

3重、4重ゼータ値の対称和に関する公式の一般化について

(On generalization of formula involving symmetric sums of triple and quadruple zeta values)

By

町出 智也 (MACHIDE TOMOYA) *, **

Abstract

Hoffman showed a formula involving symmetric sums of multiple zeta values. In this report, we give their generalizations for triple and quadruple zeta values. We obtain identities involving “cyclic” sums of these values, and we see that obtained identities yield Hoffman’s formula for triple and quadruple zeta values. The results introduced in this report are included in author’s preprint “A parameterized generalization of the sum formula for quadruple zeta values” (arXiv:1210.8005 [math.NT]).

§ 1. 背景と結果

数学者であり物理学者でもあった Euler は後世に多大な業績を残しました（例えば、解析学における指数関数の公式、グラフ理論における一筆書きの問題、組み合わせ論における数の分割など）。多重ゼータ値は、その業績の 1 つであるリーマンのゼータ関数 $\zeta(s) := \sum_{m=1}^{\infty} 1/m^s$ の特殊値の一般化と考えられます（例えば $\zeta(2) = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \cdots = \pi^2/6$ ）。Euler 自身によっても特別な場合において研究されていた多重ゼータ値は、長い間数学者の記憶から忘れ去られていましたが、昨今になり整数論、代数幾何、結び目理論、量子物理などの様々な分野で現れ始め、盛んに研究されるようになっていきます。

多重ゼータ値は、正整数の組 $(l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ （ただし $l_1 \geq 2$ ）に対して、具体的には次のように定義されます：

$$(1.1) \quad \zeta(l_1, l_2, \dots, l_n) := \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{l_1} m_2^{l_2} \cdots m_n^{l_n}}.$$

Received November 1, 2013. Revised April 14, 2014.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 2000 Mathematics Subject Classification(s):

*National Institute of Informatics, 2-1-2 Hitotsubashi, Chiyoda-ku, Tokyo 101-8430, Japan
machide@nii.ac.jp

**JST, ERATO, Kawarabayashi Large Graph Project, c/o Global Research Center for Big Data Mathematics, Tokyo 101-8430, Japan

整数 $l = l_1 + \cdots + l_n$ と n をそれぞれ “重さ” と “深さ” と呼びます。

多重ゼータ値には非常に多くの公式があります。最も代表的な例の 1 つは、“和公式” ([2, 4, 9]) と呼ばれる次の公式 (1.2) です。その公式は、重さと深さを固定した多重ゼータ値の総和はオリジナルのリーマンのゼータ関数の特殊値と一致すること、を述べています。なお 2 重ゼータ値の場合 (深さが 2 の場合) は Euler [1] が既に示しています：

$$\begin{aligned}
 \zeta(l) &= \sum_{\substack{l_1 \geq 2, l_2 \geq 1 \\ (l=l_1+l_2)}} \zeta(l_1, l_2) \\
 &= \sum_{\substack{l_1 \geq 2, l_2, l_3 \geq 1 \\ (l=l_1+l_2+l_3)}} \zeta(l_1, l_2, l_3) \\
 (1.2) \quad &= \sum_{\substack{l_1 \geq 2, l_2, l_3, l_4 \geq 1 \\ (l=l_1+l_2+l_3+l_4)}} \zeta(l_1, l_2, l_3, l_4) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

どのような公式が価値のある式と考えるかどうかは、各々の価値観や審美眼によりますが、一般には、ある多重ゼータ値の線形結合がより簡単な多重ゼータ値 (例えばリーマンのゼータ関数の特殊値や深さがより小さい多重ゼータ値) で書き表せた時に、価値のある式とみなされるようです。そのようなものの一例として、Hoffman が示した、多重ゼータ値の対称和

$$(1.3) \quad \sum_{\sigma \in S^{(n)}} \zeta(l_{\sigma(1)}, \dots, l_{\sigma(n)}) \quad (l_1, \dots, l_n \geq 2)$$

を含む公式があります ([3])。ここで $S^{(n)}$ は n 次対称群です。また多重ゼータ値の収束性のために、対称和 (1.3) を考える時は $l_1, \dots, l_n \geq 2$ を仮定しています。

例えば深さが 2 の場合の Hoffman の公式は次のようになります：

$$\begin{aligned}
 \sum_{\sigma \in S^{(2)}} \zeta(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}) &= \zeta(l_1, l_2) + \zeta(l_2, l_1) \\
 (1.4) \quad &= \zeta(l_1)\zeta(l_2) - \zeta(l_1 + l_2).
 \end{aligned}$$

$A^{(n)}$ を n 次交代群とします。 $\langle \sigma \rangle$ を置換 σ で生成される巡回部分群とし、また $(i_1 \dots i_k)$ を巡回置換表示とします。簡略化のため、 $l_1, \dots, l_n$ の和を

$$l_{1\dots n} := l_1 + \cdots + l_n$$

と書くことにします。

深さが 3, 4 の場合の Hoffman の公式は

$$\sum_{\sigma \in S^{(3)}} \zeta(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)})$$

$$\begin{aligned}
(1.5) \quad &= \zeta(l_1)\zeta(l_2)\zeta(l_3) - \sum_{\sigma \in A^{(3)}} \zeta(l_{\sigma(1)\sigma(2)})\zeta(l_{\sigma(3)}) + 2\zeta(l_{123}), \\
&\sum_{\sigma \in S^{(4)}} \zeta(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}, l_{\sigma(4)}) \\
&= \zeta(l_1)\zeta(l_2)\zeta(l_3)\zeta(l_4) - \sum_{\sigma \in A^{(4)}/(12)(34)} \zeta(l_{\sigma(1)\sigma(2)})\zeta(l_{\sigma(3)})\zeta(l_{\sigma(4)}) \\
(1.6) \quad &+ \sum_{\sigma \in \langle(123)\rangle} \zeta(l_{\sigma(1)\sigma(2)})\zeta(l_{\sigma(3)\sigma(4)}) + 2 \sum_{\sigma \in \langle(1234)\rangle} \zeta(l_{\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)})\zeta(l_{\sigma(4)}) \\
&- 6\zeta(l_{1234}),
\end{aligned}$$

となります。深さが2の公式(1.4)よりも複雑になりますが、対称和がリーマンのゼータ関数の特殊値のみで書けることは共通しています。実は一般の深さ n でも同様のことが成り立ちます。詳細は [3] を参照してください。なお [3] とは異なる記号を使っていますので、参照する際はご注意ください。

本報告書では、公式 (1.5) と (1.6) を次の視点

(i) 対称和 $\rightarrow$ 巡回和

(ii) 多重ゼータ値 $\rightarrow$ 正規化多重ゼータ値

で拡張し、下記の公式 (1.9) と (1.10) を導く方法を説明します。

(i) について詳しく述べますと、(1.5) と (1.6) の左辺を次の巡回和に変更します：

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma \in \langle(123)\rangle} \zeta(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}) = \zeta(l_1, l_2, l_3) + \zeta(l_2, l_3, l_1) + \zeta(l_3, l_1, l_2), \\
&\sum_{\sigma \in \langle(1234)\rangle} \zeta(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}, l_{\sigma(4)}) \\
&= \zeta(l_1, l_2, l_3, l_4) + \zeta(l_2, l_3, l_4, l_1) + \zeta(l_3, l_4, l_1, l_2) + \zeta(l_4, l_1, l_2, l_3).
\end{aligned}$$

$\langle(123)\rangle$ と $\langle(1234)\rangle$ はそれぞれ $S^{(3)}$ と $S^{(4)}$ の巡回部分群なので、(1.9) と (1.10) の左剰余類の作用の和をとることにより、(1.5) と (1.6) を導くことができます（多少の計算が必要ですが）。従って、(1.9) と (1.10) は (1.5) と (1.6) の自然な拡張と考えられます。

(ii) についてですが、多重ゼータ値は (1.1) で定義されているため、 $l_1 = 1$ の時は発散してしまい定義できません。しかし $l_2, \dots, l_n$ は1でも定義できるので、 $l_1 = 1$ も定義できた方が引数の条件が対称になり何かと便利です。Ihara-Kaneko-Zagier [5] は、多重ポリログリズム

$$(1.7) \quad Li_{l_1, \dots, l_n}(z_1, \dots, z_n) := \sum_{m_1 > \dots > m_n > 0} \frac{z_1^{m_1-m_2} \dots z_{n-1}^{m_{n-1}-m_n} z_n^{m_n}}{m_1^{l_1} \dots m_{n-1}^{l_{n-1}} m_n^{l_n}} \quad (|z_i| < 1)$$

の漸近展開を巧みに使い、 $l_1 = 1$ の時でも $\zeta(l_1, \dots, l_n)$ を定義することに成功しました。(ここで言う成功の意味を大雑把に言いますと、積分と級数表示から得られる 2 種類のシャッフル積があるのですが、その内の積分シャッフル積と両立するように定義できたという意味です。) 新たに定義した多重ゼータ値を含めて、正規化多重ゼータ値と呼ぶことにします。またオリジナルと区別するため、記号 ‘ $\mathfrak{m}$ ’ を付けて

$$(1.8) \quad \zeta^{\mathfrak{m}}(l_1, \dots, l_n) \quad (l_1, \dots, l_n \geq 1)$$

と書くことにします。もちろん $l_1 > 1$ の時は $\zeta^{\mathfrak{m}}(l_1, \dots, l_n) = \zeta(l_1, \dots, l_n)$ となります。深さが小さい場合の具体的な正規化多重ゼータ値の値は、例えば [8] などをご覧ください。なお Ihara-Kaneko-Zagier はもう一つの定義方法も提案しています。(正規化多重ゼータ値に関する詳細は [5] をご覧ください。)

公式 (1.5) と (1.6) の一般化は、次のようになります：

定理 1.1. $l_1, l_2, l_3, l_4 \geq 1$ とする。

(i) $l_{123} = l_1 + l_2 + l_3 > 3$ の時、

$$(1.9) \quad \sum_{\sigma \in \langle (123) \rangle} \zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}) \\ = -\zeta^{\mathfrak{m}}(l_1)\zeta^{\mathfrak{m}}(l_2)\zeta^{\mathfrak{m}}(l_3) + \sum_{\sigma \in \langle (123) \rangle} \zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)})\zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(3)}) + \zeta^{\mathfrak{m}}(l_{123}).$$

(ii) $l_{1234} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 > 4$ の時、

$$(1.10) \quad \sum_{\sigma \in \langle (1234) \rangle} \zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}, l_{\sigma(4)}) \\ = \zeta^{\mathfrak{m}}(l_1)\zeta^{\mathfrak{m}}(l_2)\zeta^{\mathfrak{m}}(l_3)\zeta^{\mathfrak{m}}(l_4) + \sum_{\sigma \in \langle (1234) \rangle / (13)(24)} \zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)})\zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(3)}, l_{\sigma(4)}) \\ + \sum_{\sigma \in \langle (1234) \rangle} (\zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)})\zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(4)}) - \zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)})\zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(3)})\zeta^{\mathfrak{m}}(l_{\sigma(4)})) \\ - \zeta^{\mathfrak{m}}(l_{1234}).$$

§ 2. 証明の概略

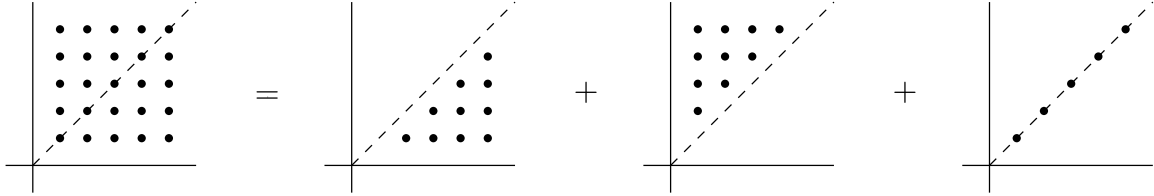
証明の大まかな流れは次のようになります：

1. 調和関係式と呼ばれる関係式から、多重ポリログリズムの等式を導く。
2. ポリログリズムの漸近展開を使い、(1.9) と (1.10) を導く。

以下ではこれらについて、3 重ゼータ値の公式 (1.9) の場合に限って軽く触れます。4 重ゼータ値の公式 (1.10) の場合も同様に示せますが、計算量はかなり増えます。詳細は [7] を参照してください。

§ 2.1. 調和関係式から等式を導く

調和関係式とは $\mathbb{Z}^n$ 上の部分格子点の分解から導かれる関係式です。例えば $\mathbb{Z}^2$ 上の分解



からは

$$\sum_{m_1, m_2 > 0} = \sum_{m_1 > m_2 > 0} + \sum_{m_2 > m_1 > 0} + \sum_{m_1 = m_2 > 0}$$

が、つまり

$$\begin{aligned} Li_{l_1}(z) Li_{l_2}(z) &= \sum_{m_1, m_2 > 0} \frac{z^{m_1+m_2}}{m_1^{l_1} m_2^{l_2}} \\ &= \sum_{m_1 > m_2 > 0} \frac{z^{m_1+m_2}}{m_1^{l_1} m_2^{l_2}} + \sum_{m_2 > m_1 > 0} \frac{z^{m_1+m_2}}{m_2^{l_2} m_1^{l_1}} + \sum_{m=m_1=m_2 > 0} \frac{z^{2m}}{m^{l_1+l_2}} \\ &= Li_{l_1, l_2}(z, z^2) + Li_{l_2, l_1}(z, z^2) + Li_{l_1+l_2}(z^2) \end{aligned}$$

が導けます。同じようにして次がわかります：

命題 2.1. $l_1, l_2, l_3 \geq 1$ とする。次が成り立つ。

$$(2.1) \quad Li_{l_1, l_2}(z, z^2) Li_{l_3}(z) = \sum_{\sigma \in \{e, (132), (23)\}} Li_{l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}}(z, z^2, z^3) + Li_{l_{13}, l_2}(z^2, z^3) + Li_{l_1, l_{23}}(z, z^3),$$

$$\begin{aligned} &Li_{l_1}(z) Li_{l_2}(z) Li_{l_3}(z) \\ &= \sum_{\sigma \in S(3)} Li_{l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}}(z, z^2, z^3) \\ (2.2) \quad &+ \sum_{\sigma \in \langle (123) \rangle} Li_{l_{\sigma(1)\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}}(z^2, z^3) + \sum_{\sigma \in \langle (123) \rangle} Li_{l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)\sigma(3)}}(z, z^3) + Li_{l_{123}}(z^3). \end{aligned}$$

§ 2.2. 漸近展開から公式 (1.9) を導く

$F : \mathbb{R} \cap [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ を、 $\mathbb{R} \cap [0, 1)$ 上で連続な複素関数と仮定します ($z = 1$ での連続性は仮定しません)。更に $F(z)$ は、ある多項式 $P(T)$ と正の実数 J が存在して、漸近的性質

$$(2.3) \quad F(z) - P(T) \big|_{T=-\log(1-z)} = O((1-z)(\log(1-z))^J) \quad (z \nearrow 1)$$

が成り立つとします。ここで O はランダウの記号で、 $z \nearrow 1$ は z が実数上を 1 に増加する形で近づく片側極限を意味します。log 関数の性質により

$$\lim_{z \nearrow 1} |\log(1-z)| = \infty,$$

$$\lim_{z \nearrow 1} (1-z)(\log(1-z))^J = 0,$$

が成り立ちますので、(2.3) の左辺にある多項式 $P(T)|_{T=-\log(1-z)}$ の 1 次以上の部分が、 $F(z)$ の発散部分を表現しています。さてこのような状況の時、 C_0 を漸近展開の定数項を抜き取る関数、つまり

$$C_0(F(z)) := P(0)$$

と定めます。Ihara-Kaneko-Zagier [5] は、 $Li_{l_1, \dots, l_n}(z, \dots, z)$ が漸近的性質 (2.3) を満たすことを示し、正規化多重ゼータ値を

$$(2.4) \quad \zeta^{\text{III}}(l_1, \dots, l_n) = C_0(Li_{l_1, \dots, l_n}(z, \dots, z))$$

と決めました。Ihara-Kaneko-Zagier の (2.4) の証明方法を参考にすると次が導けます：

命題 2.2 ([6]). $l_1, l_2, l_3 \geq 1$ とする。次が成り立つ。

$$(2.5) \quad C_0(Li_{l_1, l_2}(z, z^2)) = \zeta^{\text{III}}(l_1, l_2) + \begin{cases} 0 & (l_1 > 1 \text{ or } l_2 > 1), \\ -\frac{\zeta(2)}{2} & (l_1 = l_2 = 1), \end{cases}$$

$$(2.6) \quad \begin{aligned} & C_0(Li_{l_1, l_2, l_3}(z, z^2, z^3)) \\ &= \zeta^{\text{III}}(l_1, l_2, l_3) + \begin{cases} 0 & (l_1 > 1 \text{ or } l_2 > 1), \\ -\frac{\zeta(2)\zeta(l_3-2)}{2} & (l_1 = l_2 = 1 \text{ and } l_3 > 1). \end{cases} \end{aligned}$$

命題 2.1 と 2.2 を使って (1.9) を導いてみましょう。最初に (2.1) に $\langle(123)\rangle$ の元を作用させた総和と (2.2) の差を考えます。つまり（厳密には式として正しくありませんが）

$$(2.2) - \sum_{\tau \in \langle(123)\rangle} ((2.1) \text{ に } \tau \text{ を作用させた等式})$$

を考えます。これから次の等式が導けます（2 重ポリログリズムの部分がなくなるところが味噌です）：

$$\begin{aligned} & Li_{l_1}(z) Li_{l_2}(z) Li_{l_3}(z) - \sum_{\tau \in \langle(123)\rangle} Li_{l_{\tau(1)}, l_{\tau(2)}}(z, z^2) Li_{l_{\tau(3)}}(z) \\ &= \sum_{\sigma \in S(3)} Li_{l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}}(z, z^2, z^3) \end{aligned}$$

$$- \sum_{\tau \in \langle (123) \rangle} \sum_{\sigma \in \{e, (132), (23)\}} Li_{l_{\tau\sigma(1)}, l_{\tau\sigma(2)}, l_{\tau\sigma(3)}}(z, z^2, z^3) + Li_{l_{123}}(z^3).$$

整理すると

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma \in \langle (123) \rangle} Li_{l_{\sigma(1)}, l_{\sigma(2)}, l_{\sigma(3)}}(z, z^2, z^3) \\ &= -Li_{l_1}(z)Li_{l_2}(z)Li_{l_3}(z) + \sum_{\tau \in \langle (123) \rangle} Li_{l_{\tau(1)}, l_{\tau(2)}}(z, z^2)Li_{l_{\tau(3)}}(z) + Li_{l_{123}}(z^3) \end{aligned}$$

が得られます。この等式の $z = 1$ の漸近展開の定数項と命題 2.2 から、(1.9) が得られます。

公式 (1.9) と (1.10) を一般の深さ n に拡張することがこれからの研究課題です。本報告書では触れなかった深さ 4 の場合でもかなりの計算量が必要となりますので、一般の n の場合の公式を証明するには、計算量を減らす新しいアイデアが必要となります。

References

- [1] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. **20**, 1775, 140–186 ; reprinted in Opera Omnia Ser. I, vol. 15, Teubner, Berlin 1927, pp. 217–267.
- [2] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, Analytic Number Theory(Kyoto, 1996), 95–101, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [3] M. E. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152**, 1992, 275–290.
- [4] M. E. Hoffman and C. Moen, *Sums of triple harmonic series*, J. Number Theory **60**, 1996, 329–331.
- [5] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compositio Math. **142**, 2006, 307–338.
- [6] T. Machide, *Extended double shuffle relations and the generating function of triple zeta values of any fixed weight*, to appear in Kyushu J. Math.
- [7] T. Machide, *A parameterized generalization of the sum formula for quadruple zeta values*, preprint; arXiv:1210.8005 [math.NT], 2012, submitted.
- [8] 町出智也, *Quadruple zeta values and asymptotic properties of quadruple polylogarithms*, 第 17 回早稲田大学整数論研究集会報告集
- [9] D. Zagier, *Multiple zeta values*, unpublished manuscript, Bonn 1995.