RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B69 (2018), 1-15

正負術及其在韓日之流傳：以黃胤錫 vs. 建部賢弘為例

Zhengfu Shu and Its Transmission in Korea and Japan: Hwang Yun-sok vs. Takebe Katahiro

洪萬生

Wann-Sheng Horng*

Abstract

Suanxue qimeng 算學啟蒙 (1299) by Zhu Shijie 朱世傑 in thirteenth-century China is one of the mathematical texts which made great influence over Korean and Japanese mathematics. A prior question is in the process of transmission, how mathematician of these two cultures accommodated the *zhengfu shu* 正負術 and its application in the text, which deserves attention due to the rule's difficulty to comprehend. By adopting a comparative history approach, I will in the article investigate how Korean Hwang Yun-sok 黃胤錫 and Japanese Takebe Katahiro 建部賢弘 got to understand the *zhengfu shu.* The texts of mathematics under study are Hwang Yun-sok's *Sanhak ibmun* 算學入門 (1744) and Takebe Katahiro's *Sangaku keimo genkai taisei* 算學啟蒙諺解大成 (1690) respectively. Both of their demonstrations and arguments in the subject apparently are beneficial to our better understanding of the transmission issues in the history of mathematics in East Asia.

§1. 前言

在《九章算術》卷八中，（伴隨「方程術」出現的）「正負術」之「正確」版本，目前被認為應該是如下所示：

正負術曰：同名相除，異名相益。正無人負之，負無人正之。其異名相除，同名相益。

Received December 1, 2017.
2010 Mathematics Subject Classification: 01A13
Key Word: History of Korean Mathematics,

* 台灣師範大學數學系 National Taiwan Normal University, 88, See.4, Ting-jou Road. Taipei, Taiwan 11677 R.O.C
horng@math.ntnu.edu.tw

正無人正之，負無人負之。[1]

所謂正負術，是一個「等價於」現代正負數的加減法則，被公認為數學史上最早出現的案例。[2]不過，在 2010 年以前，中算史家似乎都未曾深究它的真實版本為何。他們都只是接受清代學者戴震的校勘 – 「入原本訛作人」，也就是，上引述文中的「無人」一律作「無入」，至少是一般中算史家（通史）著述的共同主張。直到 2010 年，史家郭書春才在他的《九章算術譯注》中，明確地指出原來目前通行版本中的「無入」，乃是古文謬刻的結果。[3]

其實，針對戴震的校勘，中國清中葉學者如李潢或汪萊並不同意，只可惜未曾引起應有的迴響。[4]另一方面，朱世傑的《算學啟蒙》〈總括〉「明正負術」自註「人作入，非」，也一直乏人注意。就我個人而言，我是直到2016年3月應邀前往日本參加研討會時，[5]為了尋找有關和算與中算的關係的研究主題，才發現朱世傑這一個應該是無人聞問的評論。

由於《算學啟蒙》對於和算（*wasan*，日本本土數學）與東算（*tongsan*，韓國本土數學）的形成之影響極為深遠，因此，在本文中，我想要利用比較數學史的進路，來探討韓、日數學家如何理解《算學啟蒙》中的「明正負術」及其在〈方程正負門〉上的運用。我所選擇的個案分別是韓國黃胤錫（1729-1791）的《算學入門》（1744），以及日本建部賢弘（1664-1739）的《算學啟蒙諺解大成》（1690）。後者顧名思義，是一本《算學啟蒙》的註解著作。[6]至於前者，其作者也詳盡說明「方程正負門」的問題及解法。這兩部文本分別出自韓日十七、十八世紀的傑出數學家，因此，我們根據他們兩人的研讀〈方程正負門〉，應該可以看到流傳韓、日的中算如何出現不同的「受容」反應。

在下文中，我們將在第 2 節介紹正負術及其劉徽注。以此為基礎，我們再進一步介紹朱世傑的「明正負術」（第 3 節），並據以對比楊輝的「詳解」（第 4 節）。接著，在第 5 節中，我們還要利用《算學啟蒙》〈方程正負門〉中第二、三、六題，說明他如何使用方程術及正負術。這個門共有九個問題，都未曾於《九章算術》卷八〈方程章〉中出現，因此，當韓日數學家針對它們進行註解時，我們或可據以理解他們各自認知之特色，這是第 6、7 節的主要內容。

§2.正負術及其劉徽注

[1] 引郭書春，《九章算術新校》（下冊）（合肥：中國科學技術大學出版社，2014），頁 331。
[2] 原先被認為是正負數的加減法則，不過，此一看法目前可能有待商榷。參考朱一文，〈數：算與術 – 以九數之方程為例〉，《漢學研究》18(1): 153-162。。
[3] 參考郭書春，《九章算術譯注》（上海：上海古籍出版社，2010），頁 73-74。另外，也參考朱一文，〈數：筭與術 – 以九數之方程為例〉，《漢學研究》18(1): 153-162。不過，朱一文認為正負術的後四句並非指涉正負數的加法法則。這是一個頗有洞識的發現，值得深入討論。
[4] 參考郭書春，《九章算術新校》下冊，頁 354-355。
[5] 此次研討會 The Third International Cooperative Studies on the Scientific Documents in East Asia Featuring Pre-modern Japan 由小川束教授籌辦，在日本四日市市舉行。筆者有幸與會，要在此再次感謝小川束、森本光生兩位教授的邀請。
[6] 參考森本光生，〈『算学啓蒙諺解大成』について〉(数学史の研究)，数理解析研究所講究錄 (2004)，1392: 24-45。

有關正負術的「翻譯」，我們根據數學史家的研究成果說明如下。[7]術文前半部的「同名相除，異名相益」是指：當$a>b>0$時，

$(\pm a)-(\pm b)=\pm(a-b)$；$(\mp a)-(\pm b)=\mp(a+b)$

在說明第一段的後半部之前，請先注意到：減（或除）字在中國古代文句中的用法。比方說，在《九章算術》卷一方田章「約分術」中，「以少減多」是指多（大數）減少（小數）的意思。這表示中算家習慣在文句中將減數置於被減數之前，與今日中文表達習慣剛好相反。[8]因此，所謂的「正無人負之」，是指對正數a來說，由於它缺乏可以被減的「偶」或「對」（「無人」或「無對」），因此，

$0-(+a)=-a$

其結果就是將正數a變成為負數了。同理，「負無人正之」如以正數a之運算表之，就如同下列：

$0-(-a)=+a$

第二段術文的前半部可以「翻譯」如下。「異名相除，同名相益」是指：當$a>b>0$時，

$(\pm a)+(\mp b)=\pm(a-b)$；$(\pm a)+(\pm b)=\pm(a+b)$

如果仍假設a為正數，那麼，我們就可將「正無人正之」翻譯如下：

$0+(+a)=+a$

同理，「負無人負之」可翻譯如下：

$0-(+a)=-a$

上述的現代符號翻譯，主要依據多數史家針對劉徽有關正負術之註解的研究結果。其實，朱世傑在「明正負術」自註所引的那一段話（見本文第3節引文），對於我們的現代翻譯起了相當關鍵的作用。不過，有關正負術是否即是現代的正負數加減法則，史家朱一文有著明確的異議，尤其是後四句的「異名相除，同名相異」（楊輝與朱世傑都演稱之為「異減同加」），當應用在譬如本文末附錄 I 中的第四個籌算圖時，其左行為（0　-5　120　7500），中行為（0　5　-1　300），我們究竟如何使用「異減」來得到結果：（0　0　119　7800）？朱一文認為如果從籌算角度考慮，5(=+5)無非是五根正算籌、-5 無非是五根負算籌，因此，「在『異名相除』之意義下，正負算籌不考慮正負，而直以數值相減便是。」[9]

§3. 朱世傑的「明正負術」

朱世傑《（新編）算學啟蒙》計三卷共二十門，凡二百五十九問。此外，本書還包括〈總括〉，其中說明乘除法的基本法則、算籌之擺置法則、大數及小數之命名，以及度量衡之單位及其換算。此外，還有「明異名訣」、「明正負術」、「明乘除段」，以及「明開方法」等項目。其中，明正負術正是本文主題，同時，朱世傑在「明乘除段」欄中，則明確指出「同名相乘

[7] 本節主要參考郭書春，《九章算術譯注》，頁 332-338。
[8] 其實，我們今日在描述除法時，譬如，「以五除十」就是指 10÷5。這個句型與古代的「以少減多」顯然相同。
[9] 朱一文，〈數：籌與術 － 以九數之方程為例〉，《漢學研究》18(1): 153-162

為正，異名相乘為負」，顯然用以彌補「明正負術」之不足。這一總括是為全書內容 –從最簡單的乘除法，到最後的求解二次方程式 -- 揭示計算數據與法則。由於本書最後一節〈開方釋鎖門〉內容占全書最重比例（共有三十四問），因此，「明正負術」在〈方程正負門〉中固然得其所哉，在〈開方釋鎖門〉中，其實也不遑多讓，值得我們另文分梳處理。

在「明正負術」中，朱世傑的自註除了簡短引述劉徽注之外，還為我們保留了極為重要的一句評論。這一句話 -- 「人作入，非」-- 顯然有助於吾人今日「正確」理解《九章算術》「正負術」的關鍵，儘管史家如郭書春並非由於此一文本證據，而確認正負術的正確版本。

茲先將這整個條目引述如下：

明正負術

其同名相減　則異名相加　正無人負之　負無人正之

其異名相減　則同名相加　正無人正之　負無人負之〔按九章註云：兩筭得失相返，要令正負以名之。正筭赤、負筭黑，不則以邪正為異。其無人者，為無對也。無所得減，則使消奪者居位也。人作入，非。〕

上述引文中括號（〔 〕）是我們所加，其內文字在原文中以較小字體（一欄兩行）排版印刷，乃是朱世傑的自注。它顯然引自《九章算術》劉徽注，不過，文字略有出入（對照本文第 1 節中的引文）。還有，朱世傑從《九章算術》所引的正負術文也是如此。[10]

從朱世傑自註的「人作入，非」來看，他的評論應該有針對性。換句話說，他必定注意到他同時代的算家（或學者）將人誤作入。然則那究竟是哪些人呢？如果我們考量到他的《算學啟蒙》於 1299 年問世，而楊輝的《詳解九章算法》則出版於更早的 1261 年，那麼，楊輝或有可能也是朱世傑的評論對象了。

§4. 楊輝《詳解九章算法》

我們目前得以研究《詳解九章算法》，主要歸功於清代學者郁松年在 1843 年所出版的宜稼堂叢書，不過，它僅存部分文本。[11]以方程章為例，就缺漏了第 9-12 問。還有，此書不見於傳韓、日之中算書目。[12]事實上，它在 1261 年刊行後，即罕見傳本，後來，雖然有幸被抄入《永樂大典》，然而，清代學者戴震輯錄《永樂大典》算書時，也錯過了此書全帙重新問世的機會。

儘管如此，有關楊輝註解方程術及其正負術之觀點，我們應該還是可以看到全貌，其中，

[10] 主要的差異，在於朱世傑將「除」改為「減」，「益」改為加。其實，楊輝也是如此，詳本文第四節。

[11] 《詳解九章算法》1261 年刊刻版不存。《永樂大典》將其分類抄入「算」條中。殘存的《永樂大典》只有衰分章下半部及少廣章。清嘉定毛生甫家藏一抄本，僅存序文及盈不足、方程、勾股、商功、均輸五章，章次不循舊序，其中商功、均輸及方程等章都有缺漏。事實上，方程章就缺漏了第九至十二問。參考郭書春，〈詳解九章算法提要〉，載郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙・數學卷》（一）（石家莊：河南教育出版社，1993），頁 943-948。

[12] 如果《詳解九章算法》曾經傳到韓日，那麼，以楊輝及朱世傑影響東算與和算之深，有關正負術的是非，或許會激起一些論辯才是。以韓國為例，在朝鮮末期，南秉吉對於天元術 vs.借根方之對比，也產生了極大的興趣。參見洪萬生，〈《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的進路〉，《科學教育學刊》8(3)(2000): 215-224。

他主張「無人」為「無入」之誤，態度堅決，與朱世傑的「人作入，非」之主張，恰成極尖銳之對比。底下，我們將略論楊輝的「詳解」注文。

《九章算術》的「正負術」最早出現於卷八第 3 題，在此，楊輝將正負術中的「無人」一律改為「無入」之外，其餘則照抄劉徽注文，並未提出他自己的「詳解」。不過，針對本卷第 8 題：

今有賣牛二、羊五，以買一十三豕，有餘錢一千。賣牛三、豕三，以買九羊，錢適足。賣六羊、八豕，以買五牛，錢不足六百。問牛、羊、豕價各幾何？[13]

他所提供的解題，[14]就非常清楚地說明他何以主張「無入」而非「無人」。

先看他的解題的前半部：

解題：賣為正數、買為負數，題中借賣、買為正、負，又加少、剩、適足為問，此意不亦遠乎？正負：正者，正數也；負者，欠數也。方相以鄰行，相乘求等，對位為除，而簡其位求源。如正負名不同者，數不相入，可副置位傍，正負折除。古人謂非其法，故立成術，譔異名相減、同名相減二法，使學者參題取用，以代副置折除之愚也。[15]

緊接著，楊輝提出他自己的「異名相減」及「同名相減」二法。在這兩個法則之後，他還分別針對本題之解，進行相關的說明。

有關他的「一法」及其解說：

一法異名相減。〔正見負為異名，以正減負者，非減也，是正折其去負矣。負見正亦異名，以負減正者，誠減也，正多負而折去矣。同名相加。正見正或負見負，皆為同名，上文異名為減，下即同名補還。〕正無入正之，負無入負之。〔本是同名相加，因鄰位無算可入，故云：正無入者仍為正，負無入者仍為負。古本誤刻無人者，非。〕以問中草段為解，就明作法也。[16]

針對這個「一法」，楊輝以本題解（「以問中草段為解」）為例，提出他的「作法」：[17]

賣為正	買為負	適足數停	
多為正	少為負		
二正	五正	十三負	一貫正[18]
一正	三負	一正	空
五負	六正	八正	六百負

先去羊。乘少羊之行，與多羊行等，而對減。二乘中行減左。

二正	五正	十三負	一貫正

[13] 引郭書春主編，《中國科學技術典籍通彙‧數學卷》(一)，頁 966-967。
[14] 解題是南宋開始採用的一種目錄學體例，其內涵包括名詞和題目、術文的解釋和應用。參考郭書春，〈詳解九章算術提要〉，載郭書春，《中國科學技術典籍通彙‧數學卷》(I)，頁 943-948。
[15] 引郭書春，《中國科學技術典籍通彙‧數學卷》(I)，頁 967。
[16] 同上。又，上述引文中的兩個中括號內之文字是楊輝自注，原文是以較小字體排版(一欄兩行)。
[17] 原文直排，茲改為橫排。為了有利於理解楊輝的解法，我們不妨運用現代符號，設牛價為 x，羊價為 y，豕價為 z，則按題意可以列一個聯立方程組如下：{2x+5y-13z=1000; 3x-9y+3z=0; -5x+6y+8z=-600}。原文按傳統籌式布算，不過，有別於朱世傑的《算學啟蒙》，楊輝將其中數碼以中文數字取代，並以「正」或「負」區別其「名」。
[18] 在此，楊輝採用「一貫=一千文」之換算制度。

	二正	六負	二正	空
〔減數〕[19]	二正	六負	二正	空[20]
〔原數〕[21]	五負	六正	八正	六百負
〔正負折除此數〕[22]	三負[23]	空[24]	十正[25]	六百負[26]

在上引「二乘中行」之後，楊輝因「副置位傍」而重複地布上「減數」這一行，再從原來的左行減去本行，「正負折除」而得最後一行「三負 空 十正 六百負」，至於其運算則是根據「異名相減，同名相加」。[27]還有，其中的「六百負」（＝「空」加「六百負」），則是楊輝依據他自己的「負無入負之」法則之運算結果。在此，楊輝也指出這「六百負」是「無加不動」的結果。換言之，他顯然認為這是「空」導致「無算可入」的結果，因此，他才會主張以「入」來訂正「人」了。

顯然，這個「一法」亦即是「異名相減（除），同名相加（益）」。他所以建立這兩個「成術」（一法及二法，二法詳後）的原因，或許是由於《九章算術》的正負術不易理解吧。[28]事實上，他在《詳解九章算法》第六題之後的草曰中，特別指出：「前問未足以發明正負，以此問再敘法草講明」，應該足以說明他針對正負術之詳解所下的功夫。

楊輝的「二法」是指「同名相減（除），異名相加（益）」：

二法同名相減。〔正見正，負見負，謂之同名相減。〕異名相加，〔上以正減之，下以負還正，或以負還正。 上以負減負，下以負還正，或以正還負，猶前去相補之意。〕正無入正之，負無入負之，〔亦是同名相加補還之理，原其鄰位無算可入，故云是反前術。〕更摘草段為解。[29]

為了進一步說明，他運用同一個例子：

二正	五正	十三負	一貫正
二正	六負	二正	空
三負	無	十正	六百負[30]

去中牛，以右行減之右二牛等也。

二正	五正	十三負	一貫正

[19] 在原文中，中括號中的字體較小。
[20] 這一行就是楊輝在解題中所謂的「副置位傍」。
[21] 在原文中，中括號中的字體較小。
[22] 在原文中，中括號中的字體較小。
[23] 其後原文有「異名相減」，字體較小（一欄兩行）。考慮到編輯的方便，特註記於此。
[24] 其後原文有「異名相減」，字體較小（一欄兩行）。考慮到編輯的方便，特註記於此。
[25] 其後原文有「同名相加」，字體較小（一欄兩行）。考慮到編輯的方便，特註記於此。
[26] 其後原文有「無加不動」，字體較小（一欄兩行）。考慮到編輯的方便，特註記於此。
[27] 按即：原數行與減數行相加。
[28] 事實上，劉徽就早已承認「世人多以方程為難」，見〈方程章〉第十六題劉徽注。
[29] 引郭書春，《中國科學技術典籍通彙・數學卷》(I)，頁 967。又，本段引文中括號〔〕內的文字在原文中字體較小，顯然是楊輝自注的文字。
[30] 原文誤作貫，依題意而改訂之。

〔減數〕	二正	五正	十三負	一貫正[31]
〔原數〕	二正	六負	二正	無入[32]
〔折半此數〕	牛空[33]	十一負[34]	十五正[35]	一貫負[36]
	三負	羊空	十正	六百貫[37]

在上引運算過程中，[38]楊輝將「空」位改以「無入」表之，這應該是為了呼應「折半此數」行的「正無入負」。[39]

然而，他的「空位＝無（算可）入」儘管是為了呼應他的「無入」，卻不免累贅，比方說，在「一法」中的兩行相加使得 (-600)+0=-600，此一結果按他自己的「無加不動」即可充分說明，根本不需要強調「無算可入」。再者，在「二法」中，針對 0-(+1000)=-1000 的結果，他的說明也不如朱世傑引述劉徽的「無所得減，則使消奪居位也」來得合理才是。

總之，楊輝所以誤以「無入」為是，究其原因或許是他過度執著於「無算可入」的解說。如果回歸到朱世傑所引述的「九章註云」，那麼，「人作入」當然就是「非」了。另一方面，楊輝在此一詳解中，明確地指出涉及「正負術」的「方程術」問題，哪些是應用「同（名相）減、異（名相）加」（他的「二法」）？哪些是應用「異（名相）減、同（名相）加」（他的「一法」）？這對於後世數學家的理解方程正負術，帶來了極大的助益。事實上，他同時代的朱世傑在解說方程正負術時，也採取同樣的進路了。

§5. 朱世傑的〈方程正負門〉

在這個門中，朱世傑共編入九個問題，它們都未曾在《九章算術》中現身，至於其出處為何，我們還無從得知。或許這些連同《算學啟蒙》的其他門問題，都是朱世傑遊學四方時所收集的吧。

在這九題的解法中，朱世傑明確地指出哪些運用「同減異加」，哪些運用「異減同加」？所謂「同減異加」，就是「同名相減，異名相加」之簡稱，《算學啟蒙》涉及此術的問題，依序有第一、三、五、七題。至於涉及「異減同加」（「異名相減，同名相加」）者，則有第二、六、八、九題。至於第四題，則未提及。此外，第三題還提及「正無人負之」，第六題提及「負無人負」。這些都應該足以說明何以他要在「總括」中，有必要強調「明正負術」。

我們現在就針對《算學啟蒙》〈方程正負門〉的第二、三及六題進行說明。

[31] 這一行也是楊輝在解題中所謂的「副置位傍」。
[32] 顯然，楊輝認為「無入」代表「空」。
[33] 其後原文有「同名相減」，字體較小（一欄兩行）。考慮到編輯的方便，特註記於此。
[34] 其後原文有「異名相加」，字體較小（一欄兩行）。考慮到編輯的方便，特註記於此。
[35] 其後原文有「異名相加」，字體較小（一欄兩行）。考慮到編輯的方便，特註記於此。
[36] 其後原文有「正無入負」，字體較小（一欄兩行）。考慮到編輯的方便，特註記於此。
[37] 貫為負之誤。
[38] 正如前例，本段引文中括號〔〕內的文字在原文中字體較小。
[39] 參見前註 36。

茲將第二題問題及答案引述如下：

今有二馬、三牛、四羊，價各不滿一萬。若馬添牛一、牛添羊一、羊添馬一，各滿一萬。問三色各一價錢幾何？

答曰：馬三千六百文；牛二千八百文；羊一千六百文。[40]

緊接著，我們來考察他的解法。他的「術曰」如下：

術曰：依圖布筭	馬二	借牛一	〇	錢一万
	〇	牛三	借羊一	錢一万
	借馬一	〇	羊四	錢一万[41]

以右上馬二遍因左行，以右行直減之，馬空、牛負一、羊正八、錢正一萬。又以中行牛三遍因左行，以中行異減同加左行，馬、牛位空，餘羊二十五，錢四萬。上法下實而一，得羊價。 中行錢內減一羊價，餘以三約之，得牛價。右行錢內減減一牛價，餘半之，即馬價，合問。

朱世傑在「得羊價」之前，利用過「直除」（消「馬二」之對減）與「異減同加」兩個法則，前者基於「正無入負之」而導出「牛負一」，不過，朱世傑並未說明。至於後者（「異減同加」），正如前述，則是「異名相減，同名相加」之簡稱。其實，朱世傑還運用到他在〈總括〉中明列的「明乘除段」中的「異名相乘為負」，[42]只是他並未指出此一事實。

現在，讓我們考察第三題，問題引述如下：

今有四兔、三雞，價過一千多半兔之價；三兔、四雞，價不滿一千少半雞之價。問雞、兔各一直錢幾何？

答曰：兔二百二十二文〔二十七分文之六〕；雞七十四文〔二十七分文之二〕[43]

接著，我們再來考察他的「術曰」：

術曰：依圖布筭

七	六	二
兔	雞	錢
六	九	二[44]

〔乃七兔六雞直錢二千，六兔九雞亦直錢二千。〕[45]

先以左行直減右行，訖。卻以左上六，遍因右行，仍以左行同減異加右行右下錢位空，正無人負之 右上兔空，餘雞二十七，錢二千，上法下實而一，得雞價。就通分內子，得二千，以乘左行雞九，得一萬八千，寄位。又分母二十七，通左行錢，得五萬四千，內減寄位，餘三萬六千，以六而一，得六千，以分母二十七約之，得兔價合問。[46]

---

[40] 引郭書春，《中國科學技術典籍通彙．數學卷》(一)，頁 1178。

[41] 這個籌式原文直行書寫，因此，「馬二」這一行為右行，「牛三」這一行為中行，「借馬一」這一行為左行。此外，原文中還有籌算數碼。

[42] 引郭書春，《中國科學技術典籍通彙．數學卷》(一)，頁 1129。

[43] 在本「答曰」中，中括號內的文字字體較小，排印時一欄兩行。

[44] 引郭書春，《中國科學技術典籍通彙．數學卷》(一)，頁 1178。此一籌式原來也是直行，「七 六 二」是右行，「六 九 二」是左行。此一籌式代表聯立方程組 {7x+6y=2000; 6x+9y=2000}，其中 x 代表兔價，y 代表雞價，而事實上，這個方程組是由 {4x+3y=1000+(x/2); 3x+4y=1000-(y/2)} 化簡（等價轉換）得來。

[45] 在原文中，中括號內的文字字體較小，排印時一欄兩行。

[46] 引郭書春，《中國科學技術典籍通彙．數學卷》(一)，頁 1178。。

在這個解法過程中，朱世傑先運用「直除」從右行減去左行，得到右行為「1 -3 0」（按即相當於 $x-3y=0$）之後，再利用「同減異加」，將右行再進一步轉換成「0 -27 -2000」。朱世傑針對此一「-2000」，指出這是「右下錢為空，正無人負之」的結果。這完全正確，只是「-27」及「-2000」都被誤為「27」及「2000」，不知何故。[47]

最後，我們考察第六題：

今有紅錦四尺、青錦五尺、黃錦六尺，價皆過三百文。只云紅錦四尺，價過青錦一尺；青錦五尺，價過黃錦一尺；黃錦六尺，價過紅錦一尺。問三色各一尺錢幾何？

答曰：紅錦九十三文〔一百一十九分文之三十三〕；青錦七十三文〔一百一十九分文之一十三〕；黃錦六十五文〔一百一十九分文之六十五〕。[48]

緊接著，術文也引述如下：

術曰：依圖布筭　紅四　負一　空◯　三百
　　　　　　　　空◯　青五　負一　三百
　　　　　　　　負一　空◯　黃六　三百[49]

以右上紅四遍乘左行，仍用右行異減同加〔負毋人負〕，[50]左上空、青負一、黃正二十四、錢正一千五百。又以中行五遍乘左行，亦以中行直減之，餘黃錦一百一十九尺，錢七千八百文，上法下實而一，得黃錦尺價。通分內子，得七千八百，寄左。又以一百，錢得三萬五千七百，加入寄左，共得四萬三千五百，以五而一，得八千七百，以分母約之，得青錦尺價。又以分母通右行錢，又加入八千七百，共得四萬四千四百，以四而一，得一萬一千一百，以分母約之，得紅錦尺價也。合問。[51]

在這個術曰中，為了化簡左行而得到黃錦尺價錢，朱世傑「以中行五遍乘左行，亦以中行直減之」，然而，實際的方法應該是「異減同加」，與前一個方法相同才是。[52]

§6. 黃胤錫有關正負術之註解

黃胤錫（1729-1791）出身朝鮮兩班，三十一歲生員進士試及第，但只做過微官，最後辭官罷歸，隱居山林。他年二十一歲即發表性理學著作，後來得以拜見金元行等理學大師，學問更是精進。他與同時代的洪大容（1731-1785）與徐命膺等兩班數學家都有來往，是十八世紀韓國的主要數學家之一。他的《理藪新編》共有二十三卷，其內容包括性理學、天文及曆象學、算學、地理學、歷史學、經世致用之學、音韻學以及西方科學。其中有多門學問，尤其是算學，都與實學有關。至於算學在他的學問中何以角色這麼重要？周宗奎特別指出：黃胤錫認為算學具備天地萬物之理則，故當然是性理學的一環。因此，《算學入門》等算學著

---

[47] 朝鮮刊銅活字版《(新編）算學啟蒙》亦是如此。參見兒玉明人編，《十五世紀の朝鮮刊銅字版數學書》，頁 154。

[48] 引郭書春，《中國科學技術典籍通彙・數學卷》(一)，頁 1179-1180。又，在原文中，中括號內的文字字體較小，排印時一欄兩行。

[49] 這個籌式原文直行書寫，因此，「紅四 負一 空○ 三百」為右行等等。又原文有籌算數碼記數。

[50] 在原文中，中括號內的文字字體較小

[51] 引郭書春，《中國科學技術典籍通彙・數學卷》(一)，頁 1180。

[52] 請參看本文末附錄 I，我們提供一個現代符號的「翻譯」，幫助讀者理解他的「術曰」。

作收入《理藪新編》，當然也不令人意外了。[53]

黃胤錫有關正負術之論述，見之於他的《理藪新編》第二十一、二十二及二十三卷，[54]前兩者稱之為《算學入門》，[55]為了方便引述，下文分別稱之為《算學入門（上）》及《算學入門（下）》。最後這一卷稱為《算學本源》，是他根據朴橘的《算學原本》「另加修潤正之補之」而成。[56]黃胤錫編撰這三本算學著作時，主要的參考書籍以《算學啟蒙》為主，尤其是〈方程正負門〉的九個問題，他照單全收，編入《算學入門（下）》的〈方程正負法〉，不過，其中第一個問題之解法，則編入《算學本源》。

儘管照單全收，黃胤錫還是會適當加註，這些都見證他對《算學啟蒙》的深刻理解。[57]首先，請參看他對〈方程正負法〉的提點說明：

> 方程之法，本用互乘。如係左中右三行，以左為主，則右乘左，左亦乘右，乃以右減左。又以中乘左，左亦乘中，乃以中乘左。其以右為主亦同此例。各隨每行上位起算者為據，因其同異而加減之，要歸於求得法實二數而已。[58]

其次，在術文「其同名相減……負無人正之」之後，[59]黃胤錫加註：「正見正、負見負，曰同名；正見負、負見正，曰異名。」並在術文「其同名相加……負無人負之」之後，加註：「同名相乘為正，異名相乘為負。此二句實用於天元一，亦用於方程。」還有，在引述朱世傑的自註之後，黃胤錫也提出他自己的評論：

> 大抵此術或直減或先乘而後除，然後正負之名乃可分別。正負既審，始可以同減而異加、異減而同加也。正者其常也，而又直減之餘也。負者翻減者也。〔如以五減四，一為負也。凡左右乘除加減，正負不只一術，要在活法周流，變通其歸一也。〕[60]

現在，讓我們考察黃胤錫針對方程正負門的第二、三、六題「術曰」之解說。
首先，考察第二題。黃胤錫的「術曰」完全照抄朱世傑的文本，不過，在一些關鍵運算處，他還是補充了必要的備註，讓讀者更容易理解這個解法。比如說吧，在上引朱世傑的第二題術曰中的「直減」之後，黃胤錫補上小號字體的「同名相減左行也」；在「牛負一」之後，則補上「正無人負之」。[61]此外，黃胤錫還補上他自己的「又術」，其中，不同於朱世傑原術，

---

[53] 參考周宗奎，《黃胤錫《算學入門》探源》（台北：台灣師範大學數學系教學碩士論文，2002），頁 9-28。也參考 Horng, Wann-Sheng (2014). "History of Korean Mathematics, 1657-1868: An Overview", Rowe, David & Wann-Sheng Horng eds., *A Delicate Balance: Global Perspectives on Innovation and Tradition in the History of Mathematics: A Festschrift in Honor of Joseph W. Dauben*. New York: Birkhauser, pp. 363-394.

[54] 收入金容雲主編，《韓國科學技術史資料大系・數學篇》(3)，首爾：驪江出版社，1985。

[55] 參考周宗奎，《黃胤錫《算學入門》探源》。

[56] 參考孫梅茵，《朴繘《籌學本原》初探》，台北：台灣師範大學數學系教學碩士論文，2002。

[57] 有關他對《算學啟蒙》的掌握，參考周宗奎，《黃胤錫《算學入門》探源》。

[58] 引金容雲編，《韓國科學技術史資料大系・數學篇（3）》（首爾：驪江出版社，1985），頁 168。

[59] 這是指他引述朱世傑的「明正負術」。

[60] 引金容雲編，《韓國科學技術史資料大系・數學篇（3）》（首爾：驪江出版社，1985），頁 168-169。其中，中括號內文字在原版中字體較小，一欄兩行，是他的進一步自註。

[61] 引黃胤錫，《算學入門（下）》，收入金容雲編，《韓國科學技術史資料大系・數學篇（3）》（首爾：驪江出版社，1985），

他以左行為「程」，並改用「同減異加」，而求得答案。

有關第三題，黃胤錫並未改正朱世傑的「筆誤」，尤其他在「右上兔空，餘雞二十七」下，他加註說「負十八加正九為二十七」，也很難以索解，因為此處所用運算法則是「同減異加」。不過，他另外提出的「又術」是以左行為「程」，如此，他同減後所得的（右行）「0 27 2000」倒是正確無誤。

至於第六題，黃胤錫則除了照抄之外，完全沒有增益任何內容。此處從略。另一方面，黃胤錫除了深入註解方程正負法之外，也非常熱切地結合「方程正負」與「開方要訣」：

> 同名相加，異名相減，正無人正，負無人負。同名相乘為正，異名相乘為負。右二條乃開方之喉襟 〔前術用於開方積，後術用於定位名色。〕[62] 蓋正件正、負見負曰同名；正見負、負見正曰異名。如以正乘正固為正，以負乘負亦為正，其正與負相乘同為負。[63]

這或許也可以說明何以他在《算學本源》中，不僅針對《算學啟蒙》〈開方釋鎖門〉第十七、十八題術曰提出相當詳細解說外，還附上他不憚其煩的相關備註：

> 按開方之術，無論翻順，一切皆以同加異減為率，故正無人正之，負無人負之，此乃不易之定例也。是於《〔算學〕啟蒙》〈〔釋鎖〕開方〉一門故已詳矣。獨此二問，方圓相減之術，自初學觀之，或不無疑，似於同減而異加也。苟如是，則其所以正無人負、負無人正者，亦當爾矣。然嘗細究之，蓋四段方積本自為正，而此之圓積乃為負也。以其圓內之有方而減去方積，然後外餘地畝之數，方可推出也。方既為負，於圓則其正者雖本為正，而亦當以負，而用負無人負之率矣。其負者雖本為負，而亦當以正，而用正無人正之率矣。至於方內之圓，其理亦同，且如既得再寄，則是乃外餘地畝之數，而其實位已為負矣。顧彼七千九百四十三步之數，雖亦為正，而既有此再寄，彼不得不為負於此。此若為正，則此內當減去彼數，而此乃為負，則彼之於此固為同名，又安得不相加於此耶？夫如此則其必用同加異減之例，而不疑於同減而異加也，亦已明矣。世之游心於九數之藝而有眩於斯者，尚不能不考乎瞽說焉。[64]

§7. 建部賢弘有關正負術之諺解

建部家是日本德川幕府的右筆世家，可惜，到了建部賢弘父親那一代，世襲可能就中終止了。建部賢弘（1664-1739）十三歲時，與兄長賢明一起投入關孝和門下習算，二十歲撰著《研幾算法》（1683）。1685 年，他解說關孝和的《發微算法》而撰著《發微算法演段諺解》四冊，然後，又在 1690 年著《算學啟蒙諺解大全》。他從第六代將軍開始進入幕府任職，一直到第八代將軍吉宗即位後，他大受重用，成為天文曆學顧問。在幕府為官期間，他與其師

頁 169。

[62] 中括號內文字在原版中字體較小，一欄兩行。

[63] 引黃胤錫，《算學本源》〈開方要訣鈔〉，金容雲編，《韓國科學技術史資料大系・數學篇（3）》（首爾：驪江出版社，1985），頁 339。

[64] 引黃胤錫，《算學本源》〈天元一術補遺〉，金容雲編，《韓國科學技術史資料大系・數學篇（3）》，頁 352-353。

與賢明兄長合撰《大成算經》(1711),並且在 1722 年編撰《綴術算經》獻給吉宗將軍。[65]

在《算學啟蒙諺解大全》中,建部賢弘針對〈明正負術〉提供了鉅細靡遺的說明。譬如說吧,針對「同名相減、異名相加」法則,他就以籌算圖表現如下十二種所有可能的情況:正三減正一等於正二、正二減正七等於負五、負八減負二等於負六、負四減負六等於正二、負七減正四等於負十一、正一減負十二等于正十三、〇減正九等於負九、〇減負三等於正三、正五減〇等於正五、負一減〇等於負一。[66]

至於針對「異名相減、同名相加」法則,他也以籌算圖表現如下八種所有可能的情況:負五加正二等於負三、負三加正八等於正五、正七加負四等於正三、正二加負六等於負四、正七加正九等於正十六、負十二加負一等於負十三、〇加正八等於正八、〇加負二十一等於負二十一。[67]

有了這些預備知識,建部賢弘為〈方程正負門〉第二、三、六題所提供的解說,就顯得相當平易近人。首先,讓我們考察第二題。除了引述原文之外,建部賢弘還提供了七個籌算圖,詳盡地說明解題的每個步驟。

其次,在第三題中,建部賢弘另外補上了五個籌算圖,同時,還改正了朱世傑在「左行同減異加右行」之後的「右上兔空,餘雞二十七,錢二千」,儘管這無關最後的答案之正確與否。[68]

在第三題的解法過程中,建部賢弘並未改正朱世傑的原文。不過,在第六題的諺解中,建部賢弘就改正了術文。如本文第五節所引,術曰第二段如下:「又以中行五遍乘左行,亦以中行直減之,餘黃錦一百一十九尺,錢七千八百文,上法下實而一,得黃錦尺價。」正如我們在 5 節的評論,「直減」應該改為「異減同加」才是。而建部賢弘正是在此改訂了原文。此外,他還提供了四個籌算圖,詳盡地說明解題步驟。

§8. 結語

史家朱一文論述《九章算術》「正負術」離不開「方程術」的特殊脈絡,[69]這也很好地解釋了何以正負數的運算都涉及「行」的概念。儘管《算學啟蒙》〈方程正負門〉的最後一題(第九題)同時運用了「方程正負術」及「天元術」,不過,在列成最後的「開方式」的過程之中,

---

[65] 參考徐澤林、周暢、夏青,《建部賢弘的數學思想》(北京:科學出版社,2013),頁 57-68。另外,吉宗曾命令建部賢弘譯述(於 1726 年進口的)梅文鼎《曆算全書》,賢弘屬託中根元圭予以翻譯,最後成書題名為「新寫譯本曆算全書」共四十六冊,並於 1733 年獻給吉宗。

[66] 參考森本光生,〈『算学啓蒙諺解大成』について〉(数学史の研究),《數理解析研究所講究錄》(2004),1392: 24-45。

[67] 同上。

[68] 建部賢弘的籌算圖之右行為「〇 負七 負二(千)」。按:原文為籌算數碼。

[69] 參考朱一文,〈數:筭與術 - 以九數之方程為例〉。

天元術的「如積相消」如何與方程正負術的「異減同加」或「同減異加」關連，似乎沒有成為朱世傑、黃胤錫乃至於建部賢弘的關懷所在。[70]

相對於黃胤錫，建部賢弘對於正負數的抽象概念及其運算，似乎有著本質的差異。比如說吧，當黃胤錫說：「以五減四一為負也」，還是涉及算籌此一實物之操作。建部賢弘則不同，他會直接說：正四減正五等於負一，儘管他以籌算數碼表之。

其實，建部賢弘的諺解「明正負術」不免讓我們想起十九世紀的中國數學家李善蘭。在他的《四元解》中，李善蘭將「正負術」轉換成為具有現代意義的正負術加減法則。[71]這部有關朱世傑《四元玉鑑》選題註解的著作，後來也被納入同文館算學科的課程之中，或許也說明了有關正負數的運算對於（初等）數學教學的重要性。[72]

還有，建部賢弘諺解《算學啟蒙》時，應用了關孝和所發明的「傍書法」，然而這個先進的方法，想必帶給他更銳利的概念工具（conceptual tool）。不過，我們忍不住提問：他為何還要諺解《算學啟蒙》？難道是為了關流門人的教學需求嗎？[73]

另一方面，黃胤錫則是將《算學入門》及《算學本源》納入他的《理藪新書》。對他來說，算學在性理學的架構中是不可缺少的學門，當然也有推廣的價值與意義，只是其對象或許僅限於「儒家明算者」或「中人算學者」。

以《算學啟蒙》「正負術」的流傳為例，黃胤錫與建部賢弘見證了算學與其各自社會文化脈絡的密切關連。

---

[70] 本文第 6 節最後所引黃胤錫針對「釋鎖開方」及「方程正負」的評論，值得另文討論。

[71] 參見附錄 II，引文出自《則古昔齋算學》(1867) 的《四元解》卷一〈算例〉頁四。

[72] 參考洪萬生，〈同文館算學教習李善蘭〉，載楊翠華、黃一農主編，《中國近代科技史論集》，台北/新竹：中央研究院近代史研究所/新竹清華大學，1991，頁 215-259。

[73] 徐澤林曾引述關孝和授予宮地新五郎的一份「算法許狀」，其目錄有過半與《算學啟蒙》有關。參考徐澤林、周暢、夏青，《建部賢弘的數學思想》(北京：科學出版社，2013)，頁 052。

參考文獻

[1] 朱一文 (2010).〈數：筭與術 – 以九數之方程為例〉,《漢學研究》18(1): 153-162。
[2] 朱世傑 (1993).《算學啟蒙》，載郭書春主編,《中國科學技術典籍通彙・數學卷》(1)（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 1123-1200。
[3] 兒玉 明人 (1965).《十五世紀朝鮮刊 銅活字版數學書》。
[4] 建部賢弘 (1690).《算學啟蒙解大成》，取自小寺裕創建網站：《和算の館》 http://www.wasan.jp/archive.html.
[5] 洪萬生,〈同文館算學教習李善蘭〉，載楊翠華、黃一農主編,《中國近代科技史論集》台北/新竹：中央研究院近代史研究所/新竹清華大學，1991，頁 215-259。
[6] 洪萬生 (2000).〈《無異解》中的三案初探：一個 HPM 的進路〉,《科學教育學刊》8(3): 215-224。
[7] 周宗奎 (2002).《黃胤錫《算學入門》探源》，台北：台灣師範大學數學系教學碩士論文。
[8] 孫梅茵 (2002).《朴繘《籌學本原》初探》，台北：台灣師範大學數學系教學碩士論文。
[9] 黃胤錫 (1985).《算學入門》，收入金容雲編,《韓國科學技術史資料大系·數學篇（3）》（首爾：驪江出版社，1985），頁 3-216。
[10]黃胤錫 (1985).《算學本源》，金容雲編,《韓國科學技術史資料大系·數學篇（3）》（首爾：驪江出版社，1985），頁 219-360。
[11]森本光生 (2004).『算学啓蒙諺解大成』について (数学史の研究) 数理解析研究所講 究録 (2004), 1392: 27-45. http://hdl.handle.net/2433/25857.
[12]武英殿聚珍版《九章算術》，載郭書春主編,《中國科學技術典籍通彙・數學卷》(1)（鄭州：河南教育出版社，1993），頁 95-214。
[13]徐澤林、周暢、夏青 (2013).《建部賢弘的數學思想》，北京：科學出版社。
[14]郭書春 (2014).《九章算術新校》，安徽合肥：中國科學技術大學出版社。
[15]郭書春校勘、道本周、徐義保英譯 (2013).《九章算術：漢英對照》，瀋陽：遼寧教育出版社。
[16] Horng, Wann-Sheng (2014). “History of Korean Mathematics, 1657-1868: An Overview”, Rowe, David & Wann-Sheng Horng eds., A Delicate Balance: Global Perspectives on Innovation and Tradition in the History of Mathematics: A Festschrift in Honor of Joseph W. Dauben. New York: Birkhauser, pp. 363-394.

附錄 I：《算學啟蒙》〈方程正負門〉第六題之現代符號翻譯

設 x, y, z 分別表示紅錦、青錦、黃錦的價錢。則根據題意，可以建立如下的一個聯立線性方程組：{4x-y=300, 5y-z=300, 6z-x=300}，仿照術曰「依圖布筭」，我們可以寫成「方程」（其中，籌算數碼改用印度-阿拉伯數碼表示）如下：

（左）	（中）	（右）
-1 負	0 空	4 紅
0 空	5 青	-1 負
6 黃	-1 負	0 空
300	300	300

現在，以「右上紅四遍乘左行」，得如下：

（左）	（中）	（右）
-4 負	0 空	4 紅
0 空	5 青	-1 負
24 黃	-1 負	0 空
1200	300	300

接著，運用「右行異減同加 負毋人負」，如此可得

（左）	（中）	（右）
0 負	0 空	4 紅
-1 負	5 青	-1 負
24 黃	-1 負	0 空
1500	300	300

再次，「又以中行五遍乘左行」，得

（左）	（中）	（右）
0 負	0 空	4 紅
-5 負	5 青	-1 負
120 黃	-1 負	0 空
7500	300	300

「亦以中行直除之」， 得

（左）	（中）	（右）
0 負	0 空	4 紅
0 負	5 青	-1 負
119 黃	-1 負	0 空
7800	300	300

「餘黃錦一百一十九尺、錢七千八百文」，於是，就可以得到黃錦尺價等等。

附錄 II：李善蘭《四元解》中的「正負術」

凡加法，以太加太，以某元加某元，各齊其位。同名相加，異名相減。相加者，正者正之，負者負之。相減者，本數大則本數正者正之，負者負之；加數大則加數正者正之，負者負之。無對者，則正者正之，負者負之。

凡減法，亦齊其位。同名相減，異名相加。相減者，本數大則正者正之，負者負之；減數大則正者負之，負者正之。相加者，本數正者正之，負者負之。無對者，本數正者正之，負者負之；減數正者負之，負者正之。