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_p})^{\mathrm{ad}}=\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2,\{1\}}\cup\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2,\{2\}}$ は，射影直線を単位円板の “内側” と “外側” で覆うという開被覆である．

Scholze は，adic 空間 $(X^{G,\min}_{\widetilde{U}})^{\mathrm{ad}}$ の射影極限が perfectoid 空間とみなせることを証明した．また，射影極限において，Hodge-Tate 周期写像と呼ばれる p 進解析的写像 (adic 空間の射) を構成した．正確に言うと，Scholze が証明したのは，Siegel モジュラー多様体の場合 ($G=\mathrm{Sp}_{2g}$ の場合) である．G が “Hodge 型” の志村多様体を定める場合は，Siegel モジュラー多様体の極小コンパクト化の中で $X^{G,\min}_{\widetilde{U}}$ の像を考えることで，類似の主張を証明することができる (詳しくは [70, Corollary 5.1] を参照).

定理 6.6 ([68, Theorem 4.1.1], [70, Theorem 4.1])**.** $G=\mathrm{Sp}_{2g}$ とする．

1. perfectoid 空間 $X^{G,\min}_{p^\infty}$ であって，

$$X^{G,\min}_{p^\infty}\ \sim\ \varprojlim_{\widetilde{U}_p}(X^{G,\min}_{\widetilde{U}})^{\mathrm{ad}}$$

をみたすものが存在する．右辺は p における開コンパクト部分群 ($\widetilde{U}=\widetilde{U}_p\times\widetilde{U}^p$ と書いたときの $\widetilde{U}_p$) を小さくしていったときの射影極限を表す．(“$\sim$” については定理 4.2 の証明を参照．)

2. Hodge-Tate 周期写像と呼ばれる adic 空間の射

$$\pi_{\mathrm{HT}}\colon X^{G,\min}_{p^\infty}\ \longrightarrow\ \mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g}$$

が存在する．$G(\mathbb{Q}_p)$ は $X^{G,\min}_{p^\infty}$ にも $\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g}$ にも作用し，π_{HT} は $G(\mathbb{Q}_p)$ の作用について同変である．さらに，任意の $J\subset\{1,\dots,2g\}$ ($|J|=g$) に対し，逆像

$$\pi^{-1}_{\mathrm{HT}}(\mathscr{F}\ell^{\mathrm{ad}}_{2g,J})$$

はアフィノイド perfectoid 空間になる．

定理 6.6 は Scholze の論文 ([68]) の核心であり，その証明を解説することは著者の能力を遥かに超える．アイデアは明瞭で幾何的描像は単純なのだが，証明の技術的細部は込み入っている．重要と思われるポイントのうちのいくつかを大雑把に紹介することで，ご容赦いただきたい．(興味のある読者は [68] に挑戦していただきたい．)

- ([68, Theorem 3.2.36]) まず，p 可除群の標準部分群 (canonical subgroup) の理論 ([68, Theorem 3.2.15]) により，Siegel モジュラー多様体の逆極限のうち "反標準塔" (anti-canonical tower) と呼ばれる領域が perfectoid 空間になることを示す．(正確には，後述の "貼り合わせ" のための "糊代" として，反標準塔の十分小さな真の近傍 (strict neighborhood) が perfectoid 空間になることを示す．) この結果を，Riemann の特異点除去定理 (Riemann's Hebbarkeitssatz) の perfectoid 空間版 (Scholze 自身による) を用いて，反標準塔のコンパクト化の境界に延長する．(標準部分群の理論の p 進保型形式への応用はよく知られている ([41])．伝統的な p 進保型形式の理論においては志村多様体の "標準塔" (井草塔とも呼ばれる) を用いるのに対し，Scholze の方法は，反標準塔 (標準塔の反対側) を用いる点に特徴がある．雰囲気を説明すると，p におけるレベル構造をどんどん付けることで得られる志村多様体の塔は，"Frobenius 写像に近い" 部分と，それ以外の部分に分かれる (例えばモジュラー曲線の被覆 $X_0(p) \to X_0(1)$ を考えよ)．このうち，"Frobenius 写像に近い" 部分が反標準塔である．反標準塔で逆極限をとることは，志村多様体に対して "座標の p^m 乗根をどんどん付け加える" ことに相当するから，perfectoid 空間が得られるという仕組みである．)

- ([68, Lemma 3.3.4]) 次に，Siegel モジュラー多様体の内部 (コンパクト化の境界を除いた部分) において，Hodge-Tate 周期写像が底空間に誘導すべき写像 $|\pi_{\mathrm{HT}}|$ を構成する．点のレベルでは，アーベル多様体の Hodge-Tate フィルトレーションを対応させる写像であり，構成は難しくない．なお，この時点では連続写像 $|\pi_{\mathrm{HT}}|$ が構成されているだけで，射 π_{HT} はまだ構成されていないことに注意．

- ([68, Corollary 3.3.12]) 写像 $|\pi_{\mathrm{HT}}|$ による行き先を見ながら反標準塔 (の真の近傍) に $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_p)$ を作用させていくことで，無限レベルの Siegel モジュラー多様体の全体が，コンパクト化の境界も含めて perfectoid 空間になることを示す．ポイントは，あるアフィノイド開集合が "perfectoid 空間である" という性質が，$\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_p)$ の作用で保たれることである．別の見方をすれば，反標準塔のコピーを p における Hecke 作用素で "貼り合わせていく" ことで，Siegel モジュラー多様体の全体を再構成する．この部分の議論は，p 進保型形式を U_p-作用素で貼り合わせていくというおなじみの議論 (例えば [13], [47]) を彷彿とさせるものであり，Scholze による構成の要である．

- ([68, Corollary 3.3.13]) 最後に，$|\pi_{\mathrm{HT}}|$ の構成と同じ議論をもう一度行い，Hodge-Tate 周期写像 π_{HT} を，今度は adic 空間の射として構成する．

注． Hodge-Tate 周期写像 π_{HT} が鍵である．定理 6.6 はモジュラー曲線の場合でさえ新結果である．無限レベルの志村多様体上に，このような簡明な p 進解析的写像が存在することは驚きであり，今後も様々な応用が期待される．(無限レベルに移行することで簡明な p 進解析的構造が現れるという意味では，岩澤理論や明示的相互法則 (explicit reciprocity law) にも近いかもしれない．) ここでは説明することはできないが，π_{HT} は無限レベルの Rapoport-Zink 空間の Faltings-Fargues 同型 ([31], [71]) とも深い関係があ

る．ただし，Faltings-Fargues 同型と異なり，π_{HT} は志村多様体の全体 (コンパクト化の境界も含む) で定義されている．Rapoport-Zink 空間による p 進一意化理論 ([60]) では扱えていない領域もカバーしているという意味で，π_{HT} は興味深い写像である．

§ 6.8. 定理 6.3 の証明の方針

定理 6.3 の証明の方針を説明する．一言で言えば，mod p^m 係数コホモロジーを，種々のコホモロジーの (almost) 同型定理を使って他の空間とつなげていって，最終的に尖点形式の空間とつなげることである．

ステップ 1 — 比較同型の応用

極小コンパクト化の境界 $X_{\widetilde{U}}^{G,\min}\backslash X_{\widetilde{U}}^{G}$ の射影極限として，perfectoid 空間のレベルでも境界 $Z \subset X_{p^\infty}^{G,\min}$ を定めることができる．境界 Z のイデアル層を $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X_{p^\infty}^{G,\min}}$ とおき，その整部分を

$$\mathcal{I}^+ := \mathcal{I} \cap \mathcal{O}^+_{X_{p^\infty}^{G,\min}}$$

とおく．大雑把に言えば，$\mathcal{I}$ の切断は無限レベルの志村多様体上の尖点形式に対応し，$\mathcal{I}^+$ の切断はそのうち “p を分母を持たない” ものに対応する．

志村多様体 $X_{\widetilde{U}}^{G}$ 上の自明な局所系 $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ の極小コンパクト化 $X_{\widetilde{U}}^{G,\min}$ への零延長

$$(j_{\widetilde{U}}^{G,\min})_!(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$$

に対して比較同型 (定理 5.1) を適用する．境界について少し議論をすることで，p の外の Hecke 作用と両立する $\mathcal{O}_C$ 加群の almost 同型

$$\widetilde{H}_c^i(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}} \mathcal{O}_C/p^m \;\cong_a\; H^i\big((X_{p^\infty}^{G,\min})_{\text{ét}}, \mathcal{I}^+/p^m\big)$$

が証明できる ([68, Theorem 4.2.1])．

こうして問題は，無限レベルの志村多様体 $X_{p^\infty}^{G,\min}$ の $\mathcal{I}^+/p^m$ を係数とするエタール・コホモロジーへの Hecke 作用の問題に帰着される．

ステップ 2 — Hodge-Tate 周期写像の応用

次は Hodge-Tate 周期写像 π_{HT} の応用である．定理 6.6 より，有限個のアフィノイド perfectoid 空間による開被覆

$$X_{p^\infty}^{G,\min} \;=\; \bigcup_{J\subset\{1,\ldots,2g\},\,|J|=g} \pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(\mathscr{F}\ell_{2g,J}^{\mathrm{ad}})$$

が得られる．この開被覆は p の外の Hecke 作用で保たれることが，π_{HT} の構成から分かる．

Čech コホモロジーを用いてエタール・コホモロジー

$$H^i\big((X_{p^\infty}^{G,\min})_{\text{ét}}, \mathcal{I}^+/p^m\big)$$

を almost に計算する．アフィノイド perfectoid 空間の高次コホモロジーが (almost に) 消えることを用いることで，問題は，各アフィノイド perfectoid 空間上の大域切断の空間

$$H^0\big(\pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(\mathscr{F}\ell_{2g,J}^{\mathrm{ad}}), \mathcal{I}^+/p^m\big)$$

への p の外の Hecke 作用の問題に帰着される．(本当は個々の $\pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(\mathscr{F}\ell_{2g,J}^{\mathrm{ad}})$ だけでなく，それらの共通部分も考察する必要があるが，以下の議論は同様なので省略する．)

注． この部分の議論は，アフィノイド perfectoid 空間 $\pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(\mathscr{F}\ell_{2g,J}^{\mathrm{ad}})$ が，無限レベルの志村多様体 $X_{p^\infty}^{G,\min}$ の “finite good cover” ([11, I, §5], [85]) を与えていると考えることもできるかもしれない．$X_{p^\infty}^{G,\min}$ がこのような “単純な構造” を持つことが，そのコホモロジーが制御可能であることの根拠である．p 進保型形式の理論が存在する理由とも関係していると思われる．

ステップ 3 — 擬 Hasse 不変量の応用

このステップでは，アフィノイド perfectoid 空間 $\pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(\mathscr{F}\ell_{2g,J}^{\mathrm{ad}})$ 上の大域切断の話を，有限レベルの志村多様体の形式モデルの話に落とす．

以下の事実を用いる:

- ([68, Theorem 4.1.1 (i)]) アフィノイド perfectoid 空間 $\pi_{\mathrm{HT}}^{-1}(\mathscr{F}\ell_{2g,J}^{\mathrm{ad}})$ は，有限レベルの志村多様体のアフィノイド開集合の逆像として書ける．
- ([68, Theorem 4.1.1 (v)]) 旗多様体上の直線束 $\mathcal{O}_{\mathscr{F}\ell_{2g}^{\mathrm{ad}}}(1)$ の Hodge-Tate 周期写像 π_{HT} による引き戻しは，志村多様体上の Hodge 束 ω (切断が重さ 1 の正則保型形式となる直線束) と同型である．

p における開コンパクト部分群 $\widetilde{U}_p$ を十分小さくとる．志村多様体 $X_{\widetilde{U}_p\times\widetilde{U}^p}^{G,\min}$ の形式モデル $\mathfrak{X}$ と，$\mathfrak{X}$ 上の Hodge 束 ω の切断 $\overline{s}$ をうまくとることで，考えるべき空間は $\overline{s}$ が可逆な領域上の大域切断の空間

$$H^0\big(\mathfrak{X}\backslash(\overline{s}=0), \mathcal{I}^+/p^m\big)$$

となる．($\overline{s}$ は旗多様体上の豊富な直線束 $\mathcal{O}_{\mathscr{F}\ell_{2g}^{\mathrm{ad}}}(1)$ の切断を，π_{HT} で引き戻すことにより構成される．$\overline{s}$ は p の外の Hecke 作用で不変な切断である．$\overline{s}$ を擬 Hasse 不変量 (fake Hasse invariant) という．)

この空間は $\overline{s}$ のベキをどんどん掛けていった帰納極限

$$\varinjlim_{k,\ \eta\mapsto\overline{s}\otimes\eta} H^0\big(\mathfrak{X}, \omega^k\otimes\mathcal{I}^+/p^m\big)$$

に等しいから，十分大きな k について，形式スキーム $\mathfrak{X}$ 上の連接層の大域切断の空間

$$H^0\big(\mathfrak{X}, \omega^k\otimes\mathcal{I}^+/p^m\big)$$

への p の外の Hecke 作用の問題に帰着される．空間 $H^0\big(\mathfrak{X}, \omega^k\otimes\mathcal{I}^+/p^m\big)$ は有限レベルの志村多様体上の mod p^m 尖点形式の空間とみなせる．こうして問題は，古典的な保型形式論の範疇の問題に帰着される．

注． この部分の議論は，mod p で 1 に合同な Eisenstein 級数を掛けることで楕円保型形式の合同を構成するという古典的な議論に似ている (例えば [27, §6.9]．志村多様体上の古典的な Hasse 不変量については [68, Lemma 3.2.5], [41], [35] などを参照)．Eisenstein 級数の代わりに擬 Hasse 不変量 — その構成には Hodge-Tate 周期写像が用いられる — を用いるという意味で，Scholze の方法は超越的・p 進解析的である．

ステップ 4 — mod p^m 保型形式の標数 0 への持ち上げ

最後のステップは古典的な代数幾何である．Hodge 束 ω が豊富な直線束であることを用いる ([29, V, Theorem 2.5])．このステップの議論は保型形式の代数幾何的研究ではよく知られたものである．

ω は豊富なので，十分大きな k に対して

$$H^1\big(\mathfrak{X}, \omega^k \otimes \mathcal{I}^+\big) = 0$$

となる．形式スキーム $\mathfrak{X}$ 上の連接層の完全列

$$0 \longrightarrow \omega^k \otimes \mathcal{I}^+ \xrightarrow{p^m} \omega^k \otimes \mathcal{I}^+ \longrightarrow \omega^k \otimes \mathcal{I}^+/p^m \longrightarrow 0$$

に伴う長完全列より，

$$H^0\big(\mathfrak{X}, \omega^k \otimes \mathcal{I}^+\big) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}/p^m \;\cong\; H^0\big(\mathfrak{X}, \omega^k \otimes \mathcal{I}^+/p^m\big) \tag{6.1}$$

を得る．同型 (6.1) は，有限レベルの志村多様体上の mod p^m 尖点形式が，標数 0 の尖点形式に持ち上がることを意味する．同型 (6.1) を用いることで，これまでの議論で考察した様々な空間への p の外の Hecke 作用の固有値の系が，尖点形式の空間への Hecke 作用の固有値の系の mod p^m として実現できることが分かり，定理 6.3 が証明される．

長い道のりであったが，こうして定理 6.1 の証明が完結する．

注． 以上の議論からも分かるように，定理 6.3 における $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ の尖点形式のレベル (p における開コンパクト部分群 $\widetilde{U}_p$) は十分小さく，また，その重さ k は十分大きい．$\widetilde{U}_p$ や k を具体的に求める (あるいは具体的に評価する) ことは非常に興味深い問題であろう．しかし，そのためには，議論の途中に現れる種々の p 進解析的対象 — Hodge-Tate 周期写像やそれを用いて構成される擬 Hasse 不変量・整モデル (形式スキーム) など — についての定量的な情報 (収束半径など) を得る必要があり，一筋縄ではいかないように思われる．局所対称空間の mod p^m 係数コホモロジーの研究は，通常 (ordinary) 保型形式の肥田理論 ([40], [41]) のようにはいかないだろう．

§ 6.9. 局所対称空間の mod p 係数コホモロジー

Scholze は，定理 6.3 の証明と同様の方法で，mod p^m 係数コホモロジーの射影極限における消滅定理も証明している．

定理 6.7 ([68, Corollary 4.2.2]). 志村多様体 $X_{\widetilde{U}}^{G}$ の代数多様体としての次元を d とおく．$i > d$ なら，

$$\widetilde{H}_c^i(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}) = 0$$

が成り立つ．

定理 6.7 の主張や証明を，実対称空間 (特に Hermite 対称領域) の算術商における消滅定理 (例えば [84, Theorem 8.1]) と比較すると面白いだろう．

$\widetilde{H}_c^i(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$ の射影極限

$$\widetilde{H}_c^i(\mathbb{Z}_p) := \varprojlim_m \widetilde{H}_c^i(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})$$

は完備化コホモロジー (completed cohomology) と呼ばれる，保型形式の p 進解析族の理論における基本的な研究対象である ([15])．定理 6.7 から完備化コホモロジーの消滅定理が導かれ，[15] の予想のうちのいくつかが解決される．

また，定理 6.1 の証明の過程で，次の定理が証明されていることは注目に値する．

定理 6.8 ([68, Corollary 5.4.3]). p を素数，$n \geq 2$ とする．F を総実代数体または CM 体とし，

$$X_U^{\mathrm{GL}_n} = \mathrm{GL}_n(F) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)/(U_\infty \times U)$$

を $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathrm{GL}_n$ の局所対称空間とする．$X_U^{\mathrm{GL}_n}$ の mod p 係数コホモロジー

$$H^i\big(X_U^{\mathrm{GL}_n}, \overline{\mathbb{F}}_p\big)$$

への Hecke 作用の固有値の系に対し，それに伴う mod p Galois 表現

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

が存在する．

定理 6.8 の特筆すべきところは，

- ($n = 2$ で F が総実の場合を除き) 局所対称空間 $X_U^{\mathrm{GL}_n}$ は代数多様体ではないので，そのコホモロジーを代数幾何・数論幾何の手法で直接研究することはできず，
- mod p 係数コホモロジー類の中には，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の保型表現から来ないものが大量に存在する

にも関わらず，$\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathrm{Sp}_{2n}$ (や $\mathrm{Res}_{F^+/\mathbb{Q}} \mathrm{U}(n,n)$) の志村多様体の境界のコホモロジーを援用することで，Galois 表現 ρ が構成できることである．

局所対称空間の mod p 係数コホモロジー類と Galois 表現の関係については，数値実験に基づく Grunewald や Ash による予想があったが ([2], [3])，理論的根拠には乏し

かったようである．今後，Scholze による定理 6.8 は，今はまだ一般には定式化すらされていない “mod p 大域 Langlands 対応” への重要な一歩となるだろう．

謝辞

adic 空間論や perfectoid 空間論に対する著者の理解・知識は，集中講義「リジッド空間のエタールコホモロジー」 (2011 年 11 月, 京大理) と研究集会「p 可除群とそのモジュライ空間に関する最近の進展」(2013 年 5 月, 京大理) において著者が学んだことにほとんど含まれています．集中講義の講師であり，上記の研究集会の主催者である三枝洋一氏 (東大数理) に感謝します．また，perfectoid 空間論の基礎や， Rigid 幾何学，モジュラー曲線の幾何学についていろいろとご教示いただいた津嶋貴弘氏 (千葉大理) に感謝します．研究集会「代数的整数論とその周辺」における講演の機会を頂いた世話人の皆様と有益なコメントを多数いただいた査読者の皆様には，深く感謝すると共に，原稿の執筆・改訂が大変遅れてしまったことを深くお詫びします．

参考文献

[1] Arthur, J., The endoscopic classification of representations. Orthogonal and symplectic groups, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, **61**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.

[2] Ash, A., Galois representations and cohomology of $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$, *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris (1989-90)*, 9-22, *Progr. Math.*, **102**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992.

[3] Ash, A., Galois representations attached to mod p cohomology of $\mathrm{GL}(n, \mathbf{Z})$, *Duke Math. J.* **65** (1992), no. 2, 235-255.

[4] Barnet-Lamb, T., Geraghty, D., Harris, M., Taylor, R., A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **47** (2011), no. 1, 29-98.

[5] Barnet-Lamb, T., Gee, T., Geraghty, D., Taylor, R., Potential automorphy and change of weight, *Ann. of Math.* (2) **179** (2014), no. 2, 501-609.

[6] Beilinson, A., p-adic periods and derived de Rham cohomology, *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2012), no. 3, 715-738.

[7] Bergeron, N., Venkatesh, A., The asymptotic growth of torsion homology for arithmetic groups, *J. Inst. Math. Jussieu* **12** (2013), no. 2, 391-447.

[8] Bhatt, B.. Scholze, P., The pro-étale topology for schemes, to appear in *Proceedings of the conference in honour of Gérard Laumon (2013).*

[9] Bierstone, E., Milman, P. D., Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant, *Invent. Math.* **128** (1997), no. 2, 207-302.

[10] Borel, A., Serre, J.-P., Corners and arithmetic groups, Avec un appendice: Arrondissement des variétés à coins, par A. Douady et L. Hérault., *Comment. Math. Helv.* **48** (1973), 436-491.

[11] Bott, R., Tu, L. W., Differential forms in algebraic topology, *Graduate Texts in Mathematics*, **82**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. xiv+331 pp.

[12] Boyer, P. Conjecture de monodromie-poids pour quelques variétés de Shimura unitaires, *Compos. Math.* **146** (2010), no. 2, 367-403.

[13] Buzzard, K., Analytic continuation of overconvergent eigenforms, *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 1, 29-55.
[14] Buzzard, K., Gee, T., The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations, to appear in the conference proceedings for the LMS/EPSRC Durham Symposium "Automorphic Forms and Galois Representations (2011)", `arXiv:1009.0785`.
[15] Calegari, F., Emerton, M., Completed cohomology – a survey, *Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory*, 239-257, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **393**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.
[16] Chenevier, G., The p-adic analytic space of pseudocharacters of a profinite group, and pseudorepresentations over arbitrary rings, to appear in *Proceedings of the LMS Durham Symposium* 2011.
[17] Chenevier, G., Harris, M., Construction of automorphic Galois representations, II, *Camb. J. Math.* **1** (2013), no. 1, 53-73.
[18] Chojecki, P., On $\bmod p$ non-abelian Lubin-Tate theory for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, *Compos. Math.* **151** (2015), no. 8, 1433-1461.
[19] Clozel, L., Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité, *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Vol. I (Ann Arbor, MI, 1988), 77-159, *Perspect. Math.*, **10**, Academic Press, Boston, MA, 1990.
[20] Colmez, P., Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), no. 3, 331-439.
[21] de Jong, A. J., Smoothness, semi-stability and alterations, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **83** (1996), 51-93.
[22] Deligne, P., Théorie de Hodge. I, *Actes du Congrès International des Mathématiciens* (Nice, 1970), Tome **1**, 425-430. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
[23] Deligne, P., La conjecture de Weil. I, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **43** (1974), 273-307.
[24] Deligne, P., Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques, *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977)*, Part **2**, 247-289, *Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
[25] Deligne, P., La conjecture de Weil. II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* No. **52** (1980), 137-252.
[26] Deligne, P., Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique 0, *Representations of reductive groups over a local field*, 119-157, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984.
[27] Deligne, P., Serre, J.-P., Formes modulaires de poids 1, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 7 (1974), 507-530 (1975).
[28] Ekedahl, T., On the adic formalism, *The Grothendieck Festschrift*, Vol. II, 197-218, *Progr. Math.*, **87**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
[29] Faltings, G., Chai, C.-L., Degeneration of abelian varieties, With an appendix by David Mumford., *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* (3), **22**, Springer-Verlag, Berlin, 1990. xii+316 pp.
[30] Faltings, G., Almost étale extensions, *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques*, II. *Astérisque* No. **279** (2002), 185-270.
[31] Fargues, L., L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques, 1-325, *Progr. Math.*, **262**, Birkhäuser, Basel, 2008.

[32] Fontaine, J.-M., Wintenberger, J.-P., Le “corps des normes” de certaines extensions algébriques de corps locaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **288** (1979), no. 6, A367-A370.

[33] Fontaine, J.-M., Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d’après Peter Scholze), *Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012*, Exp. No. **1057**, *Astérisque* No. **352** (2013), 509-534.

[34] Fujiwara, K., Kato, F., Foundations of Rigid Geometry, a book to appear in Monographs in Mathematics, European Mathematical Society Publishing House. `arXiv:1308.4734`

[35] Goldring, W., Galois representations associated to holomorphic limits of discrete series, *Compos. Math.* **150** (2014), no. 2, 191-228.

[36] Goresky, M., Compactifications and cohomology of modular varieties, *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, 551-582, Clay Math. Proc., **4**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[37] Griffiths, P., Harris, J., Principles of algebraic geometry, Reprint of the 1978 original, *Wiley Classics Library*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. xiv+813 pp.

[38] Harris, M., Lan, K.-W., Taylor, R., Thorne, J., On the rigid cohomology of certain Shimura varieties, `arXiv:1411.6717` (December 2013 version).

[39] Hattori, S., Ramification theory and perfectoid spaces, *Compos. Math.* **150** (2014), no. 5, 798-834.

[40] Hida, H., Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, *Invent. Math.* **85** (1986), no. 3, 545-613.

[41] Hida, H., p-adic automorphic forms on Shimura varieties, *Springer Monographs in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2004. xii+390 pp.

[42] Huber, R., Etale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces, *Aspects of Mathematics*, **E30**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1996. x+450 pp.

[43] Huber, R. A finiteness result for direct image sheaves on the étale site of rigid analytic varieties, *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), no. 2, 359-403.

[44] Illusie, L., Autour du théorème de monodromie locale, *Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988). Astérisque* No. **223** (1994), 9-57.

[45] Ito, T., Weight-monodromy conjecture over equal characteristic local fields, *Amer. J. Math.* **127** (2005), no. 3, 647-658.

[46] Jannsen, U., Continuous étale cohomology, *Math. Ann.* **280** (1988), no. 2, 207-245.

[47] Kassaei, P. L., A gluing lemma and overconvergent modular forms, *Duke Math. J.* **132** (2006), no. 3, 509-529.

[48] Kazhdan, D., Representations of groups over close local fields, *J. Analyse Math.* **47** (1986), 175-179.

[49] Kiehl, R., Weissauer, R., Weil conjectures, perverse sheaves and l’adic Fourier transform, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete.* **3**. Folge. A, *Series of Modern Surveys in Mathematics*, **42**, Springer-Verlag, Berlin, 2001. xii+375 pp.

[50] Kisin, M., Crystalline representations and F-crystals, *Algebraic geometry and number theory*, 459-496, *Progr. Math.*, **253**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[51] Kudla, S. S., From modular forms to automorphic representations, *An introduction to the Langlands program (Jerusalem, 2001)*, 133-151, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.

[52] Lan, K.-W., Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties, *London Mathematical Society Monographs Series*, **36**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2013. xxvi+561 pp.

[53] Langlands, R. P., On the functional equations satisfied by Eisenstein series, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **544**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. v+337 pp.

[54] Mazur, B., Wiles, A., Class fields of abelian extensions of $\mathbf{Q}$, *Invent. Math.* **76** (1984), no. 2, 179-330.
[55] Mok, C. P., Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* **235** (2015), no. 1108.
[56] Mokrane, A., La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato, *Duke Math. J.* **72** (1993), no. 2, 301-337.
[57] Morel, S., Construction de représentations galoisiennes de torsion (d'après Peter Scholze), *Séminaire Bourbaki. Vol. 2014/2015*, Exp. No. **1102**.
[58] Patrikis, S., Taylor, R., Automorphy and irreducibility of some l-adic representations, *Compos. Math.* **151** (2015), no. 2, 207-229.
[59] Rapoport, M., Zink, T., Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik, *Invent. Math.* **68** (1982), no. 1, 21-101.
[60] Rapoport, M., Zink, T., Period spaces for p-divisible groups, *Annals of Mathematics Studies*, **141**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996. xxii+324 pp.
[61] Ribet, K. A., A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbf{Q}(\mu_p)$, *Invent. Math.* **34** (1976), no. 3, 151-162.
[62] Saito, T., Weight spectral sequences and independence of l, *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), no. 4, 583-634.
[63] Saito, T., Perfectoid spaces and the weight-monodromy conjecture, after Peter Scholze, *Acta Math. Vietnam.* **39** (2014), no. 1, 55-68.
[64] Satake, I., Holomorphic imbeddings of symmetric domains into a Siegel space, *Amer. J. Math.* 87 1965 425-461.
[65] Scholze, P., Perfectoid spaces, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **116** (2012), 245-313.
[66] Scholze, P., Perfectoid spaces: a survey, *Current developments in mathematics (2012)*, 193-227, Int. Press, Somerville, MA, 2013.
[67] Scholze, P., p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties, *Forum Math. Pi* **1** (2013), e1, 77 pp.
[68] Scholze, P., On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties, *Ann. of Math.* (2) **182** (2015), no. 3, 945-1066.
[69] Scholze, P., Perfectoid spaces and their Applications, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* 2014.
[70] Scholze, P., Perfectoid Shimura varieties, Jpn. J. Math. **11** (2016), no. 1, 15-32.
[71] Scholze, P., Weinstein, J., Moduli of p-divisible groups, *Camb. J. Math.* **1** (2013), no. 2, 145-237.
[72] Serre, J.-P., Cohomologie galoisienne, Fifth edition, *Lecture Notes in Mathematics*, **5**, Springer-Verlag, Berlin, 1994. x+181 pp.
[73] Serre, J.-P., Abelian l-adic representations and elliptic curves, With the collaboration of Willem Kuyk and John Labute, Revised reprint of the 1968 original. *Research Notes in Mathematics*, **7**, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1998. 199 pp.
[74] Shimura, G., An l-adic method in the theory of automorphic forms, the text of a lecture at the conference "Automorphic functions for arithmetically defined groups" (Oberwolfach, Germany, July 28-August 3, 1968), in *Collected Papers* II: 1967-1977, Springer Collected Works in Mathematics.
[75] Tate, J. T., p-divisible groups., *Proc. Conf. Local Fields* (Driebergen, 1966), 158-183, Springer, Berlin.
[76] Taylor, R., Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight, *Duke*

Math. J. **63** (1991), no. 2, 281-332.
[77] Taylor, R., Galois representations, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. I (Beijing, 2002), 449-474, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
[78] Taylor, R., Yoshida, T., Compatibility of local and global Langlands correspondences, *J. Amer. Math. Soc.* **20** (2007), no. 2, 467-493.
[79] Temkin, M., On local properties of non-Archimedean analytic spaces, *Math. Ann.* **318** (2000), no. 3, 585-607.
[80] Terasoma, T., Monodromy weight filtration is independent of l, `arXiv:math/9802051`, 1998.
[81] Tsuji, T., p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, *Invent. Math.* **137** (1999), no. 2, 233-411.
[82] 津嶋貴弘, Perfectoid 空間論の基礎, 本講究録別冊.
[83] Vezzani, A., A motivic version of the theorem of Fontaine and Wintenberger, `arXiv:1405.4548`, 2014.
[84] Vogan, D. A., Jr., Zuckerman, G. J., Unitary representations with nonzero cohomology, *Compos. Math.* **53** (1984), no. 1, 51-90.
[85] Weil, A., Sur les théorèmes de de Rham, *Comment. Math. Helv.* **26**, (1952). 119-145.
[86] Wiles, A., On ordinary λ-adic representations associated to modular forms, *Invent. Math.* **94** (1988), no. 3, 529-573.
[87] Wintenberger, J.-P., Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **16** (1983), no. 1, 59-89.
[88] Yoshida, H., Siegel's modular forms and the arithmetic of quadratic forms, *Invent. Math.* **60** (1980), no. 3, 193-248.
[89] Groupes de monodromie en géométrie algébrique. I, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **288**, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–1969 (SGA 7 I), Dirigé par A. Grothendieck. Avec la collaboration de M. Raynaud et D. S. Rim, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972, viii+523.