RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B69 (2018), 49–64

関孝和編『開方飜変之法』について (II)
— 『開方飜変之法』で意図したこと —
On *Kaihō Honhen no Hō* edited by Seki Takakazu (II)

長田直樹
Naoki Osada*

Abstract

We discuss *tekijin-shokyū* (method of vanishing a polynomial and its certain derivative), *shokyū-taisū* (in literal, replacement of each coefficient to obtain a root), and *shishō-kyokusū* (in literal, find the common root of a given polynomial and its derivative) in *Kaihō honhen no Hō* (Methods of Equation Modifications) re-revised by Seki Takakazu in 1685. We show that the algorithm of *taisū* consists of five procedures of *Kaihō honhen no Hō*.

We declare *tekijin-renkyūhō*, which has been considerd to be purposeless, is available to use *taisū*. We also demonstrate that *tekijin-renkyūhō* and *tekijin-karenkyūhō* provide useful information on roots of real cubic and quartic equations, respectively.

§1. はじめに

関孝和編『開方飜変之法』について、先行研究では「本書では幾多の不正確な結果を含んではゐるが、方程式論において劃期的な研究」(藤原松三郎 [2, p.217])、「要するに、開方飜変之法は孝和の意図が奈辺にあるか、われわれには理解しがたいものがあったが、方程式を論じ、負根の存在を認め、虚根の方程式は偶数次なること、判別式を作って、極大極小を論じようとしたことは画期的の業績であった。」(平山諦 [5, p.100]) というような評価がなされてきた。さらに、適尽廉級法については「無意義」(加藤平左エ門 [7]) が定説である。

本論文では、「関孝和編『開方飜変之法』について (I)」[9] に続き、適尽諸級、諸級替数、視商極数を解説する。そして、『開方飜変之法』の全五條の関係をどう読めばよいか、

Received November 27, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A27,01A45
Key Words: History of Japanese Mathematics, Seki Takakazu, polynomial equation
*東京女子大学 Tokyo Woman's Christian University
e-mail: osada@lab.twcu.ac.jp

関が本書で意図したことは何かについて述べる。さらに、適尽廉級法の意義についても述べる。底本や表記法は「関孝和編『開方飜変之法』について (I)」と同じである。

紙数の関係で 2015 年 8 月の研究集会で発表した適尽方級法、適尽廉級法は本論文に載録し、2016 年 8 月の研究集会で発表した重根と判別式の歴史、『開方飜変之法』の世界数学史に於ける位置づけについては稿を改める。

§ 2. 適尽諸級

適盡諸級第三
毎式以實行爲前式以所盡級行爲後式而前
式一級疊之而求換式而交式斜乘而求生尅
而得寄消也○諸級之數者如衰垜術求之乃實
行者基數方行者圭垜初廉行者三角衰垜次
廉行者再乘衰垜三廉行者三乘衰垜也餘
倣之

与えられた方程式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$$

を実行(じつぎょう)、

$$xf'(x) = a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots + na_n x^n = 0$$

を方行、

$$\frac{1}{2!} x^2 f''(x) = a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} a_n x^n = 0$$

を (初) 廉行、

$$\frac{1}{3!} x^3 f'''(x) = a_3 x^3 + 4a_4 x^4 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a_n x^n = 0$$

を次廉行という。各行は実行 (原方程式) の係数に諸級之数 (二項係数) がかかっている。

実行を前式とし、方行を後式とし、

$$\begin{cases} \text{前式} : & f(x) = 0 \\ \text{後式} : & xf'(x) = 0 \end{cases}$$

から x を消去する。前式を一級畳み (x^n の項を消去し)、後式を x で除して次数を 1 次下げ、

$$\begin{cases} \text{前式} : & nf(x) - xf'(x) = 0 \\ \text{後式} : & f'(x) = 0 \end{cases}$$

を両式として『解伏題之法』の方法により換式を求め、未知数 x を消去した式が適尽方級法である。

$f(x)$ の n 個の零点を $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とし、$f(x)$ の判別式を

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

で定義すると、$n=2$ のときの適尽方級法は判別式を 0 と置いた式 $D(f)=a_1^2-4a_0a_2=0$ に一致し、$n\geq 3$ のときは

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}D(f)=0$$

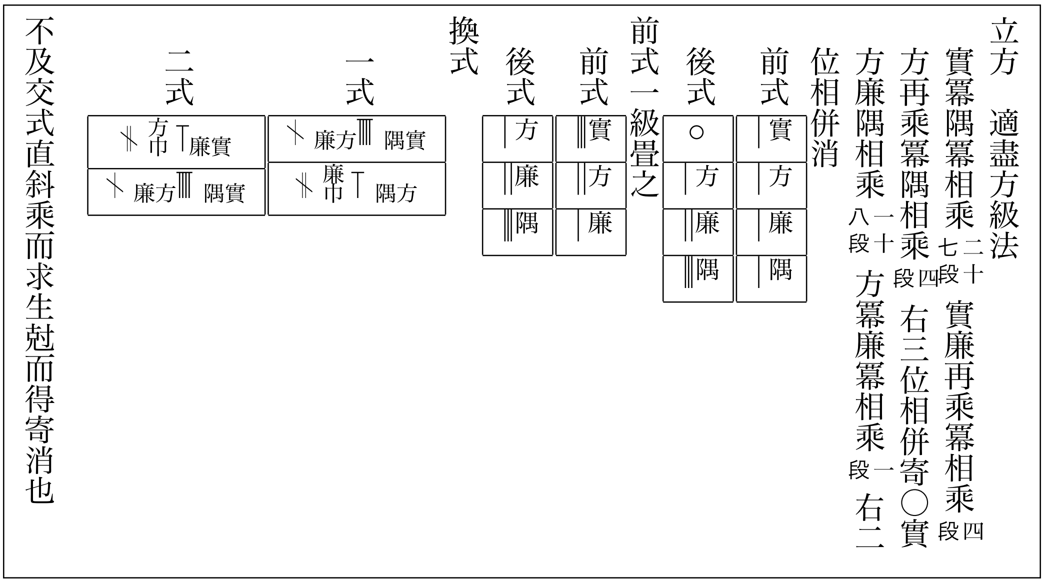
となる。

実行を前式とし、廉行を後式とし、実行と廉行の次数を 1 次下げ

$$\begin{cases} 前式 \ : \ \frac{n(n-1)}{2}f(x)-\frac{1}{2!}x^2f''(x)=0 \\ 後式 \ : \ \frac{1}{2!}xf''(x)=0 \end{cases}$$

を両式として換式を求め、未知数 x を消去した式が適尽廉級法である。

$n=3$ の場合の適尽方級法について、原文と現代数学を用いた解説を示す。



立方適尽方級法は、$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0$ に対し、

$$\begin{cases} 前式 \ : \ a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3=0 \\ 後式 \ : \ a_1x+2a_2x+3a_3x^3=0 \end{cases}$$

とする。前式を一級畳み ($3\times$ 前式 $-$ 後式 を前式とし)、後式 $\div\, x$ を後式とすると

$$\begin{cases} 前式 \ : \ 3a_0+2a_1x+a_2x^2=0 \\ 後式 \ : \ a_1+2a_2x+3a_3x^2=0 \end{cases}$$

となる。換式は、$3a_3\times$ 前式 $-\,a_2\times$ 後式 を一式とし、一式 $\times\, x+2a_2\times$ 前式 $-\,2a_1\times$ 後式 を二式とした

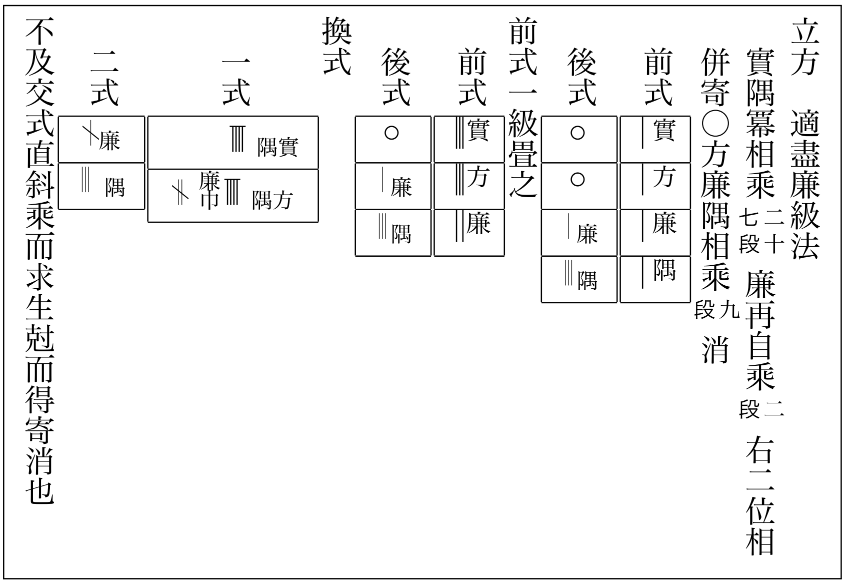
$$\begin{cases} 一式 \ : \ \frac{n(n-1)}{2}f(x)-\frac{1}{2!}x^2f''(x)=0 \\ 二式 \ : \ \frac{1}{2!}xf''(x)=0 \end{cases}$$

である。換式数は 2 だから換式を斜乗して 3 で割り立方適尽方級法

$$27a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 18a_0a_1a_2a_3 - a_1^2a_2^2 = 0$$

が得られる。

次に、$n = 3$ の場合の適尽廉級法について、原文と現代数学を用いた解説を示す。



$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ に対し

$$\begin{cases} \text{前式} : & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0 \\ \text{後式} : & a_2x^2 + 3a_3x^3 = 0 \end{cases}$$

から、x を消去する。前式を一級畳み、後式の次数を 1 つ下げると両式

$$\begin{cases} \text{前式} : & 3a_0 + 3a_1x + 2a_2x^2 = 0 \\ \text{後式} : & a_2x + 3a_3x^2 = 0 \end{cases}$$

が得られる。換式は、$3a_3 \times$ 前式 $- 2a_2 \times$ 後式 を一式とし、(一式 $\times x + a_2 \times$ 前式 $- 3a_1 \times$ 後式) $\div 3a_0$ を二式とした、

$$\begin{cases} \text{一式} : & 9a_0a_3 + (9a_1a_3 - 2a_2^2)x = 0 \\ \text{二式} : & a_2 + 3a_3x = 0 \end{cases}$$

である。斜乗により x を消去すると適尽廉級法

$$27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 = 0$$

が得られる。なお、原文の換式における二式の実 $\boxed{\text{廉}}$ $(-a_2)$ は $\boxed{\text{廉}}$ (a_2) の誤りである。

§3. 諸級替数

替数とは、原式 (与えられた代数方程式) が正商 (正根) あるいは負商 (負根) を持たないとき、級数 (1 つの係数) の符号は替えず絶対値のみを替えて、正商あるいは負商を持つようにすることである。さらに、関はそのような級数の範囲を考察している。諸級替数の原文と現代数学を用いた解説を示す。「以上」「以下」は絶対値で比較し、等号は含めない。<u>下線</u> の箇所は原文をそのまま現代数学で表現したものであるが、数学として正しくない。訂正した表現を【】内に記す。判別式は D、適尽方級法は $\tilde{D}=0$、適尽廉級法は $\tilde{D}_2=0$ で表す。

諸級替數第四
依驗商有無法視有異名級而立天元一爲所
替各級數随適盡其級法得式開除之得商若変
商者實數隅數以最多商爲所替數他級數以最少商爲所替數○交商者随原級而開出同名商○無商者不能替數也
仍得商與原級數異名者不用
之同名者實數隅數乃平方式者實數廉數也從得商以下
者原商有之以上者原商無之他級數從得商
以下者原商無之以上者原商有之也

驗商有無の方法により、異符号の項を調べる。原式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ に仮の根 $\alpha=\pm1$ を立て、$a_0(\alpha^n a_n)>0$ のときは α と同符号の根は仮に持たないと考える。$a_0(\alpha^n a_n)<0$ のときは α と同符号の根を持つ。$a_0(\alpha^n a_n)>0$ であっても、$a_k(\alpha^{n-k}a_n)<0$ となる $k,(1\leq k\leq n-1)$ が存在するときは <u>適尽其級法 ($a_k(\alpha^{n-k}a_n)<0$ となる k のうち最少のものを取り、$k=1$ のときは適尽方級法、$k=2$ のときは適尽 (上) 廉級法、etc.)</u> 【下線の箇所は正しくない。$k>1$ であっても適尽方級法】により α と同符号の根を持たせる。$a_k(\alpha^{n-k}a_n)>0,(k=0,\ldots,n-1)$ のとき替数はできない。(ここまで、驗商有無)

原式

$$a_0+a_1x+\cdots+a_ix^i+\cdots+a_nx^n=0$$

が α と同符号の根を持たないとき、a_i を $b_i(a_ib_i>0)$ に替えた式

$$a_0+a_1x+\cdots+b_ix^i+\cdots+a_nx^n=0 \tag{3.1}$$

が α と同符号の根を持つようにする。(3.1) の <u>適尽其級法</u>【適尽方級法】$\tilde{D}(b_i)=0$ が実根を持たないか a_i と同符号の根を持たないときは替数はできない。a_i と同符号の根を 1 つだけ持つときは、その根を得商とする。2 つ以上持つときは、<u>$i=0$ または $i=n$ は a_i と同符号の絶対値が最大の根、$1\leq i\leq n-1$ のときは a_i と同符号の絶対値が最小の根を得商とする。</u>【適尽方級法の根で原式を替えた式を開いて、α と同符号の根が得られたら替える数とする。原式と所布が同名か異名か、適尽方級法の最多商か最少商かだけでは決められない。】

得商を β とする。$i=0$ または $i=n$ のとき、得商以下 ($0<|b_i|<|\beta|$) ならば (3.1) は根を持ち、得商以上 ($|\beta|<|b_i|$) のとき (3.1) は根を持たない。<u>$0<i<n$ のとき、得商以上 ($|\beta|<|b_i|$) ならば (3.1) は根を持ち、得商以下 ($0<|b_i|<|\beta|$) のとき (3.1) は根を持たない。</u>【$0<$

$i < n$ かつ (3.1) で $b_i = \beta$ と置いた式が a_i と同符号の根をもつ場合、所布と原式が同名 $(a_i a_n \alpha^{n-i} > 0)$ のとき、得商以下 $(0 < |b_i| < |\beta|)$ ならば (3.1) は α と同符号の根を持ち、得商以上 $(|\beta| < |b_i|)$ のとき (3.1) は α と同符号の根を持たない。所布と原式が異名 $(a_i a_n \alpha^{n-i} < 0)$ のとき、得商以上 $(|\beta| < |b_i|)$ ならば (3.1) は α と同符号の根を持ち、得商以下 $(0 < |b_i| < |\beta|)$ のとき (3.1) は α と同符号の根を持たない。】

假如原式平方𝍣𝍢̸𝍠
依驗商有無法視之雖正負商各無之方
級異名故以適盡方級法替實數方數及
廉數而爲正商有之也

諸級替数例 1
2 次方程式 $4 - 3x + x^2 = 0$ に験商有無法を用いる。仮に根 ± 1 を立てる。

実	方	廉	
4	-3	1	原式
1	± 1	1	所布

原式の実 4 と所布の実 1 は同名なので正負商なしと考える。正一を立てたときは、原式と所布の方級が異名なので適尽方級法により各係数の符号は変えず絶対値のみ変えて正商を持たせるようにする。(負一を立てたときは、すべての級が同名なので替数はできない。)

立天元一爲實數。𝍠 以廉數相乘得數四
之。𝍣 寄左〇列方數自之得 𝍨 與寄左相
消得歸除式 𝍨̸ 𝍣 上實下法而一得正二箇
二分五釐故正實此數以下者原正商有之
以上者原正商無之
亦立天元一爲方數。𝍠 自之得。。𝍠 寄
左〇列實數以廉數相乘得數四之 𝍩𝍥 與寄
左相消得開方式 𝍩𝍥̸。𝍠 平方開之雖得正商與原
式方異名故不用之也得負四箇故負方此數以下者
原正商無之以上者原正商有之 (以下略)

$4 - 3x + x^2 = 0$ の実数を替えて正商を持たせる。$a - 3x + x^2 = 0$ の適尽方級法 $D = \tilde{D} = 9 - 4a = 0$ (原文は $4a - 9 = 0$) の得商は $a = 2.25$ である。得商以下 $(0 < a < 2.25)$ のとき正商を持ち、得商以上 $(2.25 < a)$ のとき正商を持たない。
$4 - 3x + x^2 = 0$ の方数を替えて正商を持たせる。$4 + bx + x^2 = 0$ $(b < 0)$ の適尽方級法 $D = \tilde{D} = b^2 - 16 = 0$ の得商は $b = -4$ である。得商以上 $(b < -4)$ のとき正商を持ち、得商以下 $(-4 < b < 0)$ のとき正商を持たない。

§ 4. 視商極数

視商極數第五

置原式依前替諸級數而各得式随適盡諸級法而其級逐下乗其級數乃用適尽方級法則自方逐下乗方級數用適尽初廉級法則自初廉逐下乗初廉級數餘傚之其得式開除之得商極數

原式 (与えられた方程式) を

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_i x^i + \cdots + a_n x^n = 0$$

とし、原級 a_i を $b_i (a_i b_i > 0)$ に替え

$$a_0 + a_1 x + \cdots + b_i x^i + \cdots + a_n x^n = 0$$

に正商/負商を持たせる。b_i を未知数とする <u>適尽其級法</u>【適尽方級法】の商 [得商] を β とする。

$$a_0 + a_1 x + \cdots + \beta x^i + \cdots + a_n x^n = 0 \tag{4.1}$$

の正商/負商を商の極数 (取り得る係数の範囲の上限または下限) という。

商の極数は <u>((4.1) の其行を x^k で割った)</u>

$$\underline{\binom{k}{k} a_k + \cdots + \binom{i}{k} \beta x^{i-k} + \cdots + \binom{n}{k} a_n x^{n-k} = 0}$$

<u>を開いて求める。</u>【(方行を x で割った)

$$a_1 + \cdots + i\beta x^{i-1} + \cdots + n a_n x^{n-1} = 0 \tag{4.2}$$

を開いて求める。(4.2) の商が (4.1) の正商/負商でもあるとき、それを商の極数とする。】
商の極数は (4.1) の重根であり、(4.1)(4.2) の共通根である。

假如原式平方｜⊬｜
此式依適盡方級法如前而替實數得式○=||||⊬｜
是用適盡方級法故自方逐下乗方級數乃方乗一廉乗二後餘傚之得⊬‖實如法而一得正商五分
是替實數式商極數也
亦替方數得式｜⫲｜
自方逐下乗方級數得⫲‖實如法而一得
正商一箇是替方數商極數也
復替廉數得式｜⊬○=||||
自方逐下乗方級數得⊬○≣實如法而一得
正商二箇是替廉數式商極數也

視商極数例 1
原式 $1 - x + x^2 = 0$
方級の符号が廉級の符号と異なるので適尽方級法 $\tilde{D} = D = 0$ を用いる。

実数 $a - x + x^2 = 0$ $(a > 0)$ の適尽方級法 $D = 1 - 4a = 0$ の商は $a = 0.25$ である。得式 $0.25 - x + x^2 = 0$ の商は適尽方級法を用いているので $-1 + 2x = 0$ を開いて商極数は 0.5 である。

方数 $1 + bx + x^2 = 0$ $(b < 0)$ の適尽方級法 $D = b^2 - 4 = 0$ の商は $b = -2$ である。$1 - 2x + x^2 = 0$ の商は $-2 + 2x = 0$ を開いて商極数は 1 である。

廉数 $1-x+cx^2=0$ $(c>0)$ の適尽方級法 $D=1-4c=0$ の商は $c=0.25$ である。
$1-x+0.25x^2=0$ の商は $-1+0.5x=0$ を開いて商極数は 2 である。

§5. 『開方飜変之法』の意図

貞享乙丑 (貞享二年、1685) の年紀のある関孝和編の稿本は次の 4 点

解隠題之法	貞享乙丑八月戊申日 (八月二十日) 襲書
開方飜変之法	貞享乙丑仲冬十三日 (十一月十三日) 重訂
病題明致之法	貞享乙丑臘角解日 (十二月一日頃) 重訂
題術辯議之法	貞享乙丑十二月戊申日 (十二月二十二日)

が知られている。

『解隠題之法』の得商以外は『大成算経』巻之十七に、『解隠題之法』得商と『開方飜変之法』は『大成算経』巻之三に、『題術辯議之法』は『大成算経』巻之十六に、『病題明致之法』は『大成算経』巻之十八に敷衍して載録されている。したがって、貞享二年の四篇の稿本は大成算経編纂のために関孝和が書き下ろしたか重訂したものと考えられる。

『解隠題之法』は、開方式 (数字係数 1 変数代数方程式) の立て方と解き方について扱っている。『病題明致之法』は転題 (条件が不足している問題)、繁題 (条件が多すぎる問題)、虚題 (解が無いか題意に合わない問題)、変題 (題意を満たす解が複数ある問題) の正し方を扱っている。『題術辯議之法』は、病題 (誤った問題)、邪術 (誤った解法)、権術 (望ましくない解法) を具体例を付けて述べている。

『開方飜変之法』『病題明致之法』『題術辯議之法』は『解隠題之法』を踏まえて書かれており、『病題明致之法』は『開方飜変之法』が随所に用いられているので、『開方飜変之法』は病題の判別と正し方に関する数学的理論 (方程式論) であると考えられる。より正確に言うと、『開方飜変之法』は替数および商の極数の求め方を述べた書である。(原文の適尽其級法の誤りを適尽方級法に改め) 全体の流れをフローチャート (図 1) で示す。

『開方飜変之法』では、全体で替数の方法が構造的に書かれており、各條はサブルーチンになっている。先行研究では唯一 Annick Horiuchi 氏が『開方飜変之法』を構造的に解釈している。

> Le remplacement du coefficient par cette méthode s'effectue selon le schéma suivant[1]:
>
> ——
>
> [1]. L'exposé qui suit résume les trois dernières sections du *Kaihô honhen no hô*.
>
> [6, p.216]

> この方法による係数の置き換え (替数) は、以下のスキームにしたがって遂行される [1]：
>
> ——
>
> [1]. 解説は『開方飜変之法』の最後の 3 條にまとめられている。

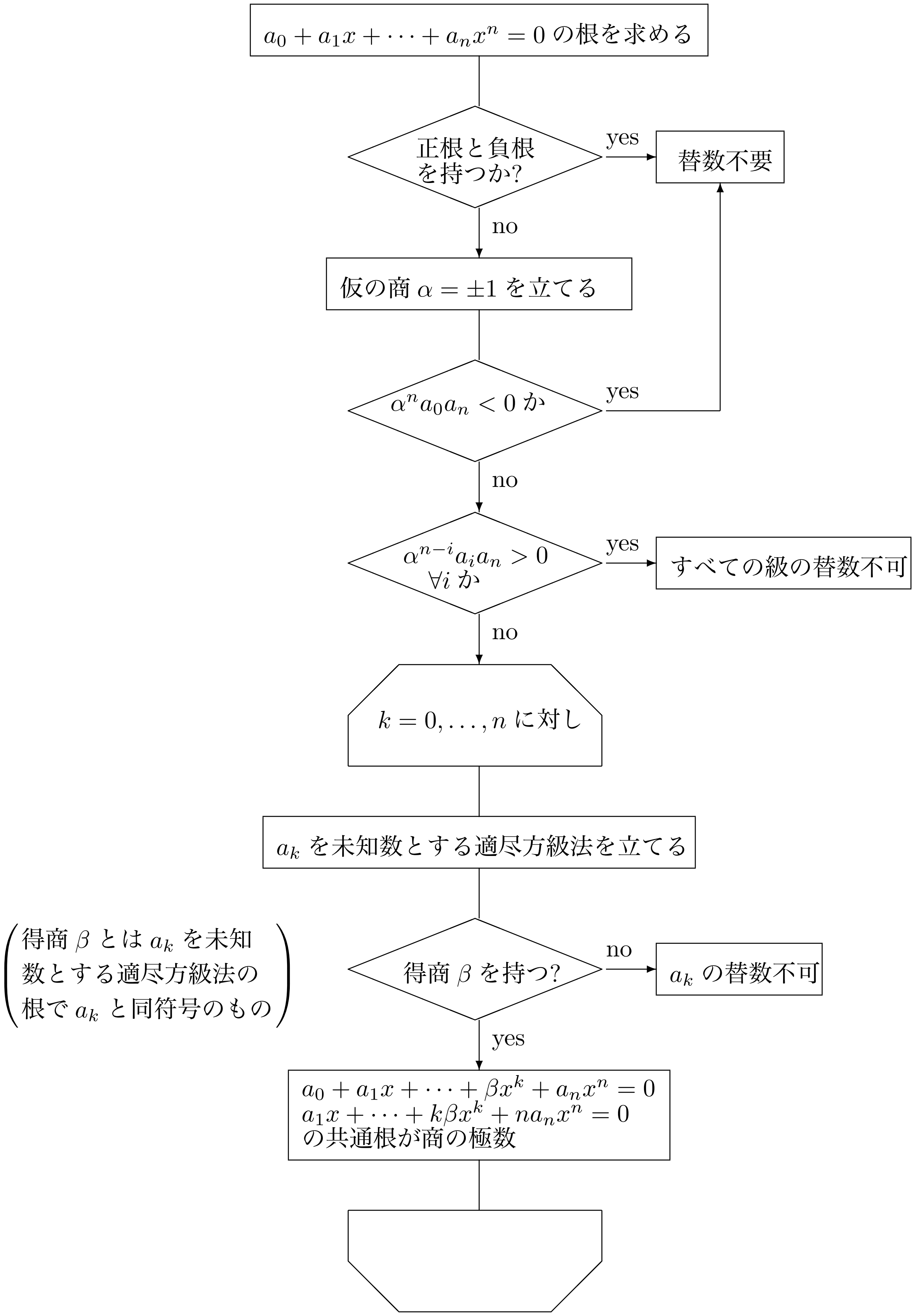


図 1. 『開方飜変之法』の流れ

平山は「孝和の意図が奈辺にあるか、われわれには理解しがたい」と書いているが、関の意図は明確である。また、すべて適尽方級法で処理すべきところを適尽其級法をもちいるという誤り以外にも得商の候補が複数あるときの決め方、正商を持つ係数の範囲には誤りがあるが、すべて『大成算経』巻之三で、解いてみて確かめるという方法で、訂正されている。

§6. 適尽廉級法は無意義か

§6.1. 先行研究

適尽廉級法について、加藤平左エ門は 1941 年

> サテ方級法ハ $f(x)=0, f'(x)=0$ カラ x ヲ消去スルノデアルカラ判別式ヲ D トスレバ消去ノ結果ハ
>
> $$D=0$$
>
> トナリ、$f(x)=0$ ガ等根ヲ有スル條件トナルノデアル。所ガ初廉級法ハ $f(x)=0$ ト $f''(x)=0$ トカラ x ヲ消去シテ終結式ヲ作ルノデアルカラ得タ式ハ両式ガ共通根ヲ有スル條件ニハナルガ $f(x)=0$ ガ等根ヲ有スル條件ニハナラナイ。他級法ニ就テモ同様デアル。之レガ後ニ述ベル如ク方級法以外ハ無意義ニ終リ、之レヲ基トシテ行ツタ諸級替數ハ誤レル結果ニ到達スル所以デアル。 [7, p.7]

と書いている。また、藤原松三郎も

> この條の結果の中､適盡方級法以外のものは意義のないものである。例へば $f(x)=0$ と $f''(x)=0$ から x を消去しても、根に對してなんらの意味をもたないからである。 [2, p.213]

と書いており、これらが定説となっている。上野健爾氏 [11, p.265] も同様の見解である。

確かに､「原式 (実数係数の代数方程式) が正商あるいは負商を持たないとき、級数 (1 つの係数) の符号は替えず絶対値のみを替えて、正商あるいは負商を持つような級数の範囲を与える」問題に対して、適尽方級法以外は役に立たない。しかしながら、本来の「原式が正商あるいは負商を持たないとき、級数の符号は替えず絶対値のみを替えて、正商あるいは負商を持つようにする」問題に対しては、適尽廉級法は十分条件を与える。さらに適尽廉級法は 3 次方程式に、適尽下廉級法は 4 次方程式の実根について重要な意義を持つことを以下に述べる。

定説に対し唯一異論を唱えたのは後藤武史氏である。

> これは、意味のないものとして「關孝和全集」などに紹介されているが 3 重根を求めるための条件として考えれば、全く意味のないものとは言えないのではないかと考える。 [3, p.137]

§ 6.2. 適尽廉級法は替数に利用できる

適尽廉級法は「原式が正商あるいは負商を持たないとき、級数の符号は替えず絶対値のみを替えて、正商あるいは負商を持つようにする」問題に利用できる。替数の第 2 例によりこのことを見てみる。下線部分は級数の範囲を求める問題としてみたときの原文の誤り、【】内はその訂正である。

又原式立方𝍢　𝍠　𝍠̸　𝍠
此式負商有之雖正商無之廉級異名故
以適盡廉級法替實數方數廉數及隅數
而爲正商有之也

諸級替数例 2

原式

$$3 + x - x^2 + x^3 = 0$$

験商有無の方法を用いる。

	実	方	廉	隅	
+1)	1	1	1	1	正商無し
−1)	−1	1	−1	1	負商有り　($x = -1$ は負商である。)

廉級が異名なので <u>適尽廉級法</u>【適尽方級法】

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$　に対し

<u>$\tilde{D}_2 = 27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 = 0$</u>

【$\tilde{D} = -D = 27a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 18a_0a_1a_2a_3 - a_1^2a_2^2 = 0$】

を以て、実数、方数、廉数、隅数を替え正商を持つようにする。

立天元一爲實數○𝍠以隅數冪相乘二十七段
○=𝍦廉數再自乘二段𝍡̸右二位相併共得𝍡̸=𝍦
寄左○列方數以廉數相乘亦以隅數相
乘得數九之𝍨̸與寄左相消得歸除式𝍦　=𝍦　上
實下法而一得負二分五釐九毫二絲五
九強與原式實異名故不用之
復立天元一爲方數○𝍠以廉數相乘亦以
隅數相乘得數九之○𝍨̸寄左○實數隅數
冪相乘二十七段𝍰𝍠廉數再自乘二段𝍡̸右二位相
併共得𝍯𝍨與寄左相消得歸除式𝍯𝍨̸　𝍨̸　上實
下法而一得負八箇七分七釐七毫七絲七
八弱與原式方異名故不用之
亦立天元一爲廉數○𝍠再自乘之二段○○
○𝍡實數隅數冪相乘二十七段𝍰𝍠右二位相併
共得𝍰𝍠○○𝍡寄左○列方數以廉數相乘
亦以隅數相乘得數九之○𝍨與寄左相消
得開方式𝍰𝍠𝍨̸○𝍡立方飜法開之得負三
箇八分六釐八毫八絲七二弱故負廉此數
以下者原正商無之以上者原正商有之
又立天元一爲隅數○𝍠自之以實數相乘
二十七段○○𝍰𝍠廉數再自乘二段𝍡̸右二位相併
共得𝍡̸○𝍰𝍠寄左○列方數以廉數相乘亦
以隅數相乘得數九之○𝍨̸與寄左相消得
開方式𝍡̸𝍨𝍰𝍠平方開之雖得負商與原式隅異名故不用之也
得正一分一釐一毫一絲一一強故正隅
此數以下者原正商有之以上者原正商無
之

実数 $a + x - x^2 + x^3 = 0$ $(a > 0)$

<u>適尽廉級法より帰除式 $7 + 27a = 0$ を得、$a(= -7/27) = -0.259259$ 強を得る。原式</u>

の實 3 と異名なのでこれを用いない。【適尽方級法 $27a^2+14a+3=0$ は正商を持たない。(もっと強く、無商式である。)】したがって替数はできない。

方数 $3+bx-x^2+x^3=0$ $(b>0)$
適尽廉級法より帰除式 $-79-9b=0$[適尽廉級法の定義では、$79+9b=0$ である。] を得、$b(=-79/9)=-8.777778$ 弱を得る。原式の方 1 と異名なのでこれを用いない。【適尽方級法 $23+54b+4b^3=0$ の商 (唯一の実根) は -2.7383109 弱で原式の方 1 と異名なのでこれを用いない。】したがって替数はできない。

廉数 $3+x+cx^2+x^3=0$ $(c<0)$
適尽廉級法より開方式 $81-9c+2c^3=0$ を得、これを開いて -3.868872 弱を得る。負廉がこの数以下 $(-3.868872<c<0)$ なら原式に正商無し。この数以上 $(c<-3.868872)$ なら原式に正商有り。【適尽方級法 $247-54c-c^2+12c^3=0$ の唯一の実根は -3.25 である。負廉がこの数以下 $(-3.25<c<0)$ なら原式に正商無し。この数以上 $(c<-3.25)$ なら原式に正商有り。】

隅数 $3+x-x^2+dx^3=0$ $(d>0)$
適尽廉級法より開方式 $-2+9d+81d^2=0$ を得、これを開いて $d=1/9=0.111111$ 強を得る。[負商 $(-2/9)$ も得るが原式の隅 1 と異名なので用いない。] 正隅この数以下 $(0<d<0.111111)$ のときは原式に正商有り、$d>0.111111$ のときは原式に正商なし。【適尽方級法 $-13+58d+243d^2=0$ の正商は 0.140928 強より $0<d<0.1409282$ のとき、原式に正商有り、$0.1409282<d$ のとき原式に正商なし。】

少なくとも、例題 $3+x-x^2+x^3=0$ に関しては、適尽廉級法は替数の解を与えていることは、以下のように確認できる。

実数 原文は、実数は替数不可という正しい結果を与えている。

方数 原文は、方数は替数不可という正しい結果を与えている。

廉数 $c<-3.868872$ は正商を持つ必要十分条件ではないが、十分条件になっている。$c=\alpha=-3.868871704455$ として $3+x+\alpha x^2+x^3=0$ の商は $\alpha+3x=0$ の正商 $(-\frac{1}{3}\alpha=)1.289623901$ である。$3+x+\alpha x^2+x^3=0$ は 3 実根 $1.289623901, 3.286969495, -0.7077216925$ を持つので 1.289623901 は原式の重根ではないが原式と廉行の共通根である。関は 1.28962 強を (商の極数として) 求めたと思われる。

隅数 $0<d<0.111111$ は正商を持つ必要十分条件ではないが、十分条件になっている。関は $3+x-x^2+0.111111x^3=0$ の正商 3 を $-1+0.333333x=0$ を開いて (商の極数として) 求めたと考えられる。3 は原式の重根ではないが、原式と廉行の共通根である。

適尽其級法を用いても替数を行なうことができるので、関は『開方飜変之法』重訂当時誤りに気付かなかったと考えられる。

§6.3. 実数係数 3 次方程式

実数係数 3 次方程式について次の定理 6.1 が知られている。たとえば、

`https://ja.wikipedia.org/wiki/三次方程式` (2016 年 11 月 25 日閲覧)

を見よ。

定理 6.1 実数係数の 3 次方程式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0, \quad (a_3 \neq 0)$$

に対し

$$\begin{aligned} D &= -27a_0^2 a_3^2 - 4a_0 a_2^3 - 4a_1^3 a_3 + 18a_0 a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_2^2 \\ D_2 &= -27a_0 a_3^2 - 2a_2^3 + 9a_1 a_2 a_3 \end{aligned}$$

とおくと、

1. $D > 0$ のとき、3 つの異なる実根を持つ。
2. $D < 0$ のとき、1 つ実根と 2 つの互いに共役な複素数根を持つ。
3. $D = 0, D_2 = 0$ のとき、3 重根を持つ。
4. $D = 0, a_3 D_2 > 0$ のとき、2 重根 α と単根 β を持ち、$\alpha < \beta$ となる。
5. $D = 0, a_3 D_2 < 0$ のとき、2 重根 α と単根 β を持ち、$\alpha > \beta$ となる。

証明 1,2 は [1, p.440] を見よ。$D = 0$ のときは重根 α を持つので、$f(x) = a_3(x-\alpha)^2(x-\beta)$ と書ける。

$$f(x) = a_3(-\alpha^2\beta + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - (2\alpha+\beta)x^2 + x^3)$$

より

$$D_2 = a_3^3(-27(-\alpha^2\beta) - 2(-(2\alpha+\beta))^3 + 9(\alpha^2+2\alpha\beta)(-(2\alpha+\beta))) = 2a_3^3(\beta-\alpha)^3$$

よって、3,4,5 がいえる。 □

定理 6.1 の D は $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ の判別式、D_2 は $\frac{1}{8a_3}R(f, f'')$ である。ここで、$R(f, f'')$ は昇冪順に表した f, f'' の終結式である。$-D = 0$ は立方適尽方級法、$-D_2 = 0$ は立方適尽廉級法である。

§6.4. 実数係数 4 次方程式

4 次方程式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 = 0$$

に対し、

$$D_2 = 256a_0a_4^3 - 64a_1a_3a_4^2 + 16a_2a_3^2a_4 - 3a_3^4$$

とおくと、三乗方適尽下廉級法は $D_2 = 0$ である。

$f(x)$ に変換 $x = \xi - \frac{a_3}{4a_4}$ を施すと

$$\begin{aligned}
f\left(\xi - \frac{a_3}{4a_4}\right) =& \frac{1}{256a_4^3}(256a_0a_4^3 - 64a_1a_3a_4^2 + 16a_2a_3^2a_4 - 3a_3^4) \\
&+ \frac{1}{16a_4^2}(16a_1a_4^3 - 8a_2a_3a_4 + 2a_3^3)\xi + \frac{1}{8a_4}(8a_2a_4 - 3a_3^2)\xi^2 + a_4\xi^4 \\
=& \frac{D_2}{256a_4^3} + \frac{1}{16a_4^2}(16a_1a_4^3 - 8a_2a_3a_4 + 2a_3^3)\xi + \frac{1}{8a_4}(8a_2a_4 - 3a_3^2)\xi^2 + a_4\xi^4
\end{aligned}$$

となる。

実数係数 4 次方程式について次の定理 6.2([1, p.440]) が知られている。

定理 6.2 実数係数の 4 次方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0, \quad (a_4 \neq 0)$$

に対し

$$\begin{aligned}
D =& 256a_0^3a_4^3 + 144a_0^2a_2a_3^2a_4 + 144a_0a_1^2a_2a_4^2 + 18a_0a_1a_2a_3^3 \\
&+ 16a_0a_2^4a_4 + 18a_1^3a_2a_3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2 - 192a_0^2a_1a_3a_4^2 \\
&- 128a_0^2a_2^2a_4^2 - 27a_0^2a_3^4 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4 \\
&- 4a_0a_2^3a_3^2 - 27a_1^4a_4^2 - 4a_1^3a_3^3 - 4a_1^2a_2^3a_4
\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
&D > 0 \Longleftrightarrow \text{異なる 4 実根または二組の共役虚根} \\
&D < 0 \Longleftrightarrow \text{異なる 2 実根と共役虚根}
\end{aligned}$$

証明 D は $f(x) = 0$ の判別式であり、$D = 0$ は三乗方適尽方級法である。$f(x) = 0$ の相異なる 4 根を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とすると

$$D = a_4^6(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ のとき $D > 0$ である。$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \bar{\gamma} = \delta \notin \mathbb{R}$ のとき、$\gamma = \lambda + i\mu, \delta = \lambda - i\mu, (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ と書ける。

$$\alpha - \gamma = (\alpha - \lambda) - i\mu = \alpha - (\overline{\lambda - i\mu}) = \overline{\alpha - \delta}, \quad \beta - \gamma = (\beta - \lambda) - \mu i = \overline{\beta - \delta}$$

より

$$
\begin{aligned}
D =& a_4^6(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2(\gamma-\delta)^2 \\
=& a_4^6(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)(\overline{\alpha-\delta})(\alpha-\delta)(\overline{\alpha-\gamma})(\beta-\gamma)(\overline{\beta-\delta})(\beta-\delta)(\overline{\beta-\gamma})(\gamma-\delta)^2 \\
=& a_4^6(\alpha-\beta)^2|\alpha-\gamma|^2|\alpha-\delta|^2|\beta-\gamma|^2|\beta-\delta|^2(-4\mu^2)<0
\end{aligned}
$$

同様に $\bar{\alpha}=\beta, \bar{\gamma}=\delta$ のときは $D>0$ である。実係数の 4 次方程式が重根を持たないときは、(i) 異なる 4 実根、(ii) 二組の共役虚根、(iii) 異なる 2 実根と共役虚根の 3 通りだから、求める結果が得られる。 □

定理 6.2 は、D_2 の符号を条件に加えるとさらに精密になる。次に一例を挙げる。

定理 6.3　実数係数の 4 次方程式

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4=0, \quad (a_4\neq 0)$$

に対し判別式を D とし、

$$D_2=256a_0a_4^3-64a_1a_3a_4^2+16a_2a_3^2a_4-3a_3^4$$

とおく。このとき

$$D>0,\ D_2\leq 0 \quad \Longrightarrow \text{異なる 4 実根}$$

証明　$D_2<0$ のとき、$f(\xi-a_3/(4a_4))=0$ の定数項 $D_2/(256a_4^3)$ と ξ^4 の係数 a_4 は異符号なので、$f(\xi-a_3/(4a_4))=0$ は正根と負根を持つ。$D>0, D_2<0$ のとき $f(x)=0$ は 2 組の共役虚根を持ち得ないので、定理 6.2 より 4 実根である。$D>0, D_2=0$ のときは、$f(x)=0$ は実根 $-a_3/(4a_4)$ を持つので、定理 6.2 より 4 実根である。 □

§7.　おわりに

本研究では『開方飜変之法』について以下のことを示した。

1. 『開方飜変之法』を執筆した関孝和の意図は替数の方法を示すことにある。取り上げられていることは、替数に必要なことだけであり、構造的に順を追って書かれている。本質的でない誤り (すべて適尽方級法で処理すべきところを適尽其級法をもちいるという誤り以外にも得商の候補が複数あるときの決め方、正商あるいは負商を持つ係数の範囲) はあるが、それらはすべて『大成算経』巻之三で、解いてみて確かめるという方法で、訂正されている。

2. 替数とは係数を替えて重根を求めることではなく、係数を替えて正根あるいは負根を持たせること、さらに正根あるいは負根をもつ係数の範囲を決めることである。適尽廉級法は正根あるいは負根をもつ係数の範囲の部分集合を与えることができる。したがって、適尽廉級法は替数に使えないというこれまでの定説は正しくない。適尽廉級法は正根あるいは負根をもつ係数の範囲の部分集合を与えることができるので、関が誤った (すべて適尽方級法で処理すべきところを適尽其級法をもちいる) と考えられる。

3. 立方適尽廉級法および三乗方適尽下廉級法は、三次方程式および四次方程式の実根について情報を与える。立方適尽方級法と立方適尽廉級法の左辺の符号により、三次方程式が三重根を持つか、二重根と単根かの区別を与える。後者の場合、二重根と単根の大小も分かる。三乗方適尽方級法と三乗方適尽下廉級法の左辺の符号により、四次方程式が異なる 4 実根持つための十分条件を与えることができる。

参考文献

[1] 藤原松三郎、代數學第一巻、内田老鶴圃、1982 (初版 1928)
[2] 藤原松三郎 (日本学士院編)、明治前日本数学史第二巻、岩波書店、2008 (初版 1956)
[3] 後藤武史、大成算經の前集の研究、京都大学数理解析研究所講究録、1195(2001), 128-138.
[4] 林鶴一、和算ニ於ケル方程式論ニ就テ、東北數學雑誌 **34** (1931), 145-185.
[5] 平山諦、関孝和 – その業績と伝記 –、恒星社、1974 (初版 1959)
[6] Annick Horiuchi, les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo, J. Vrin, 1994.
[7] 加藤平左衛門、關孝和編　開方飜變ノ研究、東北數學雑誌 **48** (1941),1-24
[8] 長田直樹、関孝和編『開方飜変之法』の諸写本について、数学史研究、**224** (2016), 1-22.
[9] 長田直樹、関孝和編『開方飜変之法』について (I)、*RIMS Kôkyûroku Bessatsu*、本号 (**69** (2018), 49-64).
[10] 高木貞治、代数学講義改訂新版、共立出版、1965
[11] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一、関孝和論序説、岩波書店、2008.