経済論叢（京都大学）第 193 巻第 1 号，2019 年 2 月

〈論　　文〉

経済学における「曖昧性」の解釈

若　井　克　俊*

Ⅰ　はじめに

確実に起こる事象以外を総称して、通常、「不確実な事象」と呼ぶが、後者に関して、経済学では２つのケースを想定する。一つは、不確実な事象がそれぞれ確率的に発生し、その確率が意思決定者に既知の場合であり、もう一つは、不確実な事象が発生する確率がよく分かっていない場合、もしくは、そもそもその事象が確率的に発生しているか否かが分からない場合を指す。本稿では後者を「曖昧性のある状況」もしくは「曖昧性」と称し、その中心的分析手法を平易かつ簡便に解説することを目的とする。

現在、経済学では、「曖昧性のある状況」をあたかも「確率的な現象」として解釈し分析することが一般的である。その際用いられる確率は意思決定者自身が「主観的」に認識しているものであり、この主観的確率を用いて期待効用を計算し、それを最大化するような選択が行われる。このモデルは「主観的期待効用関数」といわれ、Savage（1954）や Anscombe and Aumann（1963）によって公理化された。

一方で、Ellsberg（1961）以降、意思決定者が「主観的期待効用関数」を用いていると解釈すると説明できない現象が実験により示されている。特に、Knight（1921）が主張するように、「確率がわからない」ということ自体を避ける傾向が消費者には見られる。本稿では、この「曖昧性回避」という現象と整合性のあるモデルのうち、まず、Gilboa and Schmeidler（1989）によって提唱された Multiple-priors model（以後 MP と呼ぶ）について解説する。

周知のように、「客観的確率の分かっている分析」では期待効用関数を用いることがほとんどであり、そこでは「リスク」と「リスク回避度」が明確に分離できる。上記の MP は初期のモデルであるため、「曖昧性」と「曖昧性回避度」を分離することが難しい。本稿では、この課題を克服するために Klibanoff, Marinacci, and Mukerji（2005）によって提唱されたモデルも解説する（以下、KMM と呼ぶ）。

MP や KMM は選好関係に対して公理系を設定し、効用関数を導出している。その公理系には「非合理的」な要素は見られない。一方で、Halevy（2007）による実験では、合成された「複数のくじ」上の選好を考える場合、「曖昧性回避」的な意思決定者は、「合成確率」から計算される最終的な利得分布に対して期待効用を適用している様には行動していない。つまり、期待効用を用いる意思決定者が確率計算に洗練されているならば曖昧性回避的にはならない、とも解釈できる。したがって、「合理的」行動と考えられてきた「曖昧性回避」だが、「限定合理的」である、との解釈も

＊　京都大学大学院経済学研究科教授

可能であると考えられるようになってきた。この様な「限界的確率認識能力」と「曖昧性回避度」との関係に基づき、Seo（2009）は異なる公理系に基づいて KMM を導出した。本稿では、Halevy（2007）による実験と、その結果の解釈をする上で Seo（2009）が用いた選好空間についても解説する。

Ⅱ　曖昧性下の消費に関する一般的な効用関数

経済理論においては、「曖昧性」を「実現可能だが生起確率の不明ないくつかの状態が存在する状況」と設定する。各々の「状態」はそれぞれ異なる経済環境を示し、かつ、その集合（「状態空間」と呼ぶ）は分析上考慮すべきすべての可能性を列挙したものと仮定する。本論文では、状態を s で表し、その数は有限で S 個存在すると仮定し、その集合である状態空間を $\Omega=\{1,2,...,S\}$ で表す。

実現された状態に応じて意思決定者は利得を得る。簡略化のため、利得は有限集合 X の中の数字のみ選択可能であると仮定する。また、有限集合 X 上に定義される「くじ」の集合を $\Delta(\mathrm{X})$ と表す。

意思決定者が選択する利得を状態空間上で定義するとき、Anscombe and Aumann（1963）によって導入された「アクト」という概念を用いる（以下、AA-framework と呼ぶ）。アクトとは、状態空間 Ω に含まれるそれぞれの状態 s に対し、$\Delta(X)$ 内の「くじ」を対応させる関数として記述される。数学的にはアクト h は

$$h:\Omega\rightarrow\Delta(X)$$

と定義される。アクトを用いる利点は、$\Delta(X)$ 上に定義できる「生起確率の分かっている『くじ』上の選好」と「生起確率の分からない Ω 上のアクトに対する選好」を分離できる点にある。

具体的には、アクト h の集合を H とし、H 上に選好関係を定義する。ここで、二つの状態が同時に起こることがないため、それぞれの状態における利得を別の財（「条件付き財」と呼ぶ）として扱う。したがって、アクト h は条件付き財上の「くじ」のベクトル $(h(1),...,h(S))$ として表される。これらの定義を用いると、H の上に定義される選好は S 個の条件付き財上の「くじ」の組み合わせに対する選好として定義でき、その選好は

$$V(h(1),...,h(S)) \tag{1}$$

という効用関数で表現できるものと仮定する。

上記の（1）において、すべての状態で同じ「くじ」を受け取る場合は「曖昧性」の影響はない。この場合は「生起確率の分かっている『くじ』上の選好」と解釈できる。この部分に関しては、von Neuman and Morgenstern（1944）によって理論化された「期待効用関数」を用いる。また、それぞれの状態における「くじ」の評価を同じ期待効用関数を用いて行うと仮定すると、曖昧性下での効用関数（1）を

$$V(U(h(1)),..., U(h(S))) \tag{2}$$

の様に表すことができる。ここで、$U(h(s))$ は

$$U(h(s))=E_{h(s)}(u(x(s))) \tag{3}$$

と定義ざれ、　状態 s におけるくじ $h(s)$ の期待効用を表し、u: $X \rightarrow R$ は von Neuman and Morgenstern 効用関数（以後、vNM 効用関数と呼ぶ）を表す。

Ⅲ　主観的確率にもとづく期待効用

曖昧性下における意思決定者の行動を記述する場合、効用関数（2）だけではその具体的性質が不問である。Savage（1954）や Anscombe and Aumann（1963）は、「客観的確率下における意思決定」に用いられる「期待効用」を、客観的確率の定義されていない状態空間における意思決定に応用した。具体的には、Anscombe and Aumann（1963）に倣い、効用関数（2）を、アクト h において、

$$V(U(h(1)),..., U(h(S)))=Pr(1)\times U(h(1))+...+Pr(S)\times U(h(S))=E(U(h)) \tag{4}$$

と表記する。ここで、$Pr(s)$ は意思決定者の状態 s にたいする「主観的確率」と呼ばれ、意思決定者が状態 s をどれくらい重要視しているかを表す尺度と解釈できる。

効用関数（4）においては、以下の性質が成り立つ。

1．それぞれの状態 s において、条件付き財の「くじ」からの効用は $U(h(s))$ である。
2．すべての状態において、条件付き財からの効用を表す vNM 効用関数 u は同一である。
3．アクト h からの効用は、条件付き財の「くじ」からの効用を表す確率変数 $U(h)=(U(h(1)),..., U(h(S)))$ の期待値である。

特に、実際の経済分析では、それぞれの状態 s において $x(s)$ を確実に受け取るという「単純アクト（単に「確率変数」もしくは「利得ベクトル」と呼ぶ）」が用いられる。この場合、（4）は

$$V(U(h(1)),..., U(h(S)))=Pr(1)\times u(x(1))+...+Pr(S)\times u(x(S))=E(u(x)) \tag{5}$$

の様に表記される。「客観的確率下における期待効用」を現す式（3）との類似性より、（4）および（5）は「主観的確率に基づく期待効用関数（もしくは、主観的期待効用関数）」と呼ばれる。

期待効用関数を曖昧性下に用いる利点は、意思決定者が曖昧性をあたかも「主観的リスク」として扱うことにより、客観的確率下における期待効用の性質をそのまま曖昧性下に応用できる点にある。具体的には、条件付き財の効用を表す関数 u の形状によって、意思決定者の主観的リスクに対する選好を表現できる。通常の経済分析では、意思決定者は主観的リスクを避ける傾向があると仮

定する。したがって、主観的確率のもとでの利得ベクトル x の期待値を $E(x)$ と表すと、(1) の表記方法を用いて

$$V(x(1),\dots, x(S)) \leq V(E(x),\dots, E(x)) \tag{6}$$

であることが自然である。特に、x がすべての状態で一定の利得を与えるものでなければ、(6) の不等号は強い不等号であることが自然である。つまり、(6) は、「すべての状態 s において期待値 $E(x)$ を受け取るというリスクのない確率変数のほうが、期待値は $E(x)$ であるが主観的リスクのある確率変数 x よりも好ましい」、という状況を表現している。

期待効用関数を用いると、vNM 効用関数 u が単調増加であるとの仮定下において、上記 (6) の関係は vNM 効用関数が凹関数であることと同値になる。凹関数は経済分析において、種々の好ましい性質を有すること、ならびに、(5) が線形で数学的処理が容易であることから、主観的期待効用関数は曖昧性下の消費者行動を分析する中心的なモデルとして現在利用されている。ここで、曖昧性を主観的リスクと解釈しているため、客観的リスクの評価に用いるべき vNM 効用関数 u が主観的確率下のリスクの評価にもそのまま用いられている点は注意を要する。

Ⅳ 曖昧性回避

上記の主観的期待効用関数のもとでは、意思決定者は客観的確率が定義されていいない状況でもあたかも確率が定義されているかの様に行動する。しかし、Knight (1921) が主張するように、「確率がわからない」ということ自体を避ける傾向が消費者には見られる。有名な例として、Ellsberg (1961) による以下のような思考実験がある。

今、２つの袋があり、それぞれの袋の中に100個のボールが入っている。ボールは赤色か青色をしており、袋１には50個の赤色のボールと50個の青色のボールが入っていることが分かっているが、袋２に入っているボールに関しては「何色がいくつ」という情報はない。ここで、ボールを一つ取りだしてその色を当てる、という賭けを考える。正解した場合は＄100もらい、不正解の場合は何ももらえないものとする。それぞれのケースにおいてどちらを好むか答えよ。

ケース１：	A：袋１の赤色にかける	B：袋１の青色にかける
ケース２：	C：袋２の赤色にかける	D：袋２の青色にかける
ケース３：	E：袋１の赤色にかける	F：袋２の赤色にかける
ケース４：	G：袋１の青色にかける	H：袋２の青色にかける

思考実験の結果、ケース１ではAとBが無差別、ケース２ではCとDが無差別となるが、ケース３ではEがFより好まれ、ケース４ではGがHより好まれる傾向があることが示された。

この思考実験結果は期待効用では表せない。なぜなら、今、仮に袋２において「赤が出る」主観的確率を p とすると、袋１では客観的確率が与えられているから、ケース３の結果を説明するには

$p<0.5$ でなくてはならない。しかし、その場合はケース4では「青が出る確率」が0.5より大きいと考えていることになり、袋2（H）にかけなくてはならないが、これは思考実験結果と矛盾する。

上記の袋2においては「赤色が出る確率」が客観的に与えられておらず、「曖昧性」を表している。したがって、この思考実験結果は、意思決定者は「曖昧性を好まない」傾向があることを示唆している。この「曖昧性回避」を捕らえることが出来るモデルはいつくか提唱さえているが、まず、Gilboa and Schmeidler（1989）によって提唱されたMPを見てみる。MPは

$$min_{p\in P}E_p[u(x)] \tag{7}$$

と表記される。ここで、Pは主観的確率（prior）の集合と解釈することが可能で、その要素が複数あることが「Multiple-priors model」と呼ばれる由来である。Pは数学的に特別な仮定を満たさなくてならないが、ここでは省略する。具体的には、MPではPに含まれる主観的確率に対し、それぞれ期待効用を求め、その上で一番低い期待効用を採用する。つまり、確率変数xの分布にとって一番悲観的な主観的確率を用いて主観的期待効用を計算していることと同じである。もちろん、Pに一つしか要素がなければMPは主観的期待効用になる。したがって、「曖昧性回避」という性質は、Pに複数の要素があることによって表現される。

実際にMPモデルを使って上記の思考実験結果を説明してみる。「赤が出る」という状態と「青が出る」という2つの状態があると考え、前者の主観的確率をpとおく。その上でPをこのpの集合として簡略化してMPモデルを以下のように定義する。

$$min_{p\in[0.3,0.7]}[pu(x_r)+(1-p)u(x_b)]$$

ここで、x_rは赤色が出た時の受取金額を、x_bは青色が出た時の受取金額を示し、主観的確率が取れる範囲を「赤色が出る確率pは0.3から0.7の範囲」と仮定している。このとき、袋2の赤色に賭けた時の効用は青色に賭けた時の効用と等しく、$0.3u(100)$である。ここで、袋1の赤色もしくは青色に賭けた時の効用は$0.5u(100)$であることから、MPが実験結果と整合的であることが見て取れる。

MPは主観的期待効用関数を特殊例として含み、数学上も扱いやすく、捉えようとしている現象もはっきりしているため、経済問題に広汎に応用されている。

V　曖昧性と曖昧性回避の分離

上記（7）を用いて曖昧性回避を考えるとき、Ghirardato and Marinacci（2002）が示すように集合Pの大きさが重要になる。今、意思決定者が2人いて両者が同じリスク選好（つまり、同じvNM効用関数）を持っていると仮定する。この場合、「意思決定者1が意思決定者2よりも曖昧性回避的である」といいことと「意思決定者2の集合Pが意思決定者1の集合Pの部分集合である」ことは同値である。つまり、集合Pが曖昧性回避度を捕らえていることになる。

一方で、集合Pの大きさは「曖昧性」そのものをとられているとも解釈できる。その場合、曖昧

性回避は「最小の主観的期待効用を採用する」ということで表現されていることになるが、上段落のように、集合 P の大きさを変更しないかぎり、「曖昧性回避度」の違いが表現できない。つまり、同じレベルの「曖昧性」を認識している意思決定者において異なる「曖昧性回避度」を表現する、ということが困難である。

Klibanoff, Marinacci, and Mukerji（2005）はこの「曖昧性そのもの」と「曖昧性回避度」を別に表現するモデル（KMM）を提案した。KMM の選好関係を表す空間はここで用いているものとは異なるが、AA-framework に当てまめると式（1）は以下のようになる。

$$V(U(h(1)),\ldots, U(h(S)))=E_m[v(E_p(U(h)))] \tag{8}$$

ここで、p は状態空間上に定義可能な客観的確率、m はすべての客観的確率 p を集めた集合 P の上に定義される「主観的信念」を表す。

上記（8）においては、vNM 効用関数 u は「生起確率の分かっている『くじ』に対するリスク回避度」を表現し、主観的信念 m が「曖昧性」の度合いを表している。その上で、「曖昧性回避度」は関数 v によって表現される。具体的には、意思決定者は、「状態 s が実現する」という現象は確率的に決定されているが、その生起確率分布にはいくつかの可能性があると考えている。その可能性に対する評価は主観的であり、集合 P の上に定義される主観的信念 m で捉えられる。この「主観的な可能性の評価」が「意思決定者が認識している曖昧性」であり、その m 下で、各々の生起確率 p で計算される期待効用 $E_p(U(h))$ の分布を変数とする「曖昧性評価関数 v に基づく期待効用」を計算している。

上記の解釈のように、意思決定者は曖昧性評価関数 v に基づき、「期待効用 $E_p(U(h))$ の期待効用」を計算しているため、「曖昧性回避」は単調性の仮定の下で曖昧性評価関数 v が凹関数であることと同値である。したがって、曖昧性を同様に認識している 2 人の意思決定者（主観的信念 m が同じ意思決定者）がいても、曖昧性評価関数 v の違いによって、曖昧性回避度の違いが表現できる。

KMM は微分可能な v を用いることで、期待効用下で一般的な解法を応用できる。特に、資産価格を説明する理論への応用は進んでおり、いままで説明が難しかった現象も KMM を使うことによって説明されつつある。

Ⅵ 曖昧性回避と確率認識能力との関係

上記（8）の KMM は、曖昧性と曖昧性回避を分離することを目的に導出されている。一方で、上記（8）が導出される「行動学」的な意味づけは明確にはなされていない。この点に関して、Seo（2009）は、「限界的確率認識能力」と「曖昧性回避度」とを関連づけることで、KMM（8）が AA-framework 上で導出されることを示した。

まず、「限界的確率認識能力」と「曖昧性回避度」との関係は、Halevy（2007）による詳細な実験から推測される。ここでは、そのエッセンスのみを紹介する。

今、3 つの袋があり、それぞれの袋の中に 10 個のボールが入っている。ボールは赤色か青色を

している。袋の構成は以下のとおりである。

袋１：５個の赤色のボールと５個の青色のボールが入っている。
袋２：「何色がいくつ」という情報はない。
袋３：０から 10 までの数字が書かれたティケットが入ったボックスから１つティケットを引き、その結果出た数字が袋の中の赤色のボールの数になる。

被験者はそれぞれの袋の中のボールの色に「当たれば x、はずれたら０」という「賭け」を賭ける。一方で、事前にその「賭け」を売却することが出来き、その売却希望価格を V_i と表す（i は袋の種類)。実験の結果、$V_1=V_3$ と答えた被験者はほとんど $V_1=V_2$ と答え、逆に、$V_1\neq V_3$ と答えた被験者はほとんど $V_1\neq V_2$ と答えた。

上記の結果を以下のように解釈する。今、状態空間を $\Omega=\{1,2\}$、「確率 α で赤色が出て x 受け取り、確率 1-α で青色が出て０受け取る」という「くじ」を $L(x;\ \alpha)$ と置く。この仮定の下、「赤色に賭ける」と言う行為は、

袋１：「すべての状態において $L(x; 0.5)$ を受け取るアクト」を表す。
袋２：「状態１においては $L(x; 1)$ を受け取り、状態２においては $L(x;\ 0)$ を受け取るというアクト」を表す。
袋３：$i=0$ から 10 に対して、「すべての状態において $L(x;\ i/11)$ を受け取るアクト」があり、それぞれが確率 1/11 で発生する、という２段階の客観的確率にもとづく「くじ」を表す。

ここで、$V_1=V_3$ と答えたケースは、被験者が２段階の客観的確率から「合成確率」を計算し、それを用いて「２段階の客観的確率にもとづく『くじ』」を「すべての状態において $L(x;\ 0.5)$ を受け取るアクト」に変換していることを表す。Halevy（2007）の実験結果からは、この様な行動をとる被験者の多くは「曖昧性」に対して中立的であることが分かる。つまり、$V_1=V_2$ となることは、赤と黒の対称性から状態確率 $Pr(1)$ を 0.5 と解釈し、袋１と同様の利得分布を有限集合 X 上に形成していることになる。

逆に、$V_1\neq V_3$ と答えたケースは、「合成確率」を用いて「２段階の客観的確率にもとづく『くじ』」を「すべての状態において $L(x;\ 0.5)$ を受け取るアクト」に変換しない「限界的確率認識能力」が示されたものである。この場合、袋２のように「状態空間」の存在を強調することで、状態空間の解釈が「限界的」になり、「曖昧性」に対して中立的でなくなると推測される。

Seo（2009）は、選好関係が定義される空間を H から「H 上に定義されたくじの空間」である $\Delta(H)$ へ拡張することで、Halevy（2007）の実験結果と整合的になるように上記（8）を公理化した。この選好空間自体は「主観的期待効用関数」を導出するために Anscombe and Aumann（1963）によって導入されたものであるが、Seo（2009）は彼らの導入した公理を弱め、「限界的確率認識能力」が「曖昧性回避」の必要条件であることを示した。Halevy（2007）の実験と対応させると、袋３が拡張された $\Delta(H)$ の要素に対応している。

参考文献

Anscombe, F., and R. Aumann (1963): “A Definition of Subjective Probability,” *Annals of Mathematical Statistics*, 34(1), 199–205.

Ellsberg, D. (1961): “Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms,” *The Quarterly Journal of Economics*, 75(4), 643–669.

Ghirardato, P., and M. Marinacci (2002): “Ambiguity Made Precise: A Comparative Foundation,” *Journal of Economic Theory*, 102(2), 251–289.

Gilboa, I., and D. Schmeidler (1989): “Maxmin Expected Utility with Nonunique Prior,” *Journal of Mathematical Economics*, 18(2), pp.141–153.

Halevy, Yoram (2007): “Ellsberg Revisted: An Experimental Study,” *Econometrica*, 75(2), pp.503–536.

Klibanoff, P., M. Marinacci, and S. Mukerji (2005): “A Smooth Model of Decision Making under Ambiguity,” *Econometrica*, 73(6), pp.1849–1892.

Knight, F. (1921): *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin, Boston.

Savage, L. (1954): *The Foundations of Statistics*, New York, John Wiley & Sons.

Seo, Kyoungwon (2009): “Ambiguity and Second-order Belief,” *Econometrica*, 77(5), pp.1575–1605.

von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*, New Jersey, Princeton University Press.