RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B68 (2017), 157–167

多重ゼータ値の関係式の関係について
(On inclusion properties for relations of multiple zeta values: a survey)

By

田中 立志 *
(Tanaka Tatsushi)

Abstract

We give a summary on several relations for multiple zeta values (duality formula, several variations of sum formulas, Ohno-Zagier relation, Hoffman relation, Ohno relation, extended double shuffle relation, derivation relation, quasi-derivation relation, Kawashima relation and associator relation) under the algebraic setup introduced by Hoffman. Also we draw a chart in which we can see inclusion properties among them.

§ 1. 序文

$k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ $(k_1 > 1)$ に対し, 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$ は収束級数

$$\zeta(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{m_1 > \ldots > m_n > 0} \frac{1}{{m_1}^{k_1} \cdots {m_n}^{k_n}}$$

で定義される. 多重ゼータ値 $\zeta(k_1, \ldots, k_n)$ (あるいはインデックス $(k_1, \ldots, k_n)$) に対し,

$$k_1 + \cdots + k_n,\ n,\ \#\{i \mid k_i > 1\}$$

をそれぞれその重さ, 深さ, 高さという. 深さ 1 の多重ゼータ値はリーマンゼータ値である. すべての多重ゼータ値が生成する $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{Z}$ とすれば, $\mathcal{Z}$ にはいわゆる調和積とシャッフル積の 2 つの積構造が入り, 重さで次数がつく次数つき代数だろうと

Received July 12, 2014. Revised March 31, 2015.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11M32
Key Words: 制限和公式, 導分関係式.
本研究は京都産業大学総合学術研究所の研究活動によるものです
* 〒 603-8555 京都市北区上賀茂本山 京都産業大学
e-mail: `t.tanaka@cc.kyoto-su.ac.jp`

思われている.(各次数ごとの空間の直和に分解できるかどうかはわかっていない.)この $\mathcal{Z}$ を多重ゼータ値代数と呼んでいる. 重さが k のすべての多重ゼータ値が生成する $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間の次元に関する予想が Zagier[32] により与えられて以来多重ゼータ値の研究が急速に進展した. 多重ゼータ値代数の次元を決定する問題は, 多重ゼータ値の $\mathbb{Q}$ 上の線形関係式をすべて求める問題とも解釈できる. これまでに多重ゼータ値のさまざまな関係式がさまざまな手法で証明されてきたが, われわれの目的意識は予想次元まで落とす関係式を決定することにある.(次元予想の下限, すなわち値の $\mathbb{Q}$ 上の独立性に関する問題も大変重要であるが, 本稿でこれを議論することはない.)

本稿では, これまでにわかっている関係式を系統的に整理し, 包含関係を図にまとめることにする.

§2. 多重ゼータ値の関係式の関係

§2.1. 代数的定式化

Hoffman[9] による代数的定式化について述べる.(詳細はたとえば [12] を参照.)x, y を不定元とする $\mathbb{Q}$ 上の 2 変数非可換多項式環を $\mathfrak{H} := \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ とし, その部分環 $\mathfrak{H}^1$, $\mathfrak{H}^0$ をそれぞれ $\mathfrak{H}^1 := \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y$, $\mathfrak{H}^0 := \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$ とおく.($\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^1 \supset \mathfrak{H}^0$.)$\mathfrak{H}^1$ には調和積 $*$ という可換な積が定義され, $\mathfrak{H}^0$ はその可換代数の部分代数になる. それらをそれぞれ $\mathfrak{H}^1_*$, $\mathfrak{H}^0_*$ と書くことにする. $\mathfrak{H}$ にはシャッフル積 $ш$ という可換な積が定義され, $\mathfrak{H}^1$, $\mathfrak{H}^0$ はそれぞれその可換代数の部分代数になる. それらをそれぞれ $\mathfrak{H}_{ш}$, $\mathfrak{H}^1_{ш}$, $\mathfrak{H}^0_{ш}$ と書くことにする.

写像 $Z : \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を

$$Z(x^{k_1-1}y \cdots x^{k_n-1}y) = \zeta(k_1, \ldots, k_n) \quad (k_1 > 1),$$
$$Z(1) = 1$$

および $\mathbb{Q}$-線形性で定義する. このとき, $\ker Z$ の元が多重ゼータ値の間の線形関係式を与えている. 写像 Z は調和積 $*$ について準同型になっている. これを調和積公式と呼ぶ. また, 写像 Z はシャッフル積 $ш$ についても準同型になっている. これをシャッフル積公式と呼ぶ.

§2.2. 既知の関係式とそれらの間の関係

2.2.1. 双対公式

τ を $\mathfrak{H}$ 上の反自己同型(すなわち, 任意の $v, w \in \mathfrak{H}$ に対して $\tau(v + w) = \tau(v) + \tau(w)$, $\tau(vw) = \tau(w)\tau(v)$ をみたしている全単射)で $\tau(x) = y$, $\tau(y) = x$ で定まるものとする. このとき, 双対公式は次で与えられる.

定理 2.1. $(1 - \tau)(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

この公式は多重ゼータ値の反復積分表示における簡単な変数変換から得られる. 大野関係式やアソシエーター関係式の一部であることも知られているが, これらはいずれも積分表示が鍵となる. 川島関係式に帰着することもできる. 川島関係式の証明は, 多重ゼータ値の級数表示に強く依存している.

双対公式は一般複シャッフル関係式にも帰着できると予想されているが, 未解決である. (梶川 [13] に部分的な結果がある.)

2.2.2. 和公式

定理 2.2 ([7, 33]). 任意の $1 \leq n < k$ に対し,

$$x(x^{k-n-1} ш\, y^{n-1})y - x^{k-1}y \in \ker Z$$

が成り立つ.

これは和公式と呼ばれている. 和公式は Granville や Zagier により示され, のちにさまざまな拡張がなされた.

2.2.3. 大野-Zagier の関係式

$n+s \leq k$, $1 \leq s \leq n$ をみたす任意の k, n, $s \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し,

$$W(k,n,s) := \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_s=k-n \\ n_1+\cdots+n_s=n \\ m_1,\ldots,m_s,n_1,\ldots,n_s \geq 1}} x^{m_1}y^{n_1}\cdots x^{m_s}y^{n_s} \in \mathfrak{H}^0$$

とおく.

定理 2.3 ([23]). 次式が成り立つ.

$$\sum_{\substack{n+s\leq k \\ 1\leq s\leq n}} Z(W(k,n,s))u^{k-n-s}v^{n-s}t^{s-1}$$
$$= \frac{1}{uv-t}\left\{1-\exp\left(\sum_{j=2}^{\infty}\frac{Z(x^{j-1}y)}{j}(u^j+v^j-\alpha^j-\beta^j)\right)\right\}.$$

ただし, α, β は $\alpha+\beta=u+v$, $\alpha\beta=t$ で定まる.

重さ, 深さ, 高さを固定した多重ゼータ値ひとつずつの和がリーマンゼータ値の多項式で書ける, というわけである.

大野-Zagier の関係式は双対公式や和公式をも含む族であり, 一般複シャッフル関係式に含まれていることが Li[18] によって示されている. また, 高さの概念を一般化した場合の結果が [19] にある.

2.2.4. 制限和公式

制限和公式と呼ばれている関係式は [21, 20, 8, 31] などいろいろある．ここで紹介するのは, Eie, Liaw, Ong らにより得られた（[1] にも別証明がある）次のものである．（ただし, 代数的定式化の記号を用いて記した.）

定理 2.4 ([3])**.** $a, b \geq 0,\ k \geq a+b+2$ に対し，

$$x(x^{k-a-b-2} ш\ y^b)y^{a+1} - x^{k-a-b-1}(x^b ш\ y^a)y \in \ker Z$$

が成り立つ.

この制限和公式は, 導分関係式に含まれていることが証明できる．（したがって, 大野関係式にも含まれている.）すなわち,

定理 2.5 ([27])**.** $a, b \geq 0,\ k \geq a+b+2$ に対して，

$$x(x^{k-a-b-2} ш\ y^b)y^{a+1} - x^{k-a-b-1}(x^b ш\ y^a)y \ \in\ \sum_{n\geq 1} \partial_n(x\mathfrak{H}y)$$

が成り立つ.

注意. 「高さ 1 の任意の双対インデックスを用意して, それに任意の自然数分, 重みを追加するという大野関係式を作り, 一辺はそのまま, もう一辺のみデュアルに引っくり返すだけ」で得られるというご指摘をのちに大野泰生氏からいただいた．ご指摘いただいたことをここに感謝したい．すなわち, 双対公式を仮定すれば, 大野関係式に含まれていることは容易にわかるが, 双対公式を仮定せずとも導分関係式（したがって大野関係式）に含まれていることを示すことができる.

2.2.5. 巡回和公式

巡回和公式は Hoffman-大野 [11] で最初に示され, のちに田中-若林 [28] で川島関係式に帰着させる別証明がなされた．ここでは後者の中で使われた代数的表記を用いて述べる.

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $\mathfrak{H}$ から $\mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ への作用 $\diamond$ を

$$a \diamond (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes aw_{n+1},$$
$$(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) \diamond b = w_1 b \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}$$

で定義する．作用 $\diamond$ は $\mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ 上に $\mathfrak{H}$-両側加群の構造を与える．写像 $\mathcal{C}_n : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ を,

$$\mathcal{C}_n(x) = -\mathcal{C}_n(y) = x \otimes (x+y)^{\otimes(n-1)} \otimes y$$
$$\mathcal{C}(ww') = \mathcal{C}_n(w) \diamond w' + w \diamond \mathcal{C}_n(w') \ \ (w,\, w' \in \mathfrak{H})$$

で定義する．また, 写像 $M_n : \mathfrak{H}^{\otimes(n+1)} \to \mathfrak{H}$ をテンソル積を忘れる写像

$$M_n(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) = w_1 \cdots w_{n+1}$$

で定義し, $\rho_n := M_n \mathcal{C}_n$ とおく．さらに, $\check{\mathfrak{H}}^1$ をワード 1 と $z_{k_1} \cdots z_{k_l}$（ただし, ある番号 q に対し $k_q > 1$）で生成される $\mathfrak{H}^1$ の部分代数とする．

定理 2.6 ([11, 28])**.**　任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し,

$$\rho_n(\check{\mathfrak{H}}^1) \subset \ker Z$$

が成り立つ．

定理中の式の $n = 1$ のときが巡回和公式である．([24] も参照.)

巡回和公式は, 和公式のひとつの一般化である．川島関係式に含まれていることが示されている．また, 大野関係式との包含関係がないことも実験的にわかっている．一般複シャッフル関係式やアソシエーター関係式に含まれているかどうかはまだ知られていないと思われる．

2.2.6.　Hoffman の関係式

Hoffman[10] の中で最初に示された関係式である．後述の導分関係式（2.2.9 節）の一部であるため, そこに含める形で記すことにする．

2.2.7.　大野関係式

$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\sigma_l(x^{k_1-1}y \cdots x^{k_n-1}y) = \sum_{\substack{\epsilon_1+\cdots+\epsilon_n=l \\ \epsilon_1,\ldots,\epsilon_n \geq 0}} x^{k_1+\epsilon_1-1}y \cdots x^{k_n+\epsilon_n-1}y$$

とおく．また τ は 2.2.1 節のものとする．

定理 2.7 ([22])**.**　任意の $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し,

$$\sigma_l(1-\tau)(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$$

が成り立つ．

[12] も参照されたい．定理中の式において $l = 0$ のときは双対公式である．また, 高さ 1 の $\mathfrak{H}^0$ のワードに対する大野関係式は和公式である．大野関係式は後述の導分関係式（したがって Hoffman の関係式）も含んでいる．

2.2.8.　一般複シャッフル関係式

一般複シャッフル関係式は井原-金子-Zagier[12] で証明された．詳細はその論文を参照していただきたい．

$\mathbb{Q}$-代数準同型 $Z^* : \mathfrak{H}^1_* \cong \mathfrak{H}^0_*[y] \to \mathbb{R}[T]$ を, y の各係数 $(\in \mathfrak{H}^0_*)$ は Z で移し, y を変数 T に置き換える写像と定義する．また, $\mathrm{reg}_* : \mathfrak{H}^1_* \to \mathbb{R}$ を Z^* で移した多項式の定数項とする．すなわち, $w \in \mathfrak{H}^1_*$ に対し, $\mathrm{reg}_*(w) := Z^*(w)\big|_{T=0}$.

$\mathbb{Q}$-代数準同型 $Z^{ш} : \mathfrak{H}^1_{ш} \cong \mathfrak{H}^0_{ш}[y] \to \mathbb{R}[T]$ を, y の各係数 $(\in \mathfrak{H}^0_{ш})$ は Z で移し, y を変数 T に置き換える写像と定義する．また, $\mathrm{reg}_{ш} : \mathfrak{H}^1_{ш} \to \mathbb{R}$ を $Z^{ш}$ で移した多項式の定数項とする．すなわち, $w \in \mathfrak{H}^1_{ш}$ に対し, $\mathrm{reg}_{ш}(w) := Z^{ш}(w)\big|_{T=0}$.

定理 2.8 ([12])**.** 任意の $w_1 \in \mathfrak{H}^1$ と任意の $w_0 \in \mathfrak{H}^0$ に対し,

$$Z^*(w_1 ш w_0 - w_1 * w_0) = 0 \quad \text{とくに,} \ \mathrm{reg}_*(w_1 ш w_0 - w_1 * w_0) \in \ker Z,$$
$$Z^{ш}(w_1 ш w_0 - w_1 * w_0) = 0 \quad \text{とくに,} \ \mathrm{reg}_{ш}(w_1 ш w_0 - w_1 * w_0) \in \ker Z$$

が成り立つ．

一般複シャッフル関係式は大野関係式や大野-Zagier 関係式を含んでいることが知られている（[12, 18]）．また, 後述のアソシエーター関係式に含まれていることが知られている（[29, 6]）．

一般複シャッフル関係式は多重ゼータ値の間の全関係式を与えているだろうと予想されているが, 巡回和公式, 一般導分関係式が一般複シャッフル関係式に含まれているかどうか, まだわかっていない．

2.2.9. 導分関係式

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $\mathbb{Q}$-線形写像 $\partial_n : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を

$$\partial_n(x) = -\partial_n(y) = x(x+y)^{n-1}y,$$
$$\partial_n(ww') = \partial_n(w)w' + w\partial_n(w') \quad (w,\, w' \in \mathfrak{H})$$

で定める．(第 2 式をみたす写像を導分と呼ぶ.)

定理 2.9 ([12])**.** 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し,

$$\partial_n(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$$

が成り立つ．($n=1$ のときには Hoffman の関係式になっている.)

導分関係式は一般複シャッフル関係式の一部として [12] に登場した．Hoffman の関係式の拡張であり, 大野関係式に含まれている．導分関係式と双対公式とをあわせた族は大野関係式と同値である．導分関係式は一般複シャッフル関係式のみならず, 川島関係式にもアソシエーター関係式にも含まれている．

2.2.10. 一般導分関係式

$n \in \mathbb{Z}_{>0}$, $c \in \mathbb{Q}$ に対し, $\partial_n^{(c)} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を

$$\partial_n^{(c)} = \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{ad}^{n-1}(\theta^{(c)})(\partial_1)$$

で定義する. ただし, $\theta^{(c)}$ は $\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$-線形写像で,

$$\theta^{(c)}(x) = x^2 + \frac{1}{2}(xy+yx),\ \theta^{(c)}(y) = y^2 + \frac{1}{2}(xy+yx),$$
$$\theta^{(c)}(ww') = \theta^{(c)}(w)w' + w\theta^{(c)}(w') + c\partial_1(w)H(w') \quad (w,\, w' \in \mathfrak{H})$$

をみたすものである. 定義中の H は $\mathfrak{H}$ 上の導分で, ワードを次数倍するというものとして定義される. また, $\mathrm{ad}(\theta)(\partial) = [\theta, \partial] = \theta\partial - \partial\theta$ であり, ∂_1 は 2.2.9 節の写像の $n=1$ のものである. 注意として, $\partial_n^{(0)} = \partial_n$ となることがわかる.

定理 2.10 ([26]). 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対し,

$$\partial_n^{(c)}(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$$

が成り立つ.

一般導分関係式は導分関係式の拡張として金子 [14] において予想され, 田中 [26] で川島関係式に含まれることが示された. 大野関係式との間に包含関係がないことは（実験的に）わかっている.

一般導分関係式と双対公式をあわせた族は次節に述べる川島関係式の線形部分と同値であろうと予想されている. 一般導分関係式が一般複シャッフル関係式やアソシエーター関係式に含まれているかどうかなど, ほかの関係式との関係はまだほとんどわかっていない.

2.2.11. 川島関係式

$p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ および $w, w' \in \mathfrak{H}^1$ に対し, 積 $\dot{*}$ を $z_p w \,\dot{*}\, z_q w' = z_{p+q}(w * w')$ で定義する. また, $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{H})$ を $\varphi(x) = x+y,\ \varphi(y) = -y$ で定まるものとする.

定理 2.11 ([16]). $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $w, w' \in \mathfrak{H}y$ に対し,

$$\sum_{\substack{p+q=m \\ p,q \geq 1}} Z\left(\varphi(w) \,\dot{*}\, y^p\right) Z\left(\varphi(w') \,\dot{*}\, y^q\right) = Z\left(\varphi(w * w') \,\dot{*}\, y^m\right)$$

が成り立つ.

とくに, $m=1$ のとき

$$L_x\varphi\left(\mathfrak{H}y * \mathfrak{H}y\right) \subset \ker Z$$

が成り立つ.（ただし, L_x は $L_x(w) = xw$ ($w \in \mathfrak{H}$) なる $\mathbb{Q}$-線形写像である.）この $m = 1$ の部分は線形関係式の族であり, 川島関係式の線形部分と呼んでいる.

川島関係式の線形部分は巡回和公式や大野関係式, 一般導分関係式を含んでいる. $m \geq 2$ で多重ゼータ値の積が現れるが, 積をシャッフル積で展開すれば, 線形部分とあわせて, 多重ゼータ値の全関係式を与えているだろうことが予想できる.（[26] も参照. $m \geq 3$ の部分は考えなくとも $m = 1, 2$ の部分だけで全関係式を与えているようである.）

2.2.12. アソシエーター関係式

通常 Drinfel'd アソシエーターは KZ 方程式の解を用いて定義するが, ここでは Le-村上 [17] による具体的な構成的表示を定義として採用することにする.

$\mathbb{C}$-代数準同型 $g_1 : \mathbb{C}\langle\langle X, Y\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}[[\xi, \eta]]\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ を

$$X \longmapsto X - \xi,\ Y \longmapsto Y - \eta$$

で定まるものとし, $\mathbb{C}$-線型写像 $g_2 : \mathbb{C}[[\xi, \eta]]\langle\langle X, Y\rangle\rangle \longrightarrow \mathbb{C}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ を

$$\eta^p M \xi^q \longmapsto Y^p M X^q \quad (M \text{ は } X, Y \text{ のワード})$$

で定まるものとする. また, $\Phi^0(X, Y) \in \mathbb{R}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ を

$$\Phi^0(X, Y) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 \geq 2 \\ k_2, k_3, \ldots, k_n \geq 1}} (-1)^n \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) X^{k_1 - 1} Y X^{k_2 - 1} Y \cdots X^{k_n - 1} Y$$

とおく. このとき, Drinfel'd アソシエーター $\Phi(X, Y)$ は

$$\Phi(X, Y) = g_2 \circ g_1(\Phi^0(X, Y))$$

で与えられる. Drinfel'd アソシエーター の KZ 方程式を用いた一般的な定義についてはたとえば [2, 15] などを参照されたい.

$U\mathfrak{F}_2 := \mathbb{C}\langle\langle X_0, X_1\rangle\rangle$ に余積 Δ を

$$\Delta(X_i) = X_i \otimes 1 + 1 \otimes X_i \quad (i = 1, 2)$$

で定義する. また, $U\mathfrak{B}_5$ を $\mathbb{C}\langle\langle X_{ij}\rangle\rangle_{1 \leq i, j \leq 5}$ を次の関係で割った商環とする：

- $X_{ii} = 0 \quad (1 \leq i \leq 5)$,
- $X_{ij} = X_{ji} \quad (1 \leq i, j \leq 5)$,
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} X_{ij} = 0 \quad (1 \leq i \leq 5)$,
- $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \phi$ のとき, $[X_{ij}, X_{kl}] = 0$.

定理 2.12 ([2])**.** $\Phi = \Phi(X, Y)$ について, 以下が成り立つ.

(1) $\Phi \in U\mathfrak{F}_2$ は群的である. すなわち,

$$\Delta(\Phi) = \Phi \hat{\otimes} \Phi.$$

ただし, $\hat{\otimes}$ は完備化されたテンソル積を表す.

(2) $\Phi(X_0, X_1)\Phi(X_1, X_0) = 1$.

(3) $A + B + C = 0$ のとき,

$$e^{i\pi A}\Phi(C, A)e^{i\pi C}\Phi(B, C)e^{i\pi B}\Phi(A, B) = 1.$$

(4) $U\mathfrak{B}_5$ において,

$$\Phi(X_{12}, X_{23})\Phi(X_{34}, X_{45})\Phi(X_{51}, X_{12})\Phi(X_{23}, X_{34})\Phi(X_{45}, X_{51}) = 1.$$

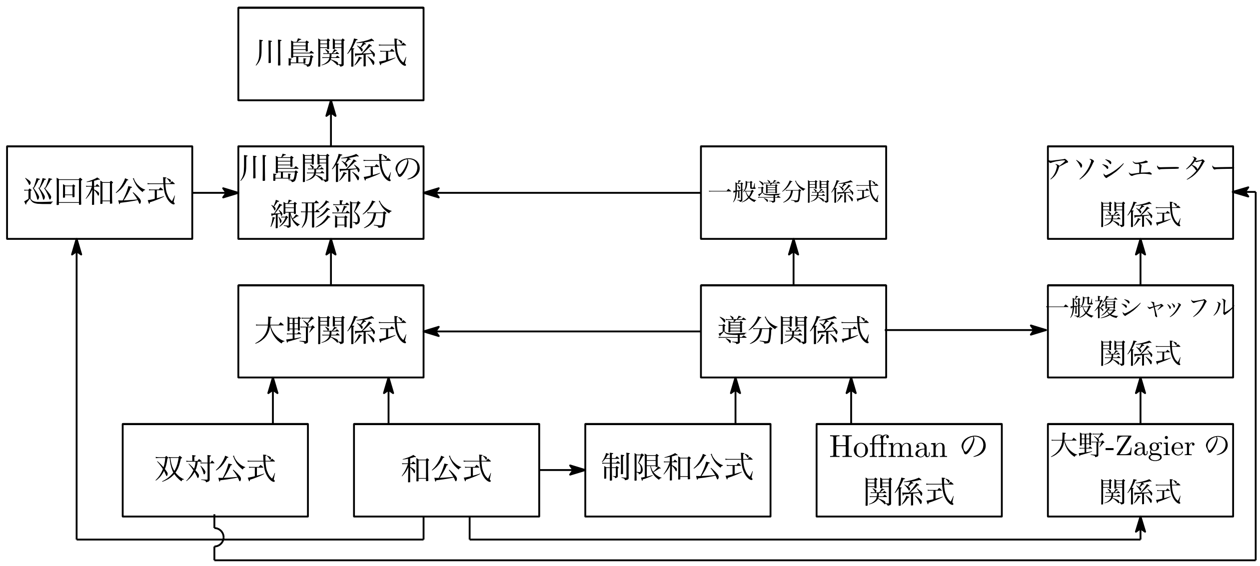
[4, 25] も参照されたい.

定理の (2) の式は二項関係式と呼ばれ, (1) の群的構造を仮定すれば, 多重ゼータ値の双対公式と同値である. また, (1) の群的構造を仮定すれば, (3) の六項関係式は (4) の五項関係式に含まれることが古庄 [5] にて示されている. アソシエーター関係式は一般複シャッフル関係式や Brown-Zagier 公式を含むことが知られている（[6, 30]）.

アソシエーター関係式と川島関係式の関係はまだわかっていない.

§ 2.3. 図：関係式の包含関係

以上に述べた関係式族について既知の包含関係を図解する. 図中の矢印 $A \to B$ は A が B に包含されていることを表す.



アソシエーター関係式, 一般複シャッフル関係式および川島関係式はすべて同値ではないかと予想されている. さらにこれらはそれぞれが多重ゼータ値代数の次元を予想次元まで落とす関係式族だろうと目されているが, 未解決である.

References

[1] Chang, C., *Some new proofs of the sum formula and the restricted sum formula*, Tamkang J. Math. **44** (2013), 123–129.

[2] Drinfel'd, V. G., *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$)*, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860.

[3] Eie, M., Liaw, W. and Ong, Y. L., *A restricted sum formula for multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009) 908–921.

[4] Furusho, H., *The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), 695–720.

[5] ——, *Pentagon and hexagon equations*, Annals of Mathematics, **171** (2010), 545–556.

[6] ——, *Double shuffle relation for associators*, Annals of Math. **174** (2011), 341–360.

[7] Granville, A., *A decomposition of Riemann's zeta-function*, London Math. Soc. Lecture note Ser. **247**, Cambridge (1997) 95–101.

[8] Guo, L. and Lei, P., *Sixfold restricted sum forumla for multiple zeta values at even integers*, J. Lanzhou U. (Nat. Sci.) **49** (2013), 100–102.

[9] Hoffman, M., *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra **194** (1997) 447–495.

[10] ——, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math. **152** (1992), 275–290.

[11] —— and Ohno, Y., *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra **262** (2003), 332–347.

[12] Ihara, K., Kaneko, M. and Zagier, D., *Derivation and double shuffle relation for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), 307–338.

[13] Kajikawa, J., *Duality and double shuffle relations of multiple zeta values*, J. Number Theory, **121** (2006), 1–6.

[14] Kaneko, M., *On an extension of the derivation relation for multiple zeta values*, in The Conference on L-Functions (Fukuoka, 2006), L. Weng and M. Kaneko (eds.), World Scientific, Singapore, 2007, 89–94.

[15] Kassel, C., *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics **155**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[16] Kawashima, G., *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 755–788.

[17] Le, T. Q. T. and Murakami, J., *Kontsevich's integral for the Kauffman polynomial*, Nagoya Math. J. **142** (1996), 39–65.

[18] Li, Z., *Regularized double shuffle and Ohno-Zagier relations of multiple zeta values*, J. Number Theory **133** (2013), 596–610.

[19] ——, *Higher order shuffle regularization of multiple zeta values*, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 2321–2333.

[20] Machide, T., *Some restricted sum formulas for double zeta values*, Proc. Japan Acad., Ser. A, **89** (2013), 51–54.

[21] Nakamura, T., *Restricted and weighted sum formulas for double zeta values of even weight*, Siauliai Mathematical Seminar. (Special issue celebrating the 60th birthday of Professor Antanas Laurincikas). **4** (2009), 151–155.

[22] Ohno, Y., *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.

[23] —— and Zagier, D., *Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height*, Indag. Math., **12** (2001), 483–487.

[24] Saito, S., Tanaka, T. and Wakabayashi, N., *Combinatorial remarks on the cyclic sum theorem for multiple zeta values*, J. Integer Sequences **14** (2011), art. 11.2.4 (20 pp).

[25] Soudères, I., *Explicit associator relations for multiple zeta values*, Math. J. Okayama Univ. **55** (2013), 1–52.

[26] Tanaka, T., *On the quasi-derivation relation for multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 2021—2034.

[27] ——, *Restricted sum formula and derivation relation for multiple zeta values*, preprint, arXiv:1303.0398.

[28] —— and Wakabayashi, N., *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. Algebra **323** (2010), 766–778.

[29] Terasoma, T., *Geometry of multiple zeta values*, in ICM (Madrid, 2006), Vol. II, European Mathematical Society, Zürich, 2006, 627–635.

[30] ——, *Brown-Zagier relation for associators*, preprint, arXiv:1301.7474.

[31] Yuan, H. and Zhao, J., *Restricted sum formula of multiple zeta values*, preprint, arXiv:1303.3607.

[32] Zagier, D., *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., **120**, Birkhäuser, Basel, 1994.

[33] ——, *Multiple zeta values*, Unpublished manuscript, Bonn (1995).