RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B64 (2017), 313–330

$\mathbf{Z}_p$-拡大の非アーベル岩澤理論 — 概説と展望*
(Non-abelian Iwasawa theory of $\mathbf{Z}_p$-extensions — overview and outlook)

By

尾崎 学 (Manabu Ozaki)**

Abstract

We will survey non-abelian Iwasawa theory of $\mathbf{Z}_p$-extensions, that is, theory of non-abelian restricted ramified extensions over $\mathbf{Z}_p$-extension fields of number fields.

§1. 序

表題中の「非アーベル岩澤理論」は，代数体の $\mathbf{Z}_p$-拡大体上の分岐を制限した非アーベル拡大を岩澤理論的な手法で考察するものである．謂わば，$\mathbf{Z}_p$-拡大の岩澤理論において,「作用される群の非可換化」を目指している．一方，近年著しい発展を見せている John Coates 氏，加藤和也氏によって創始された「非可換岩澤理論（non-commutative Iwasawa theory）」は，p-進 Lie 拡大体上の制限分岐アーベル拡大の岩澤理論であり,「作用する群の非可換化」である．

まず始めに非アーベル岩澤理論研究の動機について説明する．岩澤による $\mathbf{Z}_p$-拡大の岩澤理論創始の動機は，良く知られているように，有限次代数体のイデアル類群をより深く理解したいという，代数的整数論成立当初からの欲求にある．

有限次代数体 k のイデアル類群 Cl_k の構造は，一見すると有限アーベル群であるという事実以外には，無秩序に振舞う捉えどころのない対象であるように見える．一方，有

Received April 14, 2015. Revised February 7, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11R23, 11R32.
Key Words: *Iwasawa theory, non-abelian extensions, restricted ramification.*
Supported by JSPS KAKENHI 25400028.

*本論文は第 22 回整数論サマースクール「非可換岩澤理論」報告集に掲載された報文「$\mathbf{Z}_p$-拡大の非アーベル岩澤理論」[19] を基に加筆修正をを行って執筆したものである（例えば，本稿では定理 5.6 とその証明を新たに追加した）．上記報告集は発行部数が限られているので，本論文において一部内容を再録することとした．

**Department of Mathematics, School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University, Tokyo 169-8555, Japan.
e-mail: ozaki@waseda.jp

© 2017 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

限次代数体との類似が著しい有限体 $\mathbf{F}$ 上の 1 変数代数函数体 F の場合，F の次数 0 の因子類群 Cl_F^0（イデアル類群の函数体における類似物）については有限次代数体の場合と状況は同じであるが，係数体 $\mathbf{F}$ を代数閉包 $\overline{\mathbf{F}}$ まで拡大すると，その次数 0 の因子類群は

$$\mathrm{Cl}^0_{\overline{\mathbf{F}}F} \simeq \bigoplus_{l \neq q} (\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l)^{\oplus 2g} \oplus (\mathbf{Q}_q/\mathbf{Z}_q)^h$$

（q は $\mathbf{F}$ の標数，$g = g(F)$ は F の種数，$0 \leq h \leq g$）と，極めて簡明な表示を持つ．また，因子類群と双対関係にある，最大不分岐アーベル拡大 $(\overline{\mathbf{F}}F)^{\mathrm{ab}}_{\emptyset}/\overline{\mathbf{F}}F$ の Galois 群 $G^{\mathrm{ab}}_{\overline{\mathbf{F}}F,\emptyset} := \mathrm{Gal}((\overline{\mathbf{F}}F)^{\mathrm{ab}}_{\emptyset}/\overline{\mathbf{F}}F)$ に関しては，

$$G^{\mathrm{ab}}_{\overline{\mathbf{F}}F,\emptyset} \simeq \bigoplus_{l \neq q} \mathbf{Z}_l^{\oplus 2g} \oplus \mathbf{Z}_q^{\oplus h}$$

が成立する．

この現象から鑑みて，有限次代数体 k のイデアル類群が無秩序に見えるのは，k が十分に元を含んでいない（小さい）ためであり，適当に十分な元を添加して k を拡大してやれば，函数体の場合と同様の現象が期待できるのではないか，と考えることができる．$\overline{\mathbf{F}}$ は $\mathbf{F}$ にすべての 1 の冪根（位数が q と素）を添加した拡大であることに注意すれば，k にすべての 1 の冪根の群 μ_∞ を添加した拡大体 $\mathbf{Q}(\mu_\infty)$（全円分拡大体）を $\overline{\mathbf{F}}F$ の一つの類似物と考えることができる．

岩澤は素数 p を一つ固定して，イデアル類群の p-部分に目標を絞って，k にすべての 1 の p 冪乗根を添加した拡大体 $k(\mu_{p^\infty})$ を考察した．その当初の動機は函数体との類似を狙うというよりも，p 冪次の Kummer 理論を自由に使えるようすることであると，岩澤自身は述べている（[18]）．

注．　本来ならば，1 のすべての冪根を添加した拡大体 $k(\mu_\infty)$ を考えたいところであるが，現時点ではこれは大きすぎて十分にコントロールすることが出来ないでいる（岩澤加群の有限生成性が成立しない）．将来的には，このような巨大な拡大を扱う岩澤理論が開発されることを希望する．

実際に岩澤は，目論見通りに

$$\mathrm{Cl}_{k(\mu_{p^\infty})} \otimes \mathbf{Z}_p, \quad G^{\mathrm{ab}}_{k(\mu_{p^\infty}),\emptyset}(p) := G^{\mathrm{ab}}_{k(\mu_{p^\infty}),\emptyset} \otimes \mathbf{Z}_p$$

がアーベル群として簡明な表示を持つことを示した．特に「岩澤 $\mu = 0$ 予想」が成立するならば，函数体と類似の

$$\mathrm{Cl}_{k(\mu_{p^\infty})} \otimes \mathbf{Z}_p \simeq (\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p)^{\oplus\lambda},\ G^{\mathrm{ab}}_{k(\mu_{p^\infty}),\emptyset}(p) \simeq \mathbf{Z}_p^{\oplus\lambda} \oplus (\text{有限アーベル } p\text{-群})$$

という表示を持つ（[4] 参照）．実際には，k に μ_{p^∞} を添加せずとも，$\mathbf{Z}_p$-拡大 K/k をとれば「μ=0」の下で $\mathrm{Cl}_K \otimes \mathbf{Z}_p$ と $G^{\mathrm{ab}}_{K,\emptyset}(p)$ に関して上で述べたことがそのまま成立している．すなわち，$\mathbf{Z}_p$-拡大は，**イデアル類群の構造を簡明化する力を持った無限次拡大**であ

ると言うことができる．従って，簡明な K のイデアル類群，乃至は最大不分岐アーベル p-拡大の Galois 群と，それらへの $\mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathbf{Z}_p$ の作用の仕方から，困難である有限次代数体 k のそれらに関する情報を引き出すこと—**降下（descent）**—の可能性が開ける．

非アーベル岩澤理論の動機は，この古典的岩澤理論の着想の非アーベル化にある：類体論により k のイデアル類群の p-部分が，k 上の最大不分岐アーベル p-拡大の Galois 群 $\mathrm{Gal}(k_\emptyset^{\mathrm{ab}}(p)/k)$ と同型であることに注意すれば，当然，k 上の最大不分岐 p-拡大 $k_\emptyset(p)/k$ の Galois 群 $G_{k.\emptyset}(p) := \mathrm{Gal}(k_\emptyset(p)/k)$ の構造が目標に挙がるであろう．

有限次代数体 k のイデアル類群の構造もさることながら，$G_{k.\emptyset}(p)$ はそれに輪をかけて難しい対象である．$G_{k,\emptyset}(p)$ に関して一般的に知られている事実を列挙してみると，

1. $G_{k,\emptyset}(p)$ は有限表示 pro-p-群である．つまり，pro-p-群の完全系列

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F_d \longrightarrow G_{k,\emptyset}(p) \longrightarrow 1,$$

が存在する．ここに，F_d は有限階数 d の自由 pro-p-群，R は有限個の元 $t_1, \ldots, t_r$ で，F_d の閉正規部分群として生成される；

$$R = (t_1, \ldots, t_r)_{F_d} := \langle g r_i g^{-1} \,|\, g \in F_d,\ 1 \leq i \leq r \rangle.$$

あるいは,

$$\dim_{\mathbf{F}_p} H_1(G_{k,\emptyset}(p), \mathbf{F}_p) = d < \infty, \quad \dim_{\mathbf{F}_p} H_2(G_{k,\emptyset}(p), \mathbf{F}_p) = r < \infty$$

と言い換えることもできる（d を $G_{k,\emptyset}(p)$ の**生成階数（generator rank）**，r を**関係階数（relation rank）**と言う）．

2. $G_{k,\emptyset}(p)$ は **FAB 群（<u>F</u>inite <u>AB</u>elianization group）**．すなわち，$G_{k,\emptyset}(p)$ の任意の開部分群 H のアーベル化 H^{ab} は有限.

3. $G_{k,\emptyset}(p)$ は無限になり得る（Golod-Šafarevič[1](1964)）．もちろん，有限にもなり得る（さらに言えば，任意の有限 p 群は，ある有限次代数体 k に対する $G_{k,\emptyset}(p)$ として実際に現れる [14]）．

$G_{k,\emptyset}(p)$ の知られている一般的な性質 1,2 は，イデアル類群の有限性と類体論という代数的整数論の基礎的事実から導かれる．3 はそれに加えて，有限 p 群の関係階数が，生成階数のある 2 次関数で常に下から抑えられるという群論的事実—**Golod-Šafarevič 不等式**—を用いる．また，有限でない $G_{k,\emptyset}(p)$ で，その構造が完全に判っている（乃至は原理的に任意の精度で構造を決定可能である）ような実例は現在一つも知られていない．さらに言えば，**Fontaine-Mazur 予想**を仮定すれば，$G_{k,\emptyset}(p)$ は無限 p 進解析的商をもたないので，それは行列群とは掛け離れた構造を持つことが帰結される．従って $G_{k,\emptyset}(p)$ が

無限の場合には，代数幾何から来る線型 Galois 表現では捉えきれない対象である可能性が濃厚である．

ともかく，$G_{k,\emptyset}(p)$ は FAB 群であることからも，その構造は相当に複雑であることが予想される．その原因を k が「小さい」ことに求めることはできないだろうか？

実際，標数 q の有限体 $\mathbf{F}$ 上の 1 変数代数函数体 F の場合には幾何を用いて，$p \neq q$ のとき

$$\begin{aligned} G_{\overline{\mathbf{F}}F,\emptyset}(p) &\simeq \pi_1(S_{g(F)})^{\mathrm{pro}-p} \\ &\simeq \langle x_1, y_1, \ldots, x_{g(F)}, y_{g(F)} \,|\, (x_1, y_1)\cdots(x_{g(F)}, y_{g(F)}) = 1\rangle^{\mathrm{pro}-p} \end{aligned}$$

が知られている．ここで，$\pi_1(S_g)^{\mathrm{pro}-p}$ は種数 g の閉曲面 S_g の位相的基本群の pro-p 完備化，交換子は $(x,y) := xyx^{-1}y^{-1}$ で定義している．

また，代数体の場合には次が知られている：

定理 1.1 (内田 [17])． 有限次代数体 k と素数 p について，$G_{k(\mu_\infty),\emptyset}(p)$ は可算無限階数の自由 pro-p 群である．

この内田の定理に基づいて，非アーベル岩澤理論を建設することも興味ある問題であるが，アーベル的の場合と同様に，$k(\mu_\infty)$ は，そこから降下して $G_{k,\emptyset}(p)$ の情報を引き出すにはあまりにも大きすぎるため，現時点では困難と言わざるを得ない．すると，$\mathbf{Z}_p$-拡大 K/k が，$G_{K,\emptyset}(p)$ を十分に簡明にして，かつ降下に適切ではないかと期待できる．

以下本稿では，上に述べた着想に基づいてこれまでに得られている結果について概説する．

§2. 設定と記号

この節では，今後用いる設定と記号について準備しておく．以下素数 p を一つ固定する．K/k を有限次代数体 k 上の $\mathbf{Z}_p$-拡大，$\Gamma := \mathrm{Gal}(K/k) \simeq \mathbf{Z}_p$ として，k_n で K/k の第 n 中間体（$[k_n : k] = p^n$）を表す（$n \geq 0$）.

序では不分岐拡大の場合のみにしか言及しなかったが，ここでは少し一般的に k の素点の集合 S を一つ固定して，S の素点の分岐のみを許した拡大の Galois 群を扱うことにする．以下，一般の代数体 F と F の素点の集合 S に対して，$F_S(p)$ を F の最大 S-分岐 p-拡大体（「S-分岐」＝「S に含まれる F の素点以外はすべて不分岐」），$G_{F,S}(p) := \mathrm{Gal}(F_S(p)/F)$ とおく．そして，$L_S := K_S(p)$，$L_{n,S} := (k_n)_S(p)$ と記し，$G := G_{K,S}(p) = \mathrm{Gal}(L_S/K)$，$G_n := G_{k_n,S}(p) = \mathrm{Gal}(L_{n,S}/k_n)$ と書くことにする．

古典的岩澤理論では最大 S-分岐アーベル p-拡大 $L_{n,S}^{\mathrm{ab}}/k_n$, L_S^{ab}/K の Galois 群 G^{ab}, G_n^{ab} を扱ったが, 非アーベル岩澤理論の目標物は G と G_n そのものである．しかし，G や G_n をそのまま扱うのは難しいので，それらに適当なフィルトレーションを入れて考えるのが適切である．ここでは降中心列を入れて考える：

群 H に対し，H の降中心列

$$H = C_1(H) \supseteq C_2(H) \supseteq \cdots \supseteq C_i(H) \supseteq \cdots$$

を，再帰的に

$$C_1(H) = H,\ C_{i+1}(H) = (C_i(H), H) \quad (i \geq 1)$$

で定める（H が位相群のときは交換子群は位相的閉包をとる）．そして，

$$L_S^{(i)} := L_S^{C_{i+1}(G)},\ L_{n,S}^{(i)} := L_{n,S}^{C_{i+1}(G_n)} \quad (i \geq 0)$$

$$G^{(i)} := G/C_{i+1}(G) = \mathrm{Gal}(L_S^{(i)}/K),$$
$$G_n^{(i)} := G_n/C_{i+1}(G_n) = \mathrm{Gal}(L_{n,S}^{(i)}/k_n),$$
$$X^{(i)} := C_i(G)/C_{i+1}(G) = \mathrm{Gal}(L_S^{(i)}/L_S^{(i-1)}),$$
$$X_n^{(i)} := C_i(G_n)/C_{i+1}(G_n) = \mathrm{Gal}(L_{n,S}^{(i)}/L_{n,S}^{(i-1)}) \quad (i \geq 1),$$

とおく．ここで，$L_S^{(i)}/k$ は Galois 拡大で，$X^{(i)}$ は $G^{(i)} = \mathrm{Gal}(L_S^{(i)}/K)$ の中心に含まれるので，Γ は $X^{(i)}$ に $\mathcal{G}^{(i)} := \mathrm{Gal}(L_S^{(i)}/k)$ の内部自己同型を通じて自然に作用する：$\gamma \in \Gamma,\ x \in X^{(i)}$ について，$\gamma x := \overline{\gamma} x \overline{\gamma}^{-1}$．ここに，$\overline{\gamma} \in \mathcal{G}^{(i)}$ は $\overline{\gamma}|_K = \gamma$ なる任意の元（γx は，$\overline{\gamma}$ の選び方に依らない）．

従って，$X^{(i)}$ は自然に完備群環 $\Lambda := \mathbf{Z}_p[[\Gamma]]$ 上の加群の構造を持つ．これを**第 i 次岩澤加群**と呼ぶことにする．$X^{(1)}$ は古典的岩澤理論における通常の岩澤加群であることに注意しよう．

上と同様に L_S/k は Galois 拡大で，$\mathcal{G} := \mathrm{Gal}(L_S/k)$ とおくと，自明な完全系列

$$1 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

が存在する．我々は G が G_n に比べて十分に簡明な構造を持つことを期待している．さらに，Γ の G への「作用」，正確には上の完全系列が引き起こす Γ の G の外部自己同型群への表現について知ることができれば，$\mathcal{G}$ の構造，延いては $G_0 = \mathrm{Gal}(L_{0,S}/k)$ についての何らかの知見が得られるであろう．

§ 3. 非アーベル岩澤公式

歴史的に岩澤理論に於ける最初の著しい成果は, 岩澤類数公式と言える. つまり, $\mathbf{Z}_p$-拡大 K/k の各中間体 k_n のイデアル類群の p-部分 $A_n := \mathrm{Cl}_{k_n} \otimes \mathbf{Z}_p$，或いは k_n 上の最大不分岐アーベル p-拡大の Galois 群の位数の n を動かしたときの振る舞いを, K 上の最大不分岐アーベル p-拡大の Galois 群―**不分岐岩澤加群**―の構造不変量である**岩澤不変量**を用いて表す公式である.

筆者は非アーベル岩澤理論を展開するに当たって，この公式の一般化に相当する事実の証明を最初の目標に掲げて研究を行った． 通常の岩澤類数公式の証明とは異なり，非アーベル群を正面から扱う必要があるために証明には難渋したが，現時点ではそれなりに満足できる結果が得られている．

この節では以下，前節の記号で $S=\emptyset$ としたもの（つまり不分岐）を用いる．そして，$L_\emptyset$ と $L_{n,\emptyset}$ はそれぞれ L と L_n と略記する．

まずオリジナルの岩澤公式の復習から始める．前節の記号で，

$$A_n \simeq X_n := X_n^{(1)}$$

であり，$X := X^{(1)}$ が不分岐岩澤加群であることに注意しよう．

岩澤類数公式 (岩澤 [3])． $\exists \nu \in \mathbf{Z}$, $\exists n_0 \geq 0$:

$$\#A_n = \#X_n = p^{\lambda n + \mu p^n + \nu} \quad \text{for } \forall\, n \geq n_0.$$

ここで，$\lambda := \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}_p} X$, μ は $\mathrm{Tor}_{\mathbf{Z}_p} X \sim \bigoplus_{i=1}^r \Lambda/p^{m_i}$ ($\sim$ は ker, coker が共に有限な Λ-準同型—**擬同型**—を表す) とするとき, $\mu := \sum_{i=1}^r m_i$ で定義される．

注． 上の λ，μ，ν は K/k の岩澤不変量と呼ばれる．ν-不変量は一般には岩澤加群 X の Λ-加群構造のみからは定まらない．

各 $n \geq 0$ と $i \geq 0$ に対して，G_n が FAB 群であることから $X_n^{(i)}$ はすべて有限アーベル群である．イデアル類群の言葉で言えば，

$$X_n^{(i)} \simeq A(L_n^{(i-1)})_{\mathrm{Gal}(L_n^{(i-1)}/k_n)} \quad (i \geq 1)$$

が成立する．ここに，$A(L_n^{(i-1)}) := \mathrm{Cl}_{L_n^{(i-1)}} \otimes \mathbf{Z}_p$ である．従って，$G_n^{(i)}$ も有限 p-群であることが判る．

非アーベル岩澤公式は，固定された $i \geq 1$ について，$\#X_n^{(i)}$ と $\#G_n^{(i)}$ の n を大きくしたときの振舞いを，$X^{(i)}$ と $G^{(i)}$ の構造不変量を用いて記述するものである．

公式を述べるために，第 i 次岩澤加群 $X^{(i)}$ の基本性質を述べておく：

命題 3.1 ([13])． μ を K/k の岩澤 μ-不変量とする．
(1) $\mu = 0$ ならばすべての $i \geq 1$ に対して $X^{(i)}$ は有限生成捩れ Λ-加群, さらに $\mathbf{Z}_p$ 上でも有限生成．
(2) $\mu > 0$ ならば, $i \geq 2$ のときは $X^{(i)}$ は捩れ Λ-加群であるが Λ 上有限生成ではない（$i = 1$ のときは常に Λ-上有限生成である（岩澤））．
(3) μ の値に拘わらず, $\lambda^{(i)} := \mathrm{rank}_{\mathbf{Z}_p} X^{(i)}$ は有限.

命題 3.1 中の $\lambda^{(i)}$ $(i \geq 1)$ を**第 i 次岩澤 λ-不変量**と呼ぶことにする．$\lambda^{(1)}$ は K/k の通常の岩澤 λ-不変量に等しいことに注意しよう．この命題より $\mu = 0$ のときは古典的な場合 $(i = 1)$ と $i \geq 2$ で $X^{(i)}$ の Λ-加群構造に大差はないが, $\mu > 0$ の場合には著しい違いがあることが判る.

この状況で,「非アーベル岩澤公式」は以下のように述べられる：

定理 3.2 ([13]). $\mathbf{Z}_p$-拡大 K/k の岩澤 μ-不変量が 0 であると仮定する．このとき各 $i \geq 2$ に対して,

$$\exists \nu^{(i)} \in \mathbf{Z}\ \exists n_0^{(i)} \geq 0 :\ \# X_n^{(i)} = p^{\lambda^{(i)} n + \nu^{(i)}} \quad \text{for } \forall\ n \geq n_0^{(i)}.$$

が成立する．特に，$G_n^{(i)}$ の位数については同じ仮定の下で，各 $i \geq 1$ に対して，

$$\exists m_0^{(i)} \geq 0 : \# G_n^{(i)} = p^{(\sum_{j=1}^{i} \lambda^{(j)})n + \sum_{j=1}^{i} \nu^{(j)}} \quad \text{for } \forall\ n \geq m_0^{(i)}.$$

が成立する.

上の定理の証明の概要を説明する．以下では, $\mathbf{Z}_p$-拡大 K/k の μ-不変量は 0 で K/k で分岐している素点は完全分岐していることを仮定する（この後半の仮定は必要であれば適当な $n \geq 0$ について k を k_n に取り替えればいつでも成立するので無害である）．そして $i \geq 1$ を 1 つ固定する.

このとき, $X_n^{(i)}$ は $X^{(i)}$ の商になることが判るので, $X_n^{(i)} \simeq X^{(i)}/Y_n^{(i)}$ となる $X_n^{(i)}$ の部分加群 $Y_n^{(i)} \subseteq X^{(i)}$ が存在する．この $Y_n^{(i)}$ の n を動かしたときの振る舞いが分かれば, $X_n^{(i)}$ の振る舞い (特にその位数) を知ることができる.

$i = 1$ の場合，即ちオリジナルの岩澤類数公式の場合には，$Y_n^{(1)}$ の振る舞いをを Λ の作用を用いて綺麗に記述できるが，$i \geq 2$ の場合には $X^{(i)}$ を Λ-加群として捉えたとしても，$Y_n^{(i)}$ の簡明な記述を得ることはできない．.

しかし，$G_n^{(i)} \simeq G^{(i)}/R_n^{(i)}$ なる $G^{(i)}$ の正規部分群 $R_n^{(i)}$ の振る舞いは Γ の $G^{(i)}$ への作用を用いて記述することができる．そして，$X^{(i)} = C_i(G^{(i)}) \subseteq G^{(i)}$，$X_n^{(i)} = C_i(G_n^{(i)}) \subseteq G_n^{(i)}$，$Y_n^{(i)} = C_i(G^{(i)}) \cap R_n^{(i)}$ と捉えて, 十分大なるすべての n について

$$Y_{n+1}^{(i)} = (Y_n^{(i)})^p$$

が成立することを群論的な手法を駆使して示して, 公式が証明されるのである.

非アーベル岩澤公式の副産物として，有限 p-群 $G_n^{(i)}$ の構造の挙動に関して次が判る：

命題 3.3 ([13]). $i \geq 1$ に対し,

$$\exists l_0^{(i)} \geq 0 : R_m^{(i)} = (R_n^{(i)})^{p^{m-n}} = (R_n^{(i)})^{[p^{m-n}]} \text{ for } m \geq n \geq l_0^{(i)}$$

従って,

$$G_n^{(i)} \simeq G^{(i)}/(R_{l_0^{(i)}}^{(i)})^{p^{n-l_0^{(i)}}} \quad \text{for } n \geq l_0^{(i)}$$

となる．ここで，位相群 H と整数 d に対して，H^d は h^d $(h \in H)$ たちで位相的に生成される H の部分群を表し，$H^{[d]} := \{h^d \,|\, h \in H\}$ と定める．

この命題によって，非アーベル不分岐 p-拡大のガロワ群 $G_n^{(i)}$ の位数のみならず, その構造の n を動かしたときの挙動もある程度知ることができる．

非アーベル岩澤公式の証明は,「p 乗元同士の積は p 乗元とは限らない」という非アーベル群特有の現象に，正面から打ち勝つことによって成されたのであり，古典的な岩澤類数公式の場合とは様相が相当に異なっている．そのため，$\mu > 0$ の場合も含む一般の場合に $X_n^{(i)}$ 乃至は $G_n^{(i)}$ の挙動を調べることは, 先の証明の手法では成功していない．

より数論的な異なる手法で, 特殊な $\mu > 0$ なる $\mathbf{Z}_p$-拡大については次のような $\# X_n^{(2)}$ の公式が得られている．

定理 3.4 ([13])．　K/k を次を満たす $\mathbf{Z}_p$-拡大 $(p \neq 2)$ とする:
(i) K/k の岩澤加群 X が $(\Lambda/p)^{\oplus \mu}$ と同型,　(このとき $\mu(K/k) = \mu$),
(ii) K の p 上の素点は唯 1 つ．
このとき, ある非負整数 $\kappa(K/k)$ と整数 $\nu^{(2)}(K/k)$ が存在して, 十分大なるすべての n について

$$\# X_n^{(2)} = p^{(\frac{\mu p^n - 1}{2}\mu)p^n - \kappa(K/k)p^n + \nu^{(2)}(K/k)}$$

が成立する．

注．　任意に与えられた $\mu > 0$ について，上の定理の条件 (i)，(ii) を満たす $\mathbf{Z}_p$-拡大 K/k は無数に存在する（[12]).

上の公式ははオリジナルの岩澤類数公式とは随分と形が異なっている．その原因は $X^{(2)}$ がもはや Λ 上有限生成でないことに起因している．

§4.　$\mathbf{Z}_p$-拡大体 K に対する $G_{K,\emptyset}(p)$ の構造

この節でも，p を固定された素数，k を有限次代数体，K/k を $\mathbf{Z}_p$-拡大とする．そして引き続き第 2 節の記号で $S = \emptyset$ の場合を扱う．

まず最初に，$X^{(i)}$ の構造を調べる上で基本となる完全系列について説明する．そのためにいくつか新たに記号を導入する：各 $i \geq 1$ と $n \geq 0$ に対して，E_n を k_n の単数群として，$\mathcal{H}_n^{(i)} = E_n/(E_n \cap N_{L_n^{(i)}/k_n} L_n^{(i)\times})$ とおく．そして，$\{\mathcal{H}_n^{(i)}\}$ の norm 写像 $N_{m,n} : k_m \longrightarrow k_n$ $(m \geq n \geq 0)$ から誘導される写像に関する射影的極限 $\varprojlim_{n \geq 0} \mathcal{H}_n^{(i)}$ を $\mathcal{H}^{(i)}$ で表す．

命題 4.1.　(1)　$i \geq 2$ と $m \geq n \geq 0$ について，各横列が完全であるような次の Λ-

加群の可換図式が存在する：

$$
(4.1)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_m^{(i-1)} & \longrightarrow & H_2(\mathrm{Gal}(L_m^{(i-1)}/k_m), \mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & X_m^{(i)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle N_{m,n}} & & \downarrow{\scriptstyle d_{m,n}} & & \downarrow{\scriptstyle p_{m,n}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}_n^{(i-1)} & \longrightarrow & H_2(\mathrm{Gal}(L_n^{(i-1)}/k_n), \mathbf{Z}_p) & \longrightarrow & X_n^{(i)} & \longrightarrow & 0.
\end{array}
$$

ここで，$d_{m,n}$ は自然な射影 $\mathrm{Gal}(L_m^{(i-1)}/k_m) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L_n^{(i-1)}/k_n)$ と恒等写像 $\mathbf{Z}_p \longrightarrow \mathbf{Z}_p$ が誘導する写像，$p_{m,n}$ は定義域の制限から誘導される自然な射影である．

(2) $i \geq 2$ に対して，次の Λ-加群の完全系列が存在する：

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^{(i-1)} \longrightarrow H_2(\mathrm{Gal}(L^{(i-1)}/K), \mathbf{Z}_p) \longrightarrow X^{(i)} \longrightarrow 0$$

(1) の可換図式の横列の完全系列は，中心類体の理論から得られる完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}_n^{(i-1)} \longrightarrow \mathcal{K}_n^{(i-1)} \xrightarrow{r_n} X_n^{(i)} \longrightarrow 0$$

($\mathcal{K}_n^{(i-1)} := (N_{L_n^{(i-1)}/k_n} J_{L_n^{(i-1)}} \cap k_n^\times)/N_{L_n^{(i-1)}/k_n} L_n^{(i-1)\times}$,
$J_{L_n^{(i-1)}}$ は $L_n^{(i-1)}$ の idele 群，r_n は

$$r_n(N_{L_n^{(i-1)}/k_n}(\alpha) N_{L_n^{(i-1)}/k_n} L_n^{(i-1)\times}) = (\alpha, L_n^{(i)}/L_n^{(i-1)}) \ \ (\alpha \in J_{L_n^{(i-1)}})$$

で定義される写像）と，類体論から得られる同型

$$
\begin{aligned}
H_2(L_n^{(i-1)}/k_n, \mathbf{Z}_p) &= \hat{H}^{-3}(L_n^{(i-1)}/k_n, \mathbf{Z}) \overset{\rho}{\simeq} \hat{H}^{-1}(L_n^{(i-1)}/k_n, C_{L_n^{(i-1)}}) \\
&\overset{\delta}{\simeq} \ker(\hat{H}^0(L_n^{(i-1)}/k_n, L_n^{(i-1)\times}) \longrightarrow \hat{H}^0(L_n^{(i-1)}/k_n, J_{L_n^{(i-1)}})) = \mathcal{K}_n^{(i-1)},
\end{aligned}
$$

($C_{L_n^{(i-1)}}$ は $L_n^{(i-1)}$ の idele 類群，$\rho = \rho_{L_m^{(i-1)}/k_m}$ は 中山-Tate の定理の同型写像 ([16, p.197, 11.3] 参照)，δ はコホモロジー完全系列の連結写像）を組み合わせることで得られる．(2) の完全系列は，(1) の完全系列を縦写像について射影的極限を取ることで得られる．

ここで，上の命題の完全系列の意味を説明する．一般に pro-p 群 H に対し，$H_2(H, \mathbf{Z}_p)$ は H の **Schur multiplier** と呼ばれるもので，H の pro-p-群による中心拡大

$$1 \longrightarrow C \longrightarrow \tilde{H} \longrightarrow H \longrightarrow 1$$

で $\tilde{H}^{\mathrm{ab}} \simeq H^{\mathrm{ab}}$ なる任意のものについて，自然な全射 $H_2(H, \mathbf{Z}_p) \longrightarrow C$ が存在するという性質を持つ（Hochschild-Serre スペクトラル系列

$$H_2(H, \mathbf{Z}_p) \longrightarrow C(= (C^{\mathrm{ab}})_H) \longrightarrow \tilde{H}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} H^{\mathrm{ab}} \longrightarrow 0$$

から判る）．$H = \mathrm{Gal}(L^{(i-1)}/K)$ $(i \geq 2)$ について，中心拡大

$$1 \longrightarrow X^{(i)} \longrightarrow \mathrm{Gal}(L^{(i)}/K) \longrightarrow \mathrm{Gal}(L^{(i-1)}/K) \longrightarrow 1$$

はそのような性質を持つので，全射

$$H_2(\mathrm{Gal}(L^{(i-1)}/K), \mathbf{Z}_p) \longrightarrow X^{(i)}$$

が存在することは群論的に判るが，命題 4.1(2) の完全系列は，その核が数論の言葉で記述できることを意味している．

系 4.2. (1)

$$\mathcal{H} := \varprojlim_{i \geq 1} \mathcal{H}^{(i)} = \varprojlim_{n \geq 0} \left(E_n \Bigg/ \left(E_n \cap \bigcap_{i \geq 1} N_{L_n^{(i)}/k_n}(L_n^{(i)})^{\times} \right) \otimes \mathbf{Z}_p \right)$$

とおく．このとき，Λ-加群として

$$H_2(G_{K,\emptyset}(p), \mathbf{Z}_p) \simeq \mathcal{H}$$

(2) $H_2(G_{K,\emptyset}(p), \mathbf{Z}_p)$ は Λ 上有限生成．

(1) は命題 4.1(2) の完全系列の $i \geq 2$ に関する射影的極限を取ることで得られる．(2) は $\mathcal{H}$ は $\mathcal{E} := \varprojlim_{n \geq 0}(E_n \otimes \mathbf{Z}_p)$ の商であり，$\mathcal{E}$ は有限生成 Λ-加群であること（岩澤）から従う．

今，K/k の岩澤 μ 不変量が 0 であるならば，$X = G_{K,\emptyset}(p)^{\mathrm{ab}}$ は $\mathbf{Z}_p$ 上有限生成なので、$G_{K,\emptyset}(p)$ の生成階数 $d(G_{K,\emptyset}(p)) = \dim_{\mathbf{F}_p} H_1(G_{K,\emptyset}(p), \mathbf{F}_p)$ は有限である．そこで次の問題が考えられる：

問題 1. $\mu(K/k) = 0$ のとき，$G_{K,\emptyset}(p)$ の関係階数

$$r(G_{K,\emptyset}(p)) := \dim_{\mathbf{F}_p} H_2(G_{K,\emptyset}(p), \mathbf{F}_p)$$

は有限か？

$\mathbf{Z}_p$-拡大 K/k が，最大不分岐 p-拡大の Galois 群の構造を簡明化する力があると信ずるならば，この問題は肯定的に解かれることが期待されるが，その成否は知られていないし，非常に難しいと思われる．しかし，肯定的であるような K/k の実例は存在する（後述）．

完全系列

$$0 \longrightarrow H_2(G_{K,\emptyset}(p), \mathbf{Z}_p)/p \longrightarrow H_2(G_{K,\emptyset}(p), \mathbf{F}_p) \longrightarrow X[p] \longrightarrow 0$$

（$X[p] := \ker(X \xrightarrow{p} X)$）より，問題 1 は

$$\dim_{\mathbf{F}_p} H_2(G_{K,\emptyset}(p), \mathbf{Z}_p)/p < \infty \ ?$$

と同値である．さらに上の完全系列と系 4.2 より，$H_2(G_{K,\emptyset}(p), \mathbf{F}_p)$ は Λ-加群としては有限生成であることは判る．

この節の最後に，高次岩澤不変量 $\lambda^{(i)}$ について述べる：

命題 4.3. k を有限次代数体，p は k で完全分解，$\mathbf{Z}_p$-拡大 K/k で p 上の素点はすべて分岐すると仮定する．そして，r_1，r_2 をそれぞれ k の実無限素点，複素無限素点の個数とする．このとき，

$$\lambda^{(1)} \geq r_2, \quad \lambda^{(2)} \geq \frac{r_2(r_2-1)}{2} - (r_1 + r_2)$$

が成立する．特に，$\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ が随意に大きくなるような K/k が存在する．

上の命題の $\lambda^{(1)}$ に関する部分は岩澤による結果（[4]）である．それと命題 4.1 を用いて，$\lambda^{(2)}$ に関する主張も示される．

問題 2. 各 $i \geq 1$ について，$\lambda^{(i)}$ が随意に大きくなるような $\mathbf{Z}_p$-拡大は存在するか？

この問題も未解決である．現時点では $\lambda^{(3)} \geq 1$ なる実例すら知られていない．

§ 5. $G_{K\cdot,\emptyset}(p)$ の実例

この節では，素数 p を固定し，有限次代数体 k に対して k_∞/k を円分的 $\mathbf{Z}_p$-拡大とする．第 2 節の記号で，$K = k_\infty$，$S = \emptyset$ の場合を扱う．

まず，k が虚 2 次体の場合に $G^{(3)} = G_{k_\infty,\emptyset}(p)/C_4(G_{k_\infty,\emptyset}(p))$ の構造が決定できるような判定条件を与える：

命題 5.1. k を虚 2 次体，p は k で不分解な奇素数として，k_∞/k の岩澤 λ-不変量が 2 であるものとする．そして，$D_n^{(2)} \subseteq \mathrm{Gal}(L_n^{(2)}/L_n^{(1)})$ を p 上の素点の分解群（$n \geq 0$），$f(T) \in \mathbf{Z}_p[[T]]$ を

$$f((1+p)^s - 1) = L_p(s, \chi_k \omega_p) \text{（久保田-Leopoldt } p\text{-進 } L\text{-函数）} (s \in \mathbf{Z}_p)$$

を満たす冪級数として（χ_k は k に付随する Dirichlet 指標，ω_p は p-Teichmüller 指標），

$$f(T) = (T-\alpha)(T-\beta)U(T),\ \alpha, \beta \in \overline{\mathbf{Q}_p},\ |\alpha|_p, |\beta|_p < 1,\ U(T) \in \mathbf{Z}_p[[T]]^\times$$

とする（$|*|_p$ は p-進絶対値）．

このとき，もしもある $n \geq 0$ について $D_n^{(2)} \neq 0$ であるならば，

$$G^{(3)} \simeq F_2/C_4(F_2)((x,y)^{p^e})_{F_2}$$

が成立する．ここに $F_2 = \langle x, y \rangle$ は階数 2 の自由 pro-p 群，$e = v_p((1+\alpha)(1+\beta) - 1))$（$v_p$ は正規化（$v_p(p) = 1$）された p-進附値）．なお，$v_p(0) = \infty$, $p^\infty = 0$ と解釈する．

特に，$X^{(1)} \simeq \mathbf{Z}_p^{\oplus 2}$, $X^{(2)} \simeq \mathbf{Z}_p/p^e$, $X^{(3)} \simeq (\mathbf{Z}_p/p^e)^{\oplus 2}$ が成立する．

証明は，岩澤主予想（Mazur-Wiles の定理）を用いて，$H_2(X^{(1)}, \mathbf{Z}_p) \simeq X \wedge X \simeq \Lambda/(T+1-(1+\alpha)(1+\beta))$ を導き，これと命題 4.1 を用いて実行される..

例 5.2. 命題 5.1 で $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $p=3$ とする．このとき，$m = 2437$，3886，4027 について

$$G^{(3)} \simeq F_2/C_4(F_2)((x,y)^{3^{e_m}})_{F_2}$$

が成立する．ここで，$e_{4027}=2$, $e_{2437}=3$, $e_{3886}=4$ である．

これらの実例では $D_0^{(2)} \neq 1$ が成立している．

次に，$G = G_{k_\infty,\emptyset}(p)$ が完全に決定されている例を述べる．

まず最初に G がアーベル群になるような例を説明する．k が虚 2 次体の場合には，次の 2 つの定理により G がアーベル群になるような k が完全に決定されている：

定理 5.3 (水澤-尾崎 [8]). $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$ を虚 2 次体（m は平方因子を持たない正整数），k_∞/k を円分的 $\mathbf{Z}_2$-拡大とする．このとき，$G = G_{k_\infty,\emptyset}(2)$ がアーベル群になるための必要十分条件は以下の通りである．なお，p, q, q', q'' は相異なる素数を表すものとする．

(1) $m=1$ または $m=q\equiv 3 \pmod 8$. この場合には G=1.

(2) $m=p\equiv 5 \pmod 8$. この場合には $G\simeq \mathbf{Z}/2$.

(3) $m=pq$, $p\equiv 5$, $q\equiv 3 \pmod 8$，または，$m=q\equiv 7 \pmod{16}$. この場合には $G\simeq \mathbf{Z}_2$

(4) $m=qq'$, $q\equiv q'\equiv 3 \pmod 8$，または，$m=p\equiv 9 \pmod{16}$, $2^{\frac{p-1}{4}}\equiv 1 \pmod p$. この場合には $G\simeq \mathbf{Z}/2\times\mathbf{Z}_2$.

(5) $m=qq'q''$, $q\equiv q'\equiv q''\equiv 3 \pmod 8$，または，$m=pq$, $p\equiv 9 \pmod{16}$, $q\equiv 3 \pmod 8$, $2^{\frac{p-1}{4}}\equiv 1 \pmod p$. この場合には $G\simeq\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$.

(6) $m=q\equiv 15 \pmod{32}$. さらに，$\frac{1}{2}L_2(s,\chi_k\omega_2) = f(5^s-1)$ と満たす $f(T)\in\mathbf{Z}_2[[T]]$ について，$f(T)=p(T)U(T)$, $p(T)=T^3+a_2T^2+a_1T\in\mathbf{Z}_2[T]$ $(a_i\in 2\mathbf{Z}_2)$, $U(T)\in\mathbf{Z}_2[[T]]^\times$ と表したとき，$p(-1)\equiv 1 \pmod 4$. この場合には $G\simeq\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2\times\mathbf{Z}_2$.

定理 5.4 (岡野 [11]). k が虚 2 次体，p が奇素数の場合，$G=G_{k_\infty,\emptyset}(p)$ がアーベル群になるための必要十分条件は，次の (1) と (2) のいずれかが成立することである：

(1) k_∞/k の λ-不変量 $\lambda(k_\infty/k)$ が 1 以下．この場合は $G=1$ または $G\simeq\mathbf{Z}_p$.

(2) $\lambda(k_\infty/k)=2$ かつ，k のイデアル類群の p-部分が，p 上の素イデアルの冪を含む類たちで生成される（言い換えると，k 上の不分岐アーベル p-拡大で，k の p 上の素点がすべて完全分解するようなものは自明な拡大以外に存在しない）．この場合は $G\simeq\mathbf{Z}_p\times\mathbf{Z}_p$

上の 2 つの定理は基本的に中心類体の理論を用いて与えられる．

$$G \text{ がアーベル群} \Longleftrightarrow X^{(2)}=0 \Longleftrightarrow X_n^{(2)}=0\ (\forall n\geq 0)$$

に注意すると，命題4.1 から，必要条件 $\mathcal{H}\simeq H_2(X^{(1)},\mathbf{Z}_p)\simeq X^{(1)}\wedge X^{(1)}$ が得られる．ここで，$\mathcal{H}$ は Λ 上 1 元生成なので，$X^{(1)}\wedge X^{(1)}$ も 1 元生成であることが判り，$\dim_{\mathbf{F}_p} X^{(1)}/p\leq 3$

という必要条件が得られる．この必要条件で絞られた k について，中心類体の理論から得られる完全系列

$$
\begin{aligned}
0 &\longrightarrow (E_{k'} \cap N_{L_n^{(1)}/k'} J_{L_n^{(1)}})/(E_{k'} \cap N_{L_n^{(1)}/k'} L_n^{(1)\times}) \\
&\longrightarrow \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{\mathfrak{p}} H_2(D_{\mathfrak{p}}(L_n^{(1)}/k'), \mathbf{Z}_p) \longrightarrow H_2(\operatorname{Gal}(L_n^{(1)}/k'), \mathbf{Z}_p) \right) \\
&\longrightarrow (X_n^{(2)})_{\operatorname{Gal}(k_n/k')} \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

を用いて $(X_n^{(2)})_{\operatorname{Gal}(k_n/k')} = 0$ ($\iff X_n^{(2)} = 0$) となる必要十分条件を求める．ここに，$k' = k$（$p \neq 2$ のとき），$= \mathbf{Q}$（$p = 2$ のとき），$E_{k'}$ は k' の単数群，$\mathfrak{p}$ は k' の有限素点すべてを亙り，$D_{\mathfrak{p}}(L_n^{(1)}/k') \subseteq \operatorname{Gal}(L_n^{(1)}/k')$ は $\mathfrak{p}$ 上の素点の分解部分群である．ここで，$(E_{k'} \cap N_{L_n^{(1)}/k} J_{L_n^{(1)}})/(E_{k'} \cap N_{L_n^{(1)}/k} L_n^{(1)\times}) = 0$ となるので，証明の核心は $\operatorname{Gal}(L_n^{(1)}/k')$ と，その分解部分群たちの構造を具体的に決定して，その Schur multiplier を計算することである．

次に，p-円分体 $\mathbf{Q}(\mu_p)$ の円分的 $\mathbf{Z}_p$-拡大に関しては次が知られている：

定理 5.5 (Sharifi[15])． $k_\infty = \mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})$，$p < 1000$ ならば，$G_{k_\infty,\emptyset}(p)$ はアーベル群である．また，$p = 1217,\ 7069,\ 9829$ に関しては $G_{k_\infty,\emptyset}(p)$ はアーベル群ではない．

この定理の証明は，定理 5.3, 5.4 とは全く異なる手法で与えられる：

Sharifi[15] では明示的に述べられていないが，実は一般に次が成立する：

定理 5.6． K/k を $\mathbf{Z}_p$-拡大で，K/k で分岐する k の素点はただ一つで，それは K/k で完全分岐しているものとする．そしてさらに，

$$\operatorname{Tor}_{\mathbf{Z}_p} X = 0, \quad G_{K,\emptyset}(p)^{\mathrm{ab}}/p \simeq G_{k,\emptyset}(p)^{\mathrm{ab}}/p \tag{5.1}$$

が成立していると仮定する．このとき，

$$G_{K,\emptyset}(p) \text{ がアーベル群} \iff G_{k,\emptyset}(p) \text{ がアーベル群}$$

が成立する．

証明 $G := G_{K,\emptyset}(p)$ として，記号はこれまでと同様とする．$\Longrightarrow$ は容易に判るので，$\Longleftarrow$ を示す．そのためには，$C_2(G_0^{(2)}) = 1 \Longrightarrow C_2(G^{(2)}) = 1$ を示せば十分である．

$G^{(2)\mathrm{ab}} = \prod_{i=1}^r \langle x_i C_2(G^{(2)}) \rangle \simeq \mathbf{Z}_p^r$ とする．[13] より，

$$G_0^{(2)} \simeq G^{(2)}/((\gamma, x_1), \ldots, (\gamma, x_r))_{G^{(2)}} \tag{5.2}$$

を得る．ここで，$\gamma \in \operatorname{Gal}(L^{(2)}/k)$ は K/k で分岐する k 上の唯一の素点に関する惰性群の生成元，$(*)_{G^{(2)}}$ は生成系 $*$ で正規的に生成される閉部分群を表す．

仮定 (5.1) より，$(\gamma, x_1), \ldots, (\gamma, x_r) \in (G^{(2)})^p C_2(G^{(2)})$ であり，$G_0^{(2)}$ の有限性からこれらは $C_2(G^{(2)})$ を法として $\mathbf{Z}_p$ 上独立である．そこで，$(\gamma, x_i) = y_i^p c_i,\ y_i \in G^{(2)},\ c_i \in C_2(G^{(2)}),\ 1 \leq i \leq r$ と表すことにする．ここで $g \in G^{(2)}$ に対して，$g(y_i^p c_i)g^{-1} = y_i^p c_i c'^p, c' \in C_2(G^{(2)})$ と表せることに注意すると，$((\gamma, x_1), \ldots, (\gamma, x_r))_{G^{(2)}}$ の任意の元は $C_2(G^{(2)})^p$ を法として $(y_1^p)^{a_1} \cdots (y_r^p)^{a_r} c_1^{a_1} \cdots c_r^{a_r}\ (a_i \in \mathbf{Z}_p)$ と表されることが判る．これが $C_2(G^{(2)})$ に属するための必要十分条件は，上で述べた $\mathbf{Z}_p$ 上の独立性より $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$ であるから，

$$((\gamma, x_1), \ldots, (\gamma, x_r))_{G^{(2)}} \cap C_2(G^{(2)}) \subseteq C_2(G^{(2)})^p \tag{5.3}$$

が判った．

一方，(5.2) と仮定より，

$$1 = C_2(G_0^{(2)}) \simeq C_2(G^{(2)})/((\gamma, x_1), \ldots, (\gamma, x_r))_{G^{(2)}} \cap C_2(G^{(2)})$$

であるから，

$$((\gamma, x_1), \ldots, (\gamma, x_r))_{G^{(2)}} \cap C_2(G^{(2)}) = C_2(G^{(2)})$$

を得る．これと (5.3) から

$$C_2(G^{(2)}) = C_2(G^{(2)})^p$$

となるので，$C_2(G^{(2)}) = 1$ が結論される． □

$\mathbf{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}(\mu_p)\ (p < 8000000)$ は，上の定理の条件を満たしているので，問題を $G_{\mathbf{Q}(\mu_p),\emptyset}(p)$ に帰着できる．そして，Sharifi は保型形式の Fourier 係数の言葉で，$G_{\mathbf{Q}(\mu_p),\emptyset}(p)$ がアーベル群かどうか判定できることを示し，実際に計算を実行することによって定理を得ている．

次に，$G_{k_\infty,\emptyset}(p)$ が決定可能で，非アーベル群となる例を挙げる：

定理 5.7 (水澤 [6],[7]). (1) p_1, p_2, q を $p_1 \equiv p_2 \equiv 5 \pmod 8$, $q \equiv 3 \pmod 8$ なる相異なる素数として，$\left(\frac{p_1 p_2}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$ と仮定する．さらに $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$ の基本単数の $\mathbf{Q}$ へのノルムが 1 であると仮定する．このとき，$k = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1 p_2 q})$ 上の円分的 $\mathbf{Z}_2$-拡大 k_∞/k について，

$$G_{k_\infty,\emptyset}(2) \simeq D_{2^m}\ (\text{位数 } 2^m \text{ の正 2 面体群})$$

が成立する．ここで $m \geq 3$ は，2^{m-2} が $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1 p_2})$ の類数の 2-部分となるような整数である．

(2) $k = \mathbf{Q}(\sqrt{-m})$, $0 < m \equiv 1 \pmod 4$ は平方因子を持たないとする．さらに，円分的 $\mathbf{Z}_2$-拡大 k_∞/k の λ-不変量が 1 であると仮定する．このとき，

$$G_{k_\infty,\emptyset}(2) \simeq \langle a, b \,|\, bab^{-1} = a^{-1},\ a^{2d} = 1 \rangle^{\mathrm{pro}-2}$$

ここに，$d < \infty$ は $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ の円分的 $\mathbf{Z}_2$-拡大の不分岐岩澤加群の位数である．

(3)　q_1, q_2 を $q_1 \equiv 3 \pmod 8$, $q_2 \equiv 7 \pmod{16}$ なる素数とする．このとき，$k = \mathbf{Q}(\sqrt{-q_1q_2})$ 上の円分的 $\mathbf{Z}_2$-拡大 k_∞ について，

$$G_{k_\infty,\emptyset}(2) \simeq \langle a, b, c \,|\, bab^{-1} = a^{-1},\ (b,c) = a^2,\ (a,c) = 1\rangle^{\mathrm{pro}-2}$$

が成立する．

上の定理 5.3，5.4，5.5，5.7 で与えられた例では，$G_{k_\infty,\emptyset}(p)$ の関係階数 $r(G_{k_\infty,\emptyset}(p))$ はすべて有限であることに注意しよう（問題 1 参照）．

§6.　今後の展望

これまでの研究では未だ $\mathbf{Z}_p$-拡大体 K に対する $G_{K,\emptyset}(p)$ の構造について決定的な事実は得られていない．$G_{K,\emptyset}(p)$ についてある程度のことが判るような実例は得られているが，$\mathbf{Z}_p$-拡大 K/k に本当に $G_{K,\emptyset}(p)$ を簡明にする力があるかどうかの見極めは現時点ではついていない．そのためには，もう少し具体的な例を積み重ねて観察する必要がありそうである．特に K が虚 2 次体の円分的 $\mathbf{Z}_2$-拡大体の場合にはもう少しやるべきことがあるように思われる．また，S が p 上の素点を含まない場合には，$G_{K,S}(p)$ は馴分岐拡大の Galois 群なので，不分岐の場合と類似の性質を持つことが期待される．従ってこの場合に，最も基本的な $\mathbf{Z}_p$-拡大である $\mathbf{Q}$ 上の円分的 $\mathbf{Z}_p$-拡大 $\mathbf{Q}_\infty$ に対して，$G_{\mathbf{Q}_\infty,S}(p)$ を研究することには意義がある．この方向での研究は水澤-尾崎 [9]，伊藤-水澤 [2] で行われている．

本稿ではこれまで不分岐拡大を専ら扱ってきたが，p 上の素点をすべて含むような S については $G_{K,S}(p)$ は $G_{K,\emptyset}(p)$ とは全く異なる様相を見せる：

定理 6.1 (岩澤（[5] 参照）)．　k_∞/k を有限次代数体 k 上の円分的 $\mathbf{Z}_p$-拡大，S は k の素点の有限集合で，p 上の素点と無限素点をすべて含むとする．

このとき，もしも $G_{k_\infty,S}(p)^{\mathrm{ab}}$ が非自明な $\mathbf{Z}_p$-捩れ元を持たないならば，$G_{k_\infty,S}(p)$ は自由 pro-p 群である．また $G_{k_\infty,S}(p)$ が有限階数であるための必要十分条件は，k が総実であることである．

注.　k が総実代数体の場合，$G_{k_\infty,S}(p)^{\mathrm{ab}}$ が非自明な $\mathbf{Z}_p$-捩れ元を持たないことは，$k(\mu_{p^\infty})/k(\mu_p)$ に対する岩澤 $\mu = 0$ 予想から従う．

従って，S が p 上の素点をすべて含むような場合には，$G_{k_\infty,S}(p)$ の構造は極めて簡明になることが判る．

以下，特に k が総実で，$G_{k_\infty,S}(p)^{\mathrm{ab}}$ が非自明な $\mathbf{Z}_p$-捩れ元を持たない場合を考える．このとき，$F := G_{k_\infty,S}(p)$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_\infty/k)$ とおくと，F は有限階数 d の自由 pro-p 群，$\Gamma \simeq \mathbf{Z}_p$ である．

完全系列

$$1 \longrightarrow F \longrightarrow \mathrm{Gal}(k_S(p)/k) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1 \tag{6.1}$$

を考える．ここで仮定より $k_\infty \subseteq k_S(p)$ なので，$k_S(p) = (k_\infty)_S(p)$ に注意する．この完全系列から

$$G_{k.S}(p) = \mathrm{Gal}(k_S(p)/k) \simeq F \rtimes \Gamma$$

が判る．従って，$G_{k.S}(p)$ の構造は，Γ の F への作用で完全に決定されることになる．もう少し詳しく言えば，完全系列 (6.1) が，外部自己同型表現

$$\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Out}(F) := \mathrm{Aut}(F)/\mathrm{Inn}(F), \quad \gamma \mapsto (x \mapsto \overline{\gamma} x \overline{\gamma}^{-1}) \mod \mathrm{Inn}(F)$$

($\overline{\gamma} \in G_{k,S}(p)$ は γ の延長）を定めるので，ρ による Γ の生成元 γ_0 の像が $G_{k.S}(p)$ の構造を決定する．すると，この状況での非アーベル岩澤理論の「主予想」に関して以下のような問題を考えるのは自然である：

問題 3. $\rho(\gamma_0) \in \mathrm{Out}(F)$ を何らかの “p 進 L-函数” の言葉で記述できるか？

合成写像

$$\Gamma \xrightarrow{\rho} \mathrm{Out}(F) \longrightarrow \mathrm{Aut}(F^{\mathrm{ab}}) = GL_d(\mathbf{Z}_p)$$

による γ_0 の像の特性多項式が k の p 進ゼータ函数 $\zeta_{k,p}(s)$ で記述できるというのが，Wiles によって証明された総実代数体の岩澤主予想であった．「非アーベル岩澤主予想」を定式化するには，まず自由 pro-p 群の外部自己同型群 $\mathrm{Out}(F)$ の個々の元に対して，適切な不変量を定義する必要がある．そのために，次のような一案がある：

$\mathcal{C}$ を F の特性開部分群（即ち，$\mathrm{Aut}(F)$ の作用で閉じている開部分群）全体の集合とする．このとき，

$$\mathrm{Aut}(F) \longrightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{C}} GL^0(U^{\mathrm{ab}}), \quad \sigma \mapsto (x(U,U) \mapsto \sigma(x)(U,U))_{U \in \mathcal{C}} \tag{6.2}$$

は単射であることが示される．ここに，$GL^0(U^{\mathrm{ab}}) \subseteq GL(U^{\mathrm{ab}})$ は自然な射 $\mathrm{Aut}(F) \longrightarrow GL(U^{\mathrm{ab}})$ の像であり，右辺の射影的極限は以下の射に関するものである：

$U, V \in \mathcal{C}$，$V \subseteq U$ のとき，$\mathrm{Ver}_{U/V} : U^{\mathrm{ab}} \longrightarrow V^{\mathrm{ab}}$ を移送写像とする．つまり，$U = \bigcup_{1 \le i \le [U:V]} u_i V$ を剰余類分解として，各 $x \in U$ と $1 \le i \le [U:V]$ について $v_i(x) \in V$ を $x u_i = u_{i'} v_i(x)$ を満たす元とする．このとき $\mathrm{Ver}_{U/V}(x(U,U)) := \prod_{1 \le i \le [U:V]} v_i(x)(V,V)$ と定める．U が自由 pro-p 群であることから，$\mathrm{Ver}_{U/V}$ は単射 $\mathrm{Aut}(F)$-準同型であり，その像は $GL^0(V^{\mathrm{ab}})$ の作用で閉じている．従って

$$\varphi_{V,U} : GL^0(V^{\mathrm{ab}}) \longrightarrow GL^0(U^{\mathrm{ab}}), \quad \tau \mapsto \mathrm{Ver}_{U/V}^{-1} \circ \tau \circ \mathrm{Ver}_{U/V}$$

が定義できる．$\varprojlim_{U \in \mathcal{C}} GL^0(U^{\mathrm{ab}})$ は $\{\varphi_{V,U}\}$ に関する射影的極限である．

各 $U \in \mathcal{C}$ に対して，

$$F/U \longrightarrow GL^0(U^{\mathrm{ab}}),\quad gU \mapsto (x(U,U) \mapsto gxg^{-1}(U,U))$$

の像を $GL^1(U^{\mathrm{ab}})$ とおけば，これは $GL^0(U^{\mathrm{ab}})$ の有限正規部分 p 群であり，(6.2) は単射準同型

$$\Psi : \mathrm{Out}(F) \longrightarrow \varprojlim_{U \in \mathcal{C}} GL^0(U^{\mathrm{ab}})/GL^1(U^{\mathrm{ab}}) =: \mathfrak{G}$$

を誘導する．これで，各 $\mathrm{Out}(F)$ の元を，行列のシステムからなる $\mathfrak{G}$ の元で表現することができる．

一方，$U \in \mathcal{C}$ のとき，十分大きい $n(U) \geq 0$ について，$\overline{\gamma_0}^{p^{n(U)}}$ による F/U への共役作用は自明になる（F/U は有限なので）．このとき，有限次 p-拡大 $k(U)/k_{n(U)}$ で，

$$k_S(p)^U = k_\infty k(U),\ k(U) \cap k_\infty = k_{n(U)},$$
$$\mathrm{Gal}(k_\infty/k_{n(U)}) \simeq \mathrm{Gal}(k_S(p)^U/k(U))$$

なるものが存在する（一意ではない）．ここで，$U^{\mathrm{ab}} = G^{\mathrm{ab}}_{k_S(p)^U,S}(p)$ は円分的 $\mathbf{Z}_p$-拡大 $k_S(p)^U/k(U)$ の S-分岐岩澤加群であることに注意する．従って，$\overline{\gamma_0}^{p^{n(U)}}$ の U^{ab} への共役作用は $GL^0(U^{\mathrm{ab}})$ の元を定めるが，この元の特性多項式は総実代数体の $\mathbf{Z}_p$-拡大 $k_S(p)^U/k(U)$ に対する岩澤主予想により，$k(U)$ の p-進ゼータ函数 $\zeta_{k(U),p}(s)$ から定まる．

このことから，$\Psi(\rho(\gamma_0)) \in \mathfrak{G}$ の $GL^0(U^{\mathrm{ab}})/GL^1(U^{\mathrm{ab}})$ への射影を $T_U GL^1(U^{\mathrm{ab}})$ とするとき，T_U の固有値集合（スペクトラム）は 1 の冪根倍を法として一意に定まることが判り，それは岩澤主予想により $\zeta_{k(U),p}(s)$ から知ることができる．つまり，$\zeta_{k(U),p}(1-s) = \frac{f(\kappa^s-1)}{\kappa^{1-s}-\kappa}$（$\kappa \in 1+p\mathbf{Z}_p$）なる $f(T) \in \mathbf{Z}_p[[T]]$ が，$f(T) = (\prod_{i=1}^m (T-\alpha_i))U(T)$ ($|\alpha_i|_p < 1,\ U(T) \in \mathbf{Z}_p[[T]]^\times$) を満たすとき，$\sqrt[p^{n(U)}]{1+\alpha_i} \mod \mu_{p^\infty}$ $(1 \leq i \leq m)$ が T_U の固有値集合である．

このように，総実代数体のアーベル的な岩澤主予想を積み上げて，$\{\zeta_{k(U),p}(s)\}_U$ から $\Psi(\rho(\gamma_0)) = (T_U GL^1(U^{\mathrm{ab}}))_U$ の情報を引き出せるが，本質的な問題はこの先の課題であり，それは，

1. $\{\zeta_{k(U),p}(s)\}_U$ を束ねた解析的な対象の存在すべき場所を探して，その対象を構成する．

2. 1 の解析的対象と $\Phi(\rho(\gamma_0))$ の結びつきを明らかにする．

である．上では，$\Phi(\rho(\gamma_0)) = (T_U GL^1(U^{\mathrm{ab}}))_U$ の各 T_U の固有値集合 $\mod \mu_{p^\infty}$ を不変量とする粗いやり方をしていたが，もっと精密に見る方法を考えるなど課題は沢山ある．

ここでは詳しく述べないが，S が p 上の素点をすべて含む場合の非アーベル岩澤理論に対して，森下-寺嶋 [10] による Johnson 準同型を用いた上に述べたものとは異なるアプローチがあることを最後に述べて，この稿を終わりとする．

参考文献

[1] E. S. Golod, I. R. Šafarevič, On the class field tower (Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **28** (1964), 261–272.

[2] T. Itoh, Y. Mizusawa, On tamely ramified pro-p-extensions over $\mathbf{Z}_p$-extensions of $\mathbf{Q}$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **156** (2014), 281–294.

[3] K. Iwasawa, On Γ-extensions of algebraic number fields, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 183–226.

[4] K. Iwasawa, On $\mathbf{Z}_l$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Math. **98** (1973), 246–326.

[5] K. Iwasawa, Riemann-Hurwitz formula and p-adic Galois representations for number fields, Tôhoku Math. J. (2) **33** (1981), 263–288.

[6] Y. Mizusawa, On the maximal unramified pro-2-extension of $\mathbf{Z}_2$-extensions of certain real quadratic fields II, Acta Arith.**119** (2005), 93–117.

[7] Y. Mizusawa, On the maximal unramified pro-2-extension over the cyclotomic $\mathbf{Z}_2$-extension of an imaginary quadratic field, J.Théor. Nombres Bordeaux **22** (2010), 115–138.

[8] Y. Mizusawa, M. Ozaki, Abelian 2-class field towers over the cyclotomic $\mathbf{Z}_2$-extensions of imaginary quadratic fields, Math. Ann. **347** (2010), 437–453.

[9] Y. Mizusawa, M. Ozaki, On tame pro-p Galois groups over basic $\mathbf{Z}_p$-extensions, Math. Z. **273** (2013), 1161–1173.

[10] M. Morishita, Y. Terashima, p-Johnson homomorphisms in non-Abelian Iwasawa theory, arXiv:1311.5982v1 (2013).

[11] K. Okano, Abelian p-class field towers over the cyclotomic $\mathbf{Z}_p$-extensions of imaginary quadratic fields. Acta Arith. **125** (2006), 363–381.

[12] M. Ozaki, Construction of $\mathbf{Z}_p$-extensions with prescribed Iwasawa modules, J. Math. Soc. Japan **56** (2004), 787–801.

[13] M. Ozaki, Non-abelian Iwasawa theory for $\mathbf{Z}_p$-extensions, J.reine angew. Math. **602** (2007), 59–94.

[14] M. Ozaki, Construction of maximal unramified p-extensions with prescribed Galois groups, Invent. Math. (2011),

[15] R. Sharifi, On Galois groups of unramified pro-p extensions, Math. Ann. **342** (2008), 297–308.

[16] J. Tate, Global class field theory, *Algebraic Number Theory* (Proc. Instructional Conf., Brighton, 1965), 162–203 Thompson, Washington, D.C., 1967.

[17] K. Uchida, Galois groups of unramified solvable extensions, Tôhoku Math. J. (2) **34** (1982), 311–317.

[18] 数学編集部，岩澤健吉先生のお話しを伺った 120 分，数学 **45**(1993), No.4, 366–372.

[19] 尾崎　学，$\mathbf{Z}_p$-拡大の非アーベル岩澤理論，第 22 回整数論サマースクール「非可換岩澤理論」報告集第 II 巻，491–513.