要旨

ユークリッドの互除法とはある自然数a,bの最大公約数(以下$\gcd(a,b)$と表記)を求める手法の一つである。本論文では,このユークリッドの互除法の計算回数が互除法を行う数a,bの大きさに対してどれほど大きくなるのかを求めた。また,その比が最大値をとるときのa,bの条件や,比の極限値など関連する新たな課題を設定,解決し,より深い考察を行う。

きっかけ

ユークリッドの互除法を行ったときに,a,bがどのような数字のとき計算回数が多くかかるのか,また計算回数に限界はあるのかなどに興味を持った。また,a,bが大きくなると計算回数は全体的に多くなっていくので,今回は単純な計算回数の多さではなく,a,bの桁数に対する計算回数の多さを考えようと思った。

用語の定義

手数…ユークリッドの互除法においてかかる計算回数,プロセス数を手数とする。

x…互除法を行う数の桁数とユークリッドの互除法の手数の比

$$\boldsymbol{x=\frac{a,b\text{に互除法を行ったときの手数}}{b\text{の桁数}}}$$

となる。

フィボナッチ数について …n番目のフィボナッチ数をf_nとする。そのとき任意の自然数nに対して$f_1=1, f_2=1, f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$が成り立ち,フィボナッチ数列の第$n$項

$f_n=\frac{1}{\sqrt5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right\}$と表せることが知られている。

探究課題

互除法の手数と数字の桁数の比の最大値は？
比が最大になるときってどんな数のとき？

互除法とフィボナッチ数列の関係

$$\begin{gathered}a=q_1*b+r_1\\ b=q_2*r_1+r_2\\ r_1=q_3*r_2+r_3\\ \vdots\\ r_{n-3}=q_{n-1}*r_{n-2}+r_{n-1}\\ r_{n-2}=q_n*r_{n-1}+r_n\\ r_{n-1}=q_{n+1}*r_n+0\end{gathered}$$

ユークリッド互除法の一般式

$q_n=1$なら全く同じ

$$\begin{gathered}f_{n+1}=f_n+f_{n+1}\\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\\ f_{n-1}=f_{n-2}+f_{n-3}\\ \vdots\\ f_5=f_4+f_3\\ f_4=f_3+f_2\\ f_3=f_2+f_1\end{gathered}$$

フィボナッチ数の一般式を並べたもの

定理１　$x\leq 5$である。つまり手数はbの桁数のたかだか5倍以下となる。また,$x=5$である例は
$(b,a)=(f_6,f_7),(f_{11},f_{12}),(f_{16},f_{17})=(8,13),(89,144),(987,1597)$のみ。

例）$\boldsymbol{a=144, b=89}$のとき

①$144=1*89+55\ =f_{12}\ =f_{11}+f_{10}$
②$89=1*55+34\ =f_{11}\ =f_{10}+f_9$
③$55=1*34+21\ =f_{10}\ =f_9+f_8$
④$34=1*21+13\ =f_9\ =f_8+f_7$
⑤$21=1*13+8=f_8\ =f_7+f_6$
⑥$13=1*8+5\ =f_7\ =f_6+f_5$
⑦$8=1*5+3\ =f_6\ =f_5+f_4$
⑧$5=1*3+2\ =f_5\ =f_4+f_3$
⑨$3=1*2+1=f_4=f_3+f_2$
⑩$2=2*1+0=f_3=f_2+f_1$
↑ $\gcd(89,144)=1$

$x=\frac{\text{手数}}{b\text{の桁数}}=5$

例）$\boldsymbol{a=13, b=8}$のとき

①$13=1*8+5\ =f_7\ =f_6+f_5$
②$8=1*5+3\ =f_6\ =f_5+f_4$
③$5=1*3+2\ =f_5\ =f_4+f_3$
④$3=1*2+1=f_4\ =f_3+f_2$
⑤$2=2*1+0=f_3\ =f_2+f_1$
↑ $\gcd(8,13)=1$

$x=\frac{\text{手数}}{b\text{の桁数}}=5$

また,定理１を求める過程で$a=f_{n+1}, b=f_n$にユークリッドの互除法を行ったときのxは

$x=\frac{n-1}{\left\lfloor\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\right\}\right\rfloor+1}$と表せると分かった。

定理2　k桁のbにユークリッドの互除法を用いて，$\gcd(a,b)$を求めるのに必要な手数は,たかだか$\left\lfloor\frac{k-\log_{10}\frac{1}{\sqrt5}}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}\right\rfloor-1$である。（$k,a,b$自然数）ただし$\lfloor r\rfloor$は実数$r$に対して$r$以下の最大の整数とする。

$k=2$　つまりbが2桁の時は,**定理１**より$x=\frac{\text{手数}}{b\text{の桁数}}\leq 5$なので$a$の値に関わらず手数は10回以下となる。
$k=100$　つまりbが100桁の時は,**定理１**より手数は500回以下となる。しかし**定理2**によってより正確な$\left\lfloor\frac{100-\log_{10}\frac{1}{\sqrt5}}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}\right\rfloor-1=\lfloor 480.1\rfloor-1=479$（回以下）とわかる。

定理3　$\boldsymbol{a=f_{n+1}, b=f_n, x=\frac{a,b\text{に互除法を行ったときの手数}}{p\text{進数での}b\text{の桁数}}}$と定義したとき,$\boldsymbol{x=\frac{n-1}{\left\lfloor\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\right\}\right\rfloor+1}(n\neq 1,2,6,12)}$となり,$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\left\lfloor\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\right\}\right\rfloor+1}=\frac{1}{\log_p\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}}$である。

黄金比が美しい

下の図1は$a=f_{n+1}, b=f_n$にユークリッドの互除法を行ったときの$n=100{,}000$番目までの$p=10$におけるxを出力したもので図2はそれを拡大したものだ。横軸は$b=f_n$のnで,縦軸はxである。このグラフの極限値は

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{\left\lfloor\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\right\}\right\rfloor+1}=\frac{1}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}=4.7849719667816659\ldots$となる。

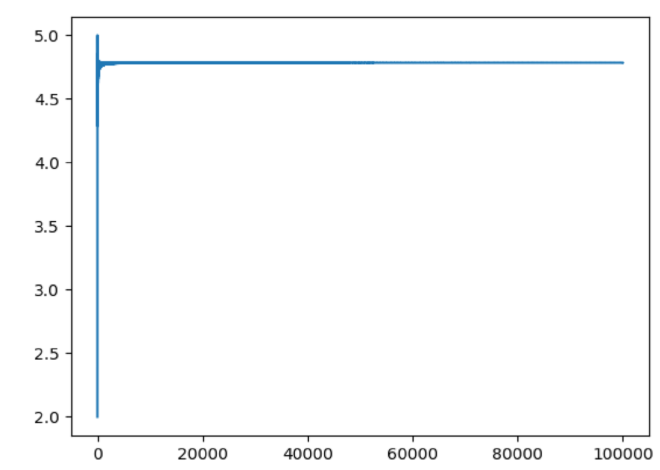

図1

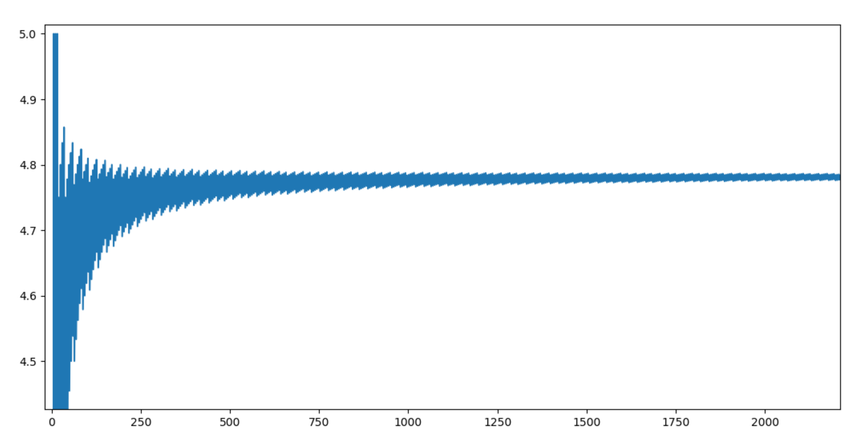

図2

結論

互除法とフィボナッチ数列の関係から,

- 互除法の手数は互除法を行う数の桁数の**たかだか5倍以下**となること
- 手数が桁数のちょうど5倍となる数の組は**たった3通りしかない**こと
- 桁数に応じた手数の最大値
- 互除法を行う数の桁数とユークリッドの互除法の手数の比が$\boldsymbol{\frac{1}{\log_p\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)}}$に収束すること

を示した。

参考文献

1).ジョセフ.H.シルヴァーマン 著 鈴木治朗 訳(2014.5)はじめての数論.丸善出版.

2).Yann Bugeaud, Maurice Mignotte, Samir Siksek (2004.11.19)Classical and modular approaches to exponential Diophantine equations. I. Fibonacci and Lucas perfect powers.Ann. of Math. 163(2006), pp. 969-1018. Yann Bugeaud, Publications.<http://irma.math.unistra.fr/~bugeaud/travaux/fibo.pdf >
(最終閲覧日2019年8月4日)

今後の課題

定理3においてbの桁数をp進数とすることで$\boldsymbol{x}$の定義を拡張し,その極限値を求めた。しかし,今後は**p進数におけるxの最大値**を求めてみたいと思う。

右の表①を用いて現在判明していることを説明したいと思う。この表はフィボナッチ数を様々な進法で表し,それぞれを桁数ごとに分けたときの個数を表したものだ。例えば,10進法の場合1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89と1桁の数が6個,2桁の数が5個なので赤丸の示すように6,5と記している。そして,表において赤色のセルは1桁目と同じ個数の場合,オレンジ色は1桁目より一個少ない場合,青色は二個少ない場合である。黒い枠線が書かれている範囲はxが最大値をとっている桁数である。例えば、10進数ならば1,2,3桁まで囲っている。黄色いマーカーがされている進数はフィボナッチ数の進数となっているときである。ここを境に色の分布が順番に変わっていくのがわかる。

n	6	4,7,10,13,16	8,15	5,9	34	10	6	6,11,16	6,11…,496	×	7
M	2.5	3.0	4.0	4.0	33/8	4.5	5	5.0	5.0	×	7.5
桁数	3進数	4進数	5進数	6進数	7進数	8進数	9進数	10進数	11進数	12進数	13進数
1	3	4	4	5	5	5	6	6	6	6	6
2	3	3	4	4	4	5	4	5	5	5	6
3	2	3	3	3	4	4	5	5	5	6	5
4	2	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5
5	3	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6
6	2	2	3	4	4	4	5	5	5	5	5
7	2	3	4	3	4	4	4	5	5	5	5
8	2	3	3	4	5	5	5	4	5	5	6
9	3	3	3	4	4	4	4	5	5	6	5
10	2	3	4	3	4	4	5	5	5	5	5
11	2	3	3	4	4	5	4	5	5	5	6

表1

定理1

補題1　任意の自然数a,bにユークリッドの互除法を行ったとき, $a \geq a', b \geq b'$をみたす同じ手数の隣り合うフィボナッチ数a', b'は存在する。また, $a = f_{n+1}, b = f_n$のとき, 手数は$n-1$である。

(証明)　ユークリッドの互除法を一般化した式を書くと以下のようになる。

$$a = q_1 * b + r_1$$
$$b = q_2 * r_1 + r_2$$
$$r_1 = q_3 * r_2 + r_3$$
$$\vdots$$
$$r_m = q_{m+2} * r_{m+1} + r_{m+2}$$
$$\vdots$$
$$r_{n-3} = q_{n-1} * r_{n-2} + r_{n-1}$$
$$r_{n-2} = q_n * r_{n-1} + r_n$$
$$r_{n-1} = q_{n+1} * r_n + 0$$

このとき手数は$2 + n - 1 = n + 1$である

以下の互除法の手順においては, $r_{n-1} = q_{n+1} * r_n + 0$となる下から上の順に理論を進めるので注意していただきたい。ただし $r_{n+1} = 0$とし, nは定数とする。

1. $m = n-1$のとき

$$r_{n-1} = q_{n+1} * r_n + r_{n+1} = q_{n+1} * r_n + 0 \geq 2 * r_n \geq 2 = f_3$$

2. $m = n-2$のとき

$$r_{n-2} = q_n * r_{n-1} + r_n \geq r_{n-1} + r_n \geq 3 = f_4$$

3. $m = k-1, k$のとき

$$r_{k-1} = q_{k+1} * r_k + r_{k+1} \geq f_{n-k+3}$$
$$r_k = q_{k+2} * r_{k+1} + r_{k+2} \geq f_{n-k+2}$$

がなりたつと仮定すると, $m = k-2$のとき

$$r_{k-2} = q_k * r_{k-1} + r_k \geq r_{k-1} + r_k \geq f_{n-k+3} + f_{n-k+2} = f_{n-k+4}$$

がなりたつ。

1．2．3. と数学的帰納法より$r_m = q_{m+2} * r_{m+1} + r_{m+2} \geq f_{n-m+2}$

が常になりたつので任意の自然数a,bにユークリッドの互除法を行ったとき, $a \geq a', b \geq b'$をみたす同じ手数の隣り合うフィボナッチ数a', b'は存在する。

$$r_{n-1} = q_{n+1} * r_n + 0 \geq f_3 = 2$$
$$r_{n-2} = q_n * r_{n-1} + r_n \geq f_4 = 3$$
$$r_{n-3} = q_{n-1} * r_{n-2} + r_{n-1} \geq f_5 = 5$$
$$\vdots$$
$$r_m = q_{m+2} * r_{m+1} + r_{m+2} \geq f_{n-m+2}$$
$$\vdots$$
$$r_1 = q_3 * r_2 + r_3 \geq f_{n+1}$$
$$b = q_2 * r_1 + r_2 \geq f_{n+2} = b'$$
$$a = q_1 * b + r_1 \geq f_{n+3} = a'$$

また$a = f_{n+1}, b = f_n$とすれば

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$f_5 = f_4 + f_3$$
$$f_4 = f_3 + f_2$$
$$f_3 = f_2 + f_1$$

となるので$n + 1 - 3 + 1 = n - 1$より手数は$n-1$(回)である。(終)

定理2

k桁のあるフィボナッチ数をf_n, 同桁内で最大のフィボナッチ数をf_mとすると, ある自然数a, bがあってbがk桁の時, ユークリッドの互除法を用いて$\gcd(a,b)$を求めるのに必要な手数は上記よりたかだか$m-1$であるといえる。kとn, mの関係を求め必要な手数を桁数kで表す。(k, m自然数)

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$$

f_nはk桁なので

$$10^{k-1} \leq f_n < 10^k$$

ゆえにxと同様近似値を用いて

$$\left\lfloor \log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor = k - 1 \quad \cdots①$$

が成り立つ。

また, $r - 1 < \lfloor r \rfloor \leq r$より

$$\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} - 1 < \left\lfloor \log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor \leq \log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \quad \cdots②$$

が成り立つ。①②より,

$$\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} < k \leq \log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} + 1$$

よって

$$\log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < k \leq \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1$$

これをnについて解くと

$$\boldsymbol{\frac{k - \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}} - 1}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \leq n < \frac{k - \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}}$$

ゆえにk桁のフィボナッチ数は$k = 1$のとき1番目から6番目, $k \geq 2$のときは$\left\lceil \frac{k - \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}} - 1}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \right\rceil$番目から$\left\lfloor \frac{k - \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \right\rfloor$番目であるといえる。ただし$\lfloor r \rfloor$は実数$r$に対して$r$以下の最大の整数, $\lceil r \rceil$は実数rに対してr以上の最小の整数とする。よって$\boldsymbol{f_m = f_{\left\lfloor \frac{k - \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \right\rfloor}}$で$\boldsymbol{m = \left\lfloor \frac{k - \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \right\rfloor}$であるので$a, b$があって$b$が$k$桁の時, ユークリッドの互除法を用いて, $\gcd(a,b)$を求めるのに必要な手数は, たかだか$\boldsymbol{m - 1 = \left\lfloor \frac{k - \log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}}{\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \right\rfloor - 1}$であるといえる。

補題2　$a = f_{n+1}, b = f_n$のとき, $x = 5$をとりうるのは,
$(a,b) = (f_6, f_7), (f_{11}, f_{12}), (f_{16}, f_{17}) = (8,13), (89,144), (987,1597)$であるときのみである。

(証明)

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$であり, nが十分大きいとき, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$はとても小さくなるので, $f'_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$は誤差が1未満の$f_n$ の近似値となる。このときf'_nがk桁(kは自然数)であるとしたとき,

$10^{k-1} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n < 10^k$　なので常用対数を使うと, f'_nは$\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} + 1$(桁)

桁数kは自然数なので, $k = \left\lfloor \log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1$　ただし$\lfloor r \rfloor$は実数rに対してr以下の最大の整数とする。まずフィボナッチ数が累乗数(他の自然数の累乗になっている自然数)となるのは$f_1 = f_2 = 1, f_6 = 8, f_{12} = 144$のみであることが知られている。[2)] ゆえに

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$は10の累乗にならないので

$$\lfloor \log_{10} f_n \rfloor + 1 = \left\lfloor \log_{10}\left\langle\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\right\rangle \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1$$

が成り立ち, f_nの桁数もk桁であるといえる。そして**補題 1** より$x = \frac{手数}{\lfloor \log_{10} b \rfloor + 1} = \frac{n-1}{\lfloor \log_{10} b \rfloor + 1}$なので

$$\boldsymbol{x = \frac{n-1}{\left\lfloor \log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1}}$$

次に$x = \frac{n-1}{\left\lfloor \log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1} = 5$ であるときのnの範囲を求める。

$r - 1 < \lfloor r \rfloor \leq r$より

$$\frac{n-1}{\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} + 1} \leq \frac{n-1}{\left\lfloor \log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1} < \frac{n-1}{\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

ゆえに

$$\frac{n-1}{\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} + 1} \leq 5 < \frac{n-1}{\log_{10}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}}$$

$$\frac{n-1}{\log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1} \leq 5 < \frac{n-1}{\log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$$

これらを整理して

$1 \leq n < \frac{-1 - 5\log_{10}\frac{1}{\sqrt{5}}}{5\log_{10}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1} = 16.632\ldots$　ゆえに$\boldsymbol{1 \leq n \leq 16}\cdots②$

②を満たす範囲内のnを全て調べると確かに
$\boldsymbol{(b,a) = (f_6, f_7), (f_{11}, f_{12}), (f_{16}, f_{17}) = (8,13), (89,144), (987,1597)}$であるときのみ$x = 5$をとるとわかった。ゆえに題意は示された。(終)

a, bが隣り合うフィボナッチ数である場合以外に$x = 5$をとるK桁の自然数A, Bが存在すると仮定すると, $x = \frac{手数}{K} = 5$なので手数$= 5K$ である。**補題**1より$N - 1 = 5K \Leftrightarrow N = 5K + 1$を満たす数を$N$とすると$a = f_{N+1}, b = f_N$のときも同じ手数$5K$をもつ。また$A > f_{N+1}, B > f_N$かつ$x \leq 5$より$b = f_N$は必ず$K$桁となり, $a = f_{N+1}, b = f_N$のときのxも当然$x = 5$となる。**補題 2** より隣り合うフィボナッチ数であっても$x = 5$をとるのは最大でも$(b,a) = (987,1597)$であるのでbの桁数3より$K \leq 3$である。つまりBは必ず3桁なので$B \leq 999$の範囲を全て調べればよい。また,

$$a = q_1 * b + r_1$$

となる一段目では, q_1の値にかかわらず, $x = \frac{手数}{bの桁数}$となりxが変わらないので$q_1 = 1$としてもよい(q_1が1以外の他の値で$x = 5$をとるとき$q_1 = 1$についても必ず$x = 5$をとる)。ゆえに

$$A = B + r_1 \leq 999 + 998 = 1997$$

となるので$a \leq 1997, b \leq 999, a \geq b$をみたす$a, b$全てに互除法を適用して$x = 5$をとるものをしらべればよい。コンピューターを用いて調べた結果, $q_1 = 1$の場合, $(a,b) =$
$(8,13), (89,144), (987,1597)$のみであった。ゆえに題意は示された。(終)

定理3

これまでは10進数においてのみの桁数を考えていたが, 次は桁の定義を拡張してp進数の桁数を用いたxの極限値を考えていこうと思う。**補題2** において述べたように, フィボナッチ数が累乗数(他の自然数の累乗になっている自然数)となるのは$f_1 = f_2 = 1, f_6 = 8, f_{12} = 144$のみであることが知られている[2)]。ゆえに

$n \neq 1,2,6,12$のとき$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$は$p$の累乗にならないので,

f_nがk桁(kは自然数)であるとすると$k =$

$$\lfloor \log_p f_n \rfloor + 1 = \left\lfloor \log_p\left\langle\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}\right\rangle \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \log_p\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1$$

$(n \neq 1,2,6,12)$

なので, $x = \frac{n-1}{\left\lfloor \log_p\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1} (n \neq 1,2,6,12)$ といえる。

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{\left\lfloor \log_p\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1}$を求める。

(証明)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\left\lfloor \log_p\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\left\lfloor \log_p\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right\rfloor + 1}$$

$r - 1 < \lfloor r \rfloor \leq r$ なので

$\frac{n-1}{\log_p\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} > \frac{n-1}{\left\lfloor \log_p\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \right\rfloor + 1} \geq \frac{n-1}{\log_p\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1}$である。また,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\log_p\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\log_p\frac{1}{\sqrt{5}} + \log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{1}{\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \quad \cdots①$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{\log_p\frac{1}{\sqrt{5}} + n\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}\log_p\frac{1}{\sqrt{5}} + \log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \frac{1}{n}} = \frac{1}{\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \quad \cdots②$$

①, ②とはさみうちの原理より

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{\left\lfloor \log_p\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \right\rfloor + 1} = \frac{1}{\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$といえた。

以上より, $x = \frac{1}{\log_p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$に収束する。(終)