RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B71 (2018), 1–20

ニュートンの『解析について』
Isaac Newton's *De Analysi*

長田直樹
Naoki Osada *

Abstract

Isaac Newton gives three rules for quadrature in his *De Analysi per æquationes numero terminorum infinitas* (1669). First we read Nicolaus Mercator's *Logarithmotechnia* (1668) which gives Newton a chance to write *De Analysi*, and we compare Mercator's study on computation of logarithms with that by Newton. Next we consider the three rules in *De Analysi.* In particular, we compare operations in decimal numbers with those in literals (general variables). Moreover we also clarify the meanings of "p and x separately are of least dimension" and "x and y either separately or multiplied together are of the most and equal dimensions everywhere" in the literal resolution of affected equations.

§ 1.　はじめに

アイザック・ニュートンが独力で数学の研究を始めたのは、1664 年 4 月頃である。その年の冬には円の求積のために無限級数、つづいて直角双曲線の下側の面積を表す無限級数を発見した。今日の記号ではそれぞれ、

$$\int_0^x (1-t^2)^{\frac{1}{2}}dt = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 - \frac{5}{1152}x^9 - \cdots,$$

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots \tag{1.1}$$

である。1665 年の夏には (1.1) に基づき $\log 1.1, \log 0.9, \log 1.01$ などの値を高精度で計算している。1666 年 10 月には無題の論文 — ホワイトサイドに従い「流率に関する 1666 年 10 月論文」あるいは簡単に「1666 年 10 月論文」と呼ぶ — を執筆している。

Received November 30, 2017, Revised January 17, 2018
2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A45
Key Words: History of Mathematics, Isaac Newton, affected equation, Newton method, Nicolaus Mercator
*東京女子大学 Tokyo Woman's Christian University
email: `osada@lab.twcu.ac.jp`

一方、ニコラス・メルカトルは 1668 年秋に『対数技法』を出版した。ジョン・コリンズは『対数技法』をアイザック・バローに送り、バローはこれをニュートンに見せた。『対数技法』の後半の対数計算の部分 (全体の 1/4) は、ニュートンが 1665 年夏までに得ている。ニュートンは先取権を確保するため、『無限個の項をもつ方程式による解析について』— 『解析について』と略す — を執筆し、数編の論文と一緒に 1669 年 7 月頃バローに持参した。バローは『解析について』を高く評価し、コリンズに送った。コリンズはジェームズ・グレゴリーなど彼の文通相手に内容を書き送った。それにより、『解析について』はイギリスの数学者の間で知られることとなった。[2, pp.215-220]

『解析について』は求積についての 3 つの規則を与えている。規則 1 は有理数冪の単項式 $x^{\frac{m}{n}}$ の求積、規則 2 は有理数冪の級数の項別積分が可能であること、規則 3 では、分数式、根号を含む式、および二変数代数方程式で表される陰関数を 10 進数についての除算、開平、一変数数値方程式の解法と同様の方法で有理数冪の無限級数に展開することである。そのあと、サイクロイドや円積線などの機械的曲線 (超越曲線) に対し無限級数展開と項別積分を用いた応用を与えている。

本論文では最初に、ニュートンに『解析について』を執筆する切っ掛けを与えた、メルカトルの『対数技法』(1668) における対数の計算の研究とニュートンの研究との比較を行なう。ついで、規則 1,2 を概観したあと、規則 3 についてニュートンの説明と例に基づき、現代数学の記号や概念を用いて解説を行なう。特に、複合方程式の数値解法を現代的に定式化し、また文字解法における「分離している最小次元の項」および「分離しているか互いに掛け合わされた項の次元が最大で等しい項」の意味を明らかにする。複合方程式の文字解法の現代的定式化と証明については、稿を改める [16]。

ニュートンの論文の引用はホワイトサイド編『ニュートン数学論文集』[20](MP と略す) から行い、ニュートンの書簡の引用はターンバル編『ニュートンの往復書簡』[19] から行う。日本語訳は [3, 4, 6, 8] などの先行研究を適宜参照する。引用文中 ( ) は原注、[ ] は引用者の補足である。2 節を除き、数式は可能な限り MP のラテン語版通りとし、図は MP を基に作成する。

§ 2. メルカトル『対数技法』

『対数技法』[15] は全部で 19 の命題からなる。最後の 6 つの命題 (命題 XIV から命題 XIX) で対数の計算技法が与えられている。

図 1 は直角双曲線と漸近線である。命題 XV で $\mathrm{AI} = \mathrm{BI} = 1, \mathrm{HI} = a$ とおき、

$$\mathrm{FH} = \frac{1}{1+a} = 1 - a + aa - a^3 + a^4 (\&\mathrm{c.}) \tag{2.1}$$

を次のように除算を用いて導いている。

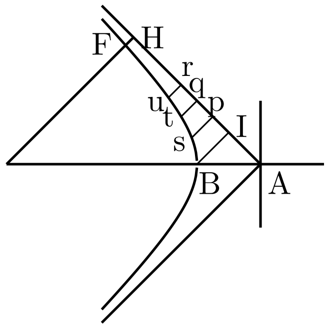


図 1. 直角双曲線と漸近線

$$
\begin{array}{l|l}
1+a\ )\ 1 & 1 \\
\quad \underline{1+a} & \\
\quad 0-a & -a \\
\qquad \underline{-a-aa} & \\
\qquad\ 0+aa & +aa \\
\qquad\quad \underline{+aa+a^3} & \\
\qquad\qquad 0-a^3 & -a^3
\end{array}
$$

命題 XVII で双曲線と漸近線で囲まれる部分の面積を与えている。図 1 において $\mathrm{Ip} = \mathrm{pq} = \mathrm{qr} = a$ とする。命題 XIV,XV より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ps} &= 1 - a + aa - a^3 + a^4 \&\mathrm{c} \\
\mathrm{qt} &= 1 - 2a + 4aa - 8a^3 + 16a^4 \&\mathrm{c} \\
\mathrm{ru} &= 1 - 3a + 9aa - 27a^3 + 81a^4 \&\mathrm{c}
\end{aligned}
$$

である。辺々加えると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ps} + \mathrm{qt} + \mathrm{ru} =& \text{面積 BIru} \\
=& 3 - 6a + 14aa - 36a^3 + 98a^4 \&\mathrm{c}
\end{aligned}
$$

となる [15, p.32]。メルカトルはここまでしか書いてないが、真意 [8, p.242] を現代的に表すと以下のようになる。$\mathrm{AI} = 1, \mathrm{HI} = x = na$ とする。

$$
\begin{aligned}
\text{面積 BIHF} &\approx a(\sum_{i=1}^{n} 1)a^0 - a(\sum_{i=1}^{n} i)a^1 + a(\sum_{i=1}^{n} i^2)a^2 - a(\sum_{i=1}^{n} i^3)a^3 + \cdots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x}{n} \sum_{i=1}^{n} i^j \left(\frac{x}{n}\right)^j
\end{aligned}
$$

そこで、$n \to \infty$ とすると

$$
\begin{aligned}
\text{面積 BIHF} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{j+1}}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^j}{n^j} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{j+1} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{j+1}}{j+1} \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。ここで、

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^j \left[= \int_0^1 x^j dx\right] = \frac{1}{j+1} \qquad (2.3)
$$

はジョン・ウォリスが 1656 年に『無限算術』[18, p.42] 命題 44 で与えている。

メルカトルは $\log 1.1$ の値を表 1 のように計算している。さらに、$\log 1.1, \log 1.21$ をそれぞれ 44 桁計算している。

表 1. メルカトルによる $\log 1.1$ の計算

a	0.1	$-\frac{a^2}{2}$	-0.005
$\frac{a^3}{3}$	0.000333333	$-\frac{a^4}{4}$	-0.000025
$\frac{a^5}{5}$	0.000002	$-\frac{a^6}{6}$	-0.000000166
$\frac{a^7}{7}$	0.000000014		-0.005025166
	0.100335347		
	-0.005025166		
	0.095310181		

メルカトル『対数技法』(1668) とニュートンの 1664/65 年冬から 1665 年夏にかけての研究を比較する。ニュートンは (2.1) をウォリス的補間 (MP I, p.112) と除算 (MP I, p.134) の両方で与えている。メルカトルの除算による方法は、ニュートンと表現は多少異なるが同じである。直角双曲線と漸近線で囲まれる部分の面積 (2.2) をニュートンは

$$
\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots
$$

の項別積分により (MP I, p.134) 与えている。一方、メルカトルは

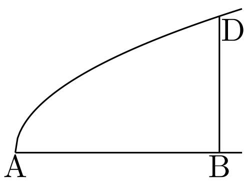
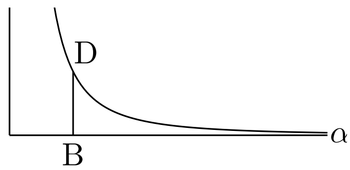
$$
\int_1^x \frac{1}{1+t} dt
$$

に区分求積法と無限級数 (2.1) を用いている。絶対値の小さい a に対する $\log(1+a)$ を高精度に計算するメルカトルの方法は、表現に多少の違いはあるものニュートンの方法と同じである。ニュートンは $\log 1.1, \log 0.9, \log 1.01$ などの値を 55 桁計算し (MP I, pp.135-142)、51 桁ないし 55 桁正確に求めている。一方、メルカトルは、$\log 1.1, \log 1.21$ の値を 44 桁

計算し、43 桁正確に求めている。($\log(1+a)$ の値の検証は数式処理システム Maple 2016 による。)

§ 3.　求積についての 3 つの規則

『解析について』の冒頭で、求積についての 3 つの規則を与えている。

> 少し前に私が得た曲線の量を無限項の級数で量る一般的方法は、厳格に証明されるというよりは、以下のように簡潔に説明される。
>
> ある曲線 AD の基線 AB に対し、BD を縦座標とし、AB を x、BD を y とする。$a, b, c, \ldots$ は与えられた量とし、m, n は整数とする。そのとき、
>
> 
>
>
> **規則 1.** $ax^{\frac{m}{n}} = y$ ならば、$\dfrac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ は面積 ABD に等しい。
> [例 1,2,3 略]
> 例 4 もし $\frac{1}{x^2}(= x^{-2}) = y$ ならば、すなわち、もし $a = n = 1\&m = -2$ ならば、$\left(\dfrac{1}{-1}x^{\frac{-1}{1}} =\right) - x^{-1}\left(= \dfrac{-1}{x}\right) = \alpha\mathrm{BD}$ は α の方向に無限に広がっている。線分 BD の遠い方の側なので符号を負とおく。
>
> 
>
>
> [例 5,6 略]　　　　MP II, pp.206-207

例 4 は $m < 0, n > 0, |m| > n$ の場合で、現代の記号により表すと無限積分

$$\alpha\mathrm{BD} = -\int_x^\infty \frac{1}{t^2}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_b^x \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{x}$$

である。

規則 1 をニュートンは 1665 年頃の手稿で「$apx^{\frac{m}{n}} = q$ ならば、$\dfrac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}} = y$」(MP I, p.344) の形で与えている。ここで、$p = \frac{dx}{dt}, q = \frac{dy}{dt}$ であるので、

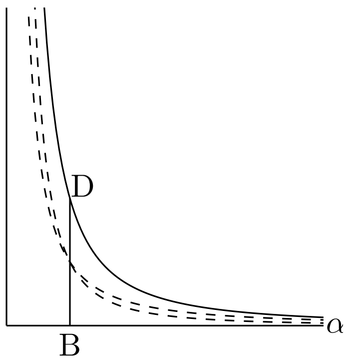
$$\frac{dy}{dx} = ax^{\frac{m}{n}} \text{ ならば } y = \frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$$

ということになる (MP I, p.345 注 (6))。1656 年ジョン・ウォリスは、『無限算術』において

$$\int_0^1 \sqrt[n]{x^m}dx = \frac{n}{m+n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots; m = 0, 1, 2, \ldots,$$

を帰納法と補間法により与えているが、ニュートンは冪根を有理指数で表し、m を整数全体に、$[0, 1]$ 区間の定積分を不定積分に拡張している。

規則 2. y の値がこの種のいくつかの項の和で表されるとき、面積はそれぞれの和になる。
[第 1 例略]
第 2 例 $x^{-2}+x^{\frac{-3}{2}} = y$ のとき、$-x^{-1}-2x^{\frac{-1}{2}} = \alpha\mathrm{BD}$ あるいは $x^{-2}-x^{\frac{-3}{2}} = y$ のとき、$-x^{-1}+2x^{\frac{-1}{2}} = \alpha\mathrm{BD}$ [下図の破線は $y = x^{-2}, y = x^{\frac{-3}{2}}$、実線は $y = x^{-2}+x^{\frac{-3}{2}}$]



MP II, p.208

有限項の項別積分について述べている。第 2 例を現代表記すると

$$\begin{aligned}\alpha\mathrm{BD} &= -\int_x^{\infty}(t^{-2}+t^{-\frac{3}{2}})dt \\ &= -\lim_{b\to\infty}\int_x^b (t^{-2}+t^{-\frac{3}{2}})dt = -x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

となる。

ニュートンは有限和と無限和の違いについては区別していない。1665 年以降、規則 2 を繰り返し無限和に適用している (MP I, pp.113-115)。1665 年夏 (MP I, pp.134-141) には

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - \cdots$$

を項別積分し、双曲線の下の面積

$$[\log(1+x) =]\, x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \tag{3.1}$$

を得て、$x = \pm 0.1, \pm 0.01, \pm 0.001, \pm 0.0001$ などに対し $\log(1+x)$ の値を計算し、$|x|$ が小さいとき (3.1) が十分速く収束することを確かめている。この時点で無限級数展開を項別積分

することの有効性を確信したと思われる。さらに、1666 年 10 月論文では、$\frac{a}{b+cx}, \sqrt{aa-xx}$ を級数展開し項別積分している (MP I, p.413)。

§4. 規則 3

『解析について』で一番言いたかったのは、次の規則 3 と思われる。

> **規則 3.** y の値あるいはその項が前に述べたものよりも複雑なときは、算術家が 10 進数について割り算をしたり、冪根を開いたり、複合方程式を解くのと同じ方法で、文字 [一般変量] を処理することによってそれをより単純な項に還元されるべきである。 MP II, pp.210-213

割り算により無限級数展開を求めることは、すでに 1665 年秋の手稿に「10 進分数と同様に $\frac{aa}{b+x}$ を割れば」(MP I, p.134) とある。

規則 3 は「1666 年 10 月論文」には、次のように見える。

> [命題]**8** もし、2 つの物体 A と B が速度 p と q で線 x と y を描き、線の一方 x と運動 q と p の比 $\frac{q}{p}$ との間の関係を表している方程式が与えられたとして、もう一方の線 y を見出すこと。 MP I, p.403
>
> しかしこの 8 番目の命題は、このように機械的に解かれる。すなわち、あたかも、10 進数について除算、開平、あるいはヴィエトのベキの解析的解法により方程式を解くのと同じように、$\frac{q}{p}$ の値をもとめよ。 MP I, p.413

「1666 年 10 月論文」では「ヴィエトのベキの解析的解法」に続き例 3 は $\frac{q^3}{p^3} * -ax\frac{q}{p} - x^3 = 0$ と問題のみが与えられ、解法が余白となっている (MP II, p.414 注 (44))。『解析について』では「複合方程式を解く」と改められ、10 進数では数値方程式 $y^3 - 2y - 5 = 0$ に対する数値解法、文字 (一般変量) では文字方程式 $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ に対する文字解法 (代数解法) が与えられている。

規則 3 は、「1666 年 10 月論文」、『解析について』、『級数と流率の方法について』(1670/1) で繰り返し述べられている。複合方程式については『解析について』と『級数と流率の方法について』において 10 進数の場合 — 数値方程式に対するニュートンの方法 — が与えられているが、10 進数の除算と開平については、これらの 3 論文では説明が省かれている。ニュートンは 10 進数と多項式の除算と開平について 1673-1683 年のルーカス教授職代数学講義 (MP V, pp.54-491) — 『代数学講義』と略す — で与えている。講義録は後任のルーカス教授職であるウィリアム・ホイストンにより 1707 年に『普遍算術』として出版されている。

『代数学講義』の冒頭は規則 3 に通じるものがある。

> 計算は通俗的な算術のように数を使って、または解析学者のやり方のように一般的な記号を使って、実行される MP V, p.55

§ 4.1. 除算

例えば $4798 \div 23 = 208.6086\cdots$ を筆算で行なう場合、今日我々が行なう計算を左に、ニュートンが『代数学講義』(MP V, p.76) で行なった計算を右に示す。

$$
\begin{array}{l}
\quad\ \ \overline{208.6086} \\
23)4798 \\
\ \ \underline{46} \\
\quad 198 \\
\quad \underline{184} \\
\quad\ \ 14\,0 \\
\quad\ \ \underline{13\,8} \\
\qquad\ 200 \\
\qquad\ \underline{184} \\
\qquad\quad 160 \\
\qquad\quad \underline{138} \\
\qquad\qquad 22
\end{array}
$$

今日の計算

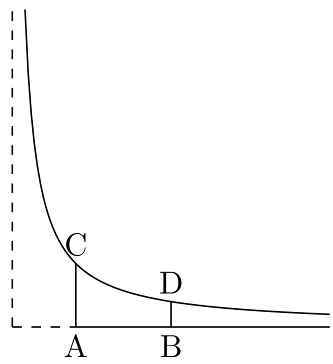
$$
\begin{array}{l}
23)4798\ (208, 6086\ \&c. \\
\quad \underline{46} \\
\quad\ \ 19 \\
\quad\ \ \underline{00} \\
\quad\ \ 198 \\
\quad\ \ \underline{184} \\
\qquad 140 \\
\qquad \underline{138} \\
\qquad\quad 20 \\
\qquad\quad \underline{00} \\
\qquad\quad 200 \\
\qquad\quad \underline{184} \\
\qquad\qquad 160
\end{array}
$$

ニュートンの計算

ニュートンの計算は、今日の計算の最後の 2 段が省かれているが、最後の 2 段は商の小数第 4 位の 6 が正しいことを確認するだけなので、省略可能である。10 進数の除算と同じ方法による還元について「1666 年 10 月論文」では $\frac{a}{b+cx}$ について級数展開とその項別積分の結果 (MP I, p.413) のみが与えられているだけで説明は無い。『解析について』は次のように書いている。

> 除算による [還元の] 例 $\dfrac{aa}{b+x} = y$ とせよ。その曲線は明らかに双曲線である。
> 今、その分母から方程式を自由にするため次のように除算を行なう。

$$
\begin{array}{l}
b+x\big)\, aa+0 \quad \left(\dfrac{aa}{b}-\dfrac{aax}{bb}+\dfrac{aax^2}{b^3}-\dfrac{aax^3}{b^4}\&\mathrm{c}\right.\\
\quad aa+\dfrac{aax}{b}\\
\hline
\quad 0-\dfrac{aax^2}{b}+0\\
\quad\quad -\dfrac{aax^2}{b}-\dfrac{aax^2}{bb}\\
\hline
\quad\quad\quad 0\quad +\dfrac{aax^2}{bb}+0\\
\quad\quad\quad\quad +\dfrac{aax^2}{bb}+\dfrac{aax^3}{b^3}\\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad 0-\dfrac{aax^3}{b^3}+0\\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad -\dfrac{aax^3}{b^3}-\dfrac{aax^4}{b^4}\\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad 0+\dfrac{aax^4}{b^4}\&\mathrm{c}.
\end{array}
$$



この方程式 $y=\dfrac{aa}{b+x}$ の代わりに、新しい方程式 $y=\dfrac{aa}{b}-\dfrac{aax}{b^2}+\dfrac{aax^2}{b^3}-\dfrac{aax^3}{b^4}\&\mathrm{c}$ が現れる。ここで、級数は無限に続く。規則 2 の結果から ABDC の面積は

$$\mathrm{ABDC}=\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}\&\mathrm{c}$$

に等しい。無限級数は最初の数項で役に立ち、x が b よりかなり小さければ十分正確である。 MP II, pp.212-213

『方法について』では、上記の除算に続いて x と b を入れ替えて、漸近ベキ級数を与えている。

あるいは、このやり方で除式の最初の項として x をおくと、

$$x+b)aa(\frac{aa}{x}-\frac{aab}{xx}+\frac{aabb}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4}\&\mathrm{c}$$

を生じさせるだろう。 MP III, pp.36-39

10 進数の除算における数列 $1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$ を分数式の級数展開における漸近列 $1, x, x^2, x^3, \ldots$ あるいは $1, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \ldots$ に対応させたものになっている (MP II, p.224, 注 (70) を見よ)。

§ 4.2. 開平

例えば $\sqrt{3297.60}=57.4247\cdots$ を筆算で行なう場合、今日我々が行なう計算を左に、ニュートンが『代数学講義』(MP V, p.90) で行なった計算を右に示す。

	5 7. 4 2 4 7
5	$\sqrt{3297.60}$
5	25
107	797
7	749
1144	48 60
4	45 76
11482	2 8400
2	2 2964
114844	543600
4	459376
1148487	8422400
7	8039409
1148494	382991

今日の計算

```
32·97;6   (57,4247
25
 7 97
 7 49
   48 60
   45 76
1148 )2 84(247
```

ニュートンの計算

32· の右肩の点は被開平数を 2 桁ごとに 10 進数を分けた切れ目、; は被開平数の小数点、, は商の小数点を表すニュートンの記号である。最下行は、$57.4 \times 2 = 114.8, 2.84 \div 114.8 = 0.0247$ である。57.4 まで開いていたので、それに 0.0247 を加えた値を平方根の小数第 4 位までの値としている。

ニュートンの計算「1148)284(247」は現代の記法を用いると以下のように説明できる。

$$\sqrt{B^2+\epsilon} = B + \frac{\epsilon}{2B} + O\left(\frac{\epsilon^2}{B^3}\right)$$

より

$$\sqrt{A} = \sqrt{B^2+\epsilon} \approx B + \frac{\epsilon}{2B} \tag{4.1}$$

が成り立つ (MP V, p.90, 注 (60) 参照) ので、(4.1) において $A = 3297.6, B = 57.4, \epsilon = 2.84$ おくと

$$\sqrt{3297.6} = \sqrt{57.4^2 + 2.84} \approx 57.4 + \frac{2.84}{2 \times 57.4} = 57.4247$$

となる。ニュートンは、1675 年 7 月 24 日付けのジョン・スミス宛の書簡 [19, I, p.348] において、「A の平方根 [、立方根、四乗根]B が 10 進で 5 桁得られたとき

$$B + \frac{A - B^n}{nB^{n-1}}, \quad n = 2[,3,4]$$

は 10 進で 11 桁の平方根 [、立方根、四乗根] である」と書いている。(4.1) の B の有効桁は 3 桁なので、除算 $\frac{\epsilon}{2B}$ を 6 桁求めている。(実際は 57.42473 まで 7 桁正しい。)

10 進数の開平と同じ方法による還元について「1666 年 10 月論文」では $\sqrt{aa - xx}$ について級数展開とその項別積分の結果 (MP I, p.413) のみが与えられているだけで説明は無い。『解析について』は次のように書いている。

> 開平による [還元の] 例　もし、$\sqrt{\ } : aa + xx = y$ とするとき、以下のようにその根を開く。

$$aa+xx\Big(a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\&c$$

$$\underline{aa}$$

$$0+xx$$

$$\underline{xx+\frac{x^4}{4aa}}$$

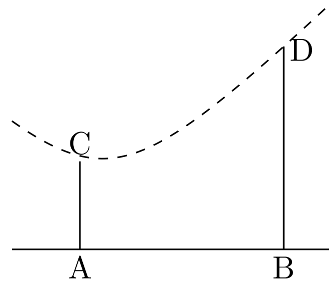
$$0-\frac{x^4}{4aa}$$

$$\underline{-\frac{x^4}{4aa}-\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{64a^6}}$$

$$0+\frac{x^6}{8a^4}-\frac{x^8}{64a^6}$$

$$\underline{+\frac{x^6}{8a^4}+\frac{x^8}{16a^6}-\frac{x^{10}}{64a^8}+\frac{x^{12}}{256a^{10}}}$$

$$0-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}\&c.$$



$\surd : aa+xx=y$ の代わりに新しい方程式、すなわち

$$a+\frac{xx}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}\&c$$

が得られ双曲線の面積は

$$\mathrm{ABDC}=ax+\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}+\frac{x^7}{112a^5}-\frac{5x^9}{1152a^7}\&c.$$

となるであろう。 MP II, pp.214-217

ウィリアム・ジョーンズが 1711 年に『解析について』を出版した際、最後の 2 項を削除している (MP II, p.215, 注 (35))。$-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}\&c.$ までの計算では、商は $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}$ までしか得られない [11, p.185] ためと思われる。

商を $a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}$ まで求めたとき、10 進数の開平と同様に計算すると

$$2a+\frac{x^2}{a}-\frac{x^4}{4a^3}+\frac{x^6}{8a^5}\Big)-\frac{5x^8}{64a^6}+\frac{x^{10}}{64a^8}-\frac{x^{12}}{256a^{10}}\Big(-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}$$

より、

$$a+\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}+\frac{x^6}{16a^5}-\frac{5x^8}{128a^7}+\frac{7x^{10}}{256a^9}-\frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\&c$$

が得られる。ニュートンは、草稿の段階でこのように計算したことも考えられる。

§ 4.3. 複合方程式

複合方程式とは、3 項以上からなる代数方程式である [7, p.132]。$y^3-2y-5=0$ は数値方程式、$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ は文字方程式という。($(-2a^3-x^3)+(a^2+ax)y+y^3=0$ と考える。x と a が文字である。)

4.3.1. 数値方程式の解法

複合方程式の解法による例 解法の技法には困難さが横たわっているので、最初に数値方程式を用いた方法を説明する。

$y^3 - 2y - 5 = 0$ が解かれるとせよ。2 は求める根と根の 10 分の 1 未満だけ異なる数とせよ。そのとき、$2 + p = y$ とおき、この値を方程式に代入し、現れる新しい方程式

$$p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$$

の根 p が商に加えられる。[後略]

$$\left(\begin{array}{l} +2,10000000 \\ -0,00544853 \end{array}\right. \\ \quad 2,09455147$$

$2 + p = y)$	y^3	$+8 + 12p + 6p^2 + p^3$
	$-2y$	$-4 - 2p$
	-5	-5
	Summa	$-1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0,1 + q = p)$	$+p^3$	$+0,001 + 0,03q + 0,3q^2 + q^3$
	$+6p^2$	$+0,06 \quad + 1,2 \quad + 6,0$
	$+10p$	$+1, \quad + 10$
	-1	$-1,$
	Summa	$+0,061 + 11,23q + 6,3q^2 + p^3$
$-0,0054 + r = q)$	$6,3q^2$	$+0,000183708 - 0,06804r + 6,3r^2$
	$+11,23q$	$-0,060642 \quad + 11,23$
	$+0,061$	$+0,061$
	Summa	$+0,000541708 + 11,16196r + 6,3rr$

$-0,00004853$

MP II, pp.218-219

文章で説明されている箇所および省略した箇所を現代表記で示す。

N1. $y_0 = 2$ を初期値に取る。2 は求める根 α と $|\alpha|/10$ 以下の差である。

N2. $y = 2 + p$ を方程式 $f(y) = y^3 - 2y - 5$ に代入し、p の方程式 $f_1(p) = f(2 + p) = p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$ を得る。(2 次以上の項)$p^3 + 6p^2$ は小さいので無視し $10p - 1 = 0$ を解いて $p = 0.1$ を商とする。

N3. $p = 0.1 + q$ を方程式 $f_1(p) = 0$ に代入し、$f_2(q) = f_1(0.1 + q) = q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$ を得る。$f_2(q) = 0$ の 2 次以上の項を無視した $11.23q + 0.061 = 0$ を解いて $q = -0.0054$ を得る。(q の小数点以下 0 が 2 つ続くので、q の有効桁数は 2 桁にとる。[5, p.54] 参照。)

N4. $q = -0.0054 + r$ とおき、$f_2(q)$ の q^3 は有意でないので無視し $\tilde{f}_2(q) = 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$ に代入し、$\tilde{f}_3(r) = 6.3r^2 + 11.16196r + 0.000541708 = 0$ を得る。$\tilde{f}_3(r) = 0$ の $6.3r^2$ を無視して $r = -0.000541708/11.16196 = -0.00004853$ を得る。(r の小数点以下 0 が 4 つ続くので、r の有効桁数は 4 桁にとる。)

N5. $y = 2 + 0.1 - 0.0054 - 0.00004853 = 2.09455147$ が根の近似値である。

真の根は $2.09455148154\ldots$ であるので、求めた根の小数第 8 位が正しくない。N4 で「q^3 は有意でないので無視」したためである。r を小数第 8 位まで求める際は、r の係数がおよそ 11 であるので、定数項は小数第七位まで求める必要がある。$|r| < 10^{-4}$ として q^3 を $10^{-7} = 0.0000001$ 未満を切り捨てにより計算すると

$$q^3 = -0.000000157464 + 0.00008748r - 0.0162r^2 + r^3 \approx -0.0000001$$

となるので、q^3 は無視できない。MP III, p.44 注 (13) を見よ。この誤りは『方法について』で以下のように訂正されている。取り消し線は原文では削除する文字 1 つづつに斜線が引かれている。(途中までは『解析について』と同一であるので略す。)

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} +2,10000000 \\ -0,00544852 \end{array}\right. \\ \quad 2,09455148 \end{array}$$

$-0,0054 + r = q.$	$+q^3$	$-0,000000 1\cancel{57464}$	$+\,0,000\cancel{08748}r$	$-\,\cancel{0,0162}rr$	$+\,\cancel{1}r^3$
	$6,3q^2$	$+0,000183 7\cancel{08}$	$-\,0,068\cancel{04}$	$+\,\cancel{6,3}$	
	$+11,23q$	$-0,060642$	$+\,11,23$		
	$+0,061$	$+0,061$			
	Summa	$+0,0005416$	$+\,11,162r$		

$-0,00004852 + s = r$

MP III, pp.44-45

『解析について』の N4,N5 が以下のように訂正されている。

N4′. $q = -0.0054 + r$ とおき、$f_2(q)$ に代入し、$f_3(r) = r^3 + 6.2838r^2 + 11.16204748r + 0.000541550536 = 0$ の 1 次近似式 (定数項は有効桁数 4 桁、1 次の項は有効桁数 5 桁計算し) $\bar{f}_3(r) = 11.162r + 0.0005416 = 0$ を解いて商 $r = -0.0005416/11.162 = -0.00004852$ を得る。

N5′. $y = 2 + 0.1 - 0.0054 - 0.00004852 = 2.09455148$ が根の近似値である。

数値方程式の解法を現代的記法により定式化する。ニュートンは数値方程式の解法を『解析について』、『方法について』、および「前の書簡」[19, II, p.23] で与えているが、取り上げている例は $y^3 - 2y - 5 = 0$ のみである。一例しかないため不明のところもあるが、『解析について』と『方法について』で記されている説明に沿って一般化する。原文では補正項を表す文字を $p, q, r, \ldots$ と順に変えているが、すべて y で表す。

$f(y) = c_0 + c_1 y + \cdots + c_n y^n = 0, (c_j \in \mathbb{R})$ を n 次方程式、α を $f(y) = 0$ の求める実根とし、$f'(\alpha) \neq 0$ を仮定する。

1. $|y_0 - \alpha| < \frac{|\alpha|}{10}$ となる y_0 を何らかの方法で見つける。$d_0 = y_0, f_0(y) = f(y)$ とおく。
2. $\nu = 1, 2, \ldots, N$ に対し (i)(ii) を繰り返す。
   (i) $f_\nu(y) = f_{\nu-1}(d_{\nu-1} + y) = c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)} y + \cdots + c_n^{(\nu)} y^n$ を計算する。
   (ii) $d_\nu = -\frac{c_0^{(\nu)}}{c_1^{(\nu)}}$ を有効桁数 $\lfloor -\log_{10} |d_\nu| \rfloor$ 桁で計算する。
3. $d_0 + \cdots + d_N$ が α の近似値である。

ここで、実数 x に対し、$\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数である。たとえば、

$$\lfloor -\log_{10} |-0.0054| \rfloor = \lfloor 2.2676... \rfloor = 2$$

である。つまり、$\lfloor -\log_{10} |d_\nu| \rfloor$ は $|d_\nu|$ の小数点以下の連続する 0 の個数である。
上記の数値方程式の解法について、次の命題 4.1 が成り立つ。

命題 4.1 $f(y) = c_0 + c_1 y + \cdots + c_n y^n = 0, (c_j \in \mathbb{R})$ を n 次方程式、α を $f(y) = 0$ の求める実根とし、$f'(\alpha) \neq 0$ を仮定する。y_0 を α の十分近くに取り、$d_0 = y_0, f_0(y) = f(y)$ とおき、実数列 $\{d_\nu\}, \{y_\nu\}$ と多項式の列 $\{f_\nu(y)\}$ を以下により帰納的に定義する。

$$\begin{aligned} f_\nu(y) &= f_{\nu-1}(d_{\nu-1} + y) = c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)} y + \cdots + c_n^{(\nu)} y^n, \\ d_\nu &= -\frac{c_0^{(\nu)}}{c_1^{(\nu)}}, \\ y_\nu &= y_{\nu-1} + d_\nu. \end{aligned}$$

このとき、$\nu = 1, 2, \ldots$ に対し、

$$d_\nu = -\frac{f(y_{\nu-1})}{f'(y_{\nu-1})}, \tag{4.2}$$

$$y_\nu = y_{\nu-1} - \frac{f(y_{\nu-1})}{f'(y_{\nu-1})}, \tag{4.3}$$

が成り立つ。

証明　テイラーの定理

$$\begin{aligned} f_\nu(y) =& f_{\nu-1}(d_{\nu-1} + y) \\ =& f_{\nu-1}(d_{\nu-1}) + f'_{\nu-1}(d_{\nu-1}) y + \cdots + \frac{1}{n!} f_{\nu-1}^{(n)}(d_{\nu-1}) y^n, \end{aligned}$$

より、$c_0^{(\nu)} = f_{\nu-1}(d_{\nu-1}), c_1^{(\nu)} = f'_{\nu-1}(d_{\nu-1})$, となるので、

$$\begin{aligned} d_\nu &= -\frac{f_{\nu-1}(d_{\nu-1})}{f'_{\nu-1}(d_{\nu-1})} = -\frac{f_{\nu-2}(d_{\nu-2}+d_{\nu-1})}{f'_{\nu-2}(d_{\nu-2}+d_{\nu-1})} = \cdots \\ &= -\frac{f_0(d_0+\cdots+d_{\nu-2}+d_{\nu-1})}{f'_0(d_0+\cdots+d_{\nu-2}+d_{\nu-1})} = -\frac{f(y_{\nu-1})}{f'(y_{\nu-1})}. \end{aligned}$$

が成り立つ。$f'(\alpha) \neq 0$ の仮定より、y_0 を α の十分近くに取れば $f'(y_{\nu-1}) \neq 0$ である。(4.3) は y_ν の定義から明らか。 □

(4.3) は、今日のニュートン法あるいはニュートン=ラフソン法である。命題 4.1 は古くから知られていたことの現代的定式化である。本質的に同じことは [10, p.178] および [21] にある。ニュートンの方法とジョセフ・ラフソンの方法 [17](1690) が (アルゴリズムは異なるが) 数学的に同等であることは、18 世紀末には知られていた。1798 年にジョセフ・ルイ・ラグランジュは「[ラフソンの方法は] ニュートンの方法より簡単である」「これら 2 つの方法 [ニュートンの方法とラフソンの方法] は基本的に同じものが異なった方法で提示されている」[13, pp.123-124] と指摘している。1800 年にはフランシス・マスーリズ [14, pp.316-317] も同様のことを述べている [1, p.219]。

ニュートンの方法は反復毎に方程式が変化するのに対し、ラフソンの方法では方程式は最初のまま一定である。数値計算においては、ラフソンの方法 (というよりは、導関数を用いたニュートン=ラフソン法) が使いやすく優れている。一方、多項式を 1 次式で近似し、反復毎に補正項を求めるニュートンの方法は複合方程式の文字解法を導出するのに適した方法である。ニュートンは「前の書簡」(1676) において『解析について』と同じ例 ($y^3 - 2y - 5 = 0$ の数値解法と $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ の文字解法) を与えるのに先立ち「いくつかの文字項を持つ複合方程式の根の抽出は、数値方程式の根の抽出と似ています。しかしながら、ヴィエトと我がオートレッドの方法はこの目的には適してません。それ故、私は別のものを考案するように導かれました。」[19, II, p.34] と述べている。恐らく、ニュートンは複合方程式の文字解法を創り出す過程でニュートンの方法を発見したのであろう。

ニュートン=ラフソン法について次の命題 4.2 が知られている。

命題 4.2 $f(y)$ を実多項式、α は $f(y) = 0$ の実根で $f'(\alpha) \neq 0$ とする。y_0 を α の十分近くに取ると

$$y_\nu = y_{\nu-1} - \frac{f(y_{\nu-1})}{f'(y_{\nu-1})}$$

で定義される反復列 $\{y_\nu\}$ に対し、正数 $M > 0$ が存在して

$$|y_\nu - \alpha| \leq M|y_{\nu-1} - \alpha|^2 \tag{4.4}$$

が成り立つ。

証明　[9, p.72] などの数値解析のテキストを見よ。 □

ニュートンが『解析について』および『方法について』で与えた数値解法は今日のニュートン＝ラフソン法と一致するので、命題 4.2 により、ニュートンが有効桁数について採用している方式 (d_ν の小数点から 0 が s_ν 個連続して現れるとき、すなわち $10^{-s_\nu-1} \le |d_\nu| < 10^{-s_\nu}$ のとき、d_ν を小数第 $2s_\nu$ 位まで求める) が適切であることは以下のように示すことができる。

(4.4) が成り立つとき数列 $\{y_\nu\}$ の α への収束は速いので、$|d_\nu| = |y_\nu - y_{\nu-1}| \approx |y_{\nu-1} - \alpha|$ と考えられ、(4.4) は $|d_{\nu+1}| \lessapprox M|d_\nu|^2$ と書ける。$|d_\nu| << 1$ のときは、$-\log_{10} M$ は $-\log_{10}|d_\nu|$ に比べ無視できるので

$$-\log_{10}|d_{\nu+1}| \gtrapprox 2(-\log_{10}|d_\nu|)$$

となる。この式は、$d_{\nu+1}$ の有効桁数が d_ν の有効桁数のほぼ 2 倍であることを意味している。

4.3.2.　文字方程式の解法

次に文字方程式の解法 (複合方程式の代数解法) を見る。

		$a - \frac{1}{4}x + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$&c
$+a + p = y.)$	$+y^3$	$+a^3 + 3aap + 3app + p^3$
	$+aay$	$+a^3 + aap$
	$+axy$	$+aax + axp$
	$-2a^3$	$-2a^3$
	$-x^3$	$-x^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p.)$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}xxq - \frac{3}{4}xqq + q^3$
	$+3ap^2$	$+\frac{3}{16}ax^2 - \frac{3}{2}axq + 3aqq$
	$+4aap$	$-aax + 4aaq$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}axx + axq$
	$+aax$	$+aax$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{xx}{64a} + r = q.)$	$+3aqq$	$+\frac{3x^4}{4096a} + \frac{3}{32}xxr + 3ar^2$
	$+4aaq$	$+\frac{1}{16}axx + 4aar$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+\frac{3}{16}xxq$	$+\frac{3x^4}{1024a} + \frac{3}{16}xxr$
	$-\frac{1}{16}axx$	$-\frac{1}{16}axx$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$

$$+4aa - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2\Big) + \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}\Big(\frac{+131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}\ [\&c].$$

数値例についてはこのくらいにする。解かれるべき文字方程式を $y^3 + aay - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ とせよ。最初に私は x が 0 のときの y の値を探し出す。すなわち、こ

の方程式 $y^3+aay-2a^3=0$ の根を引き出し、$+a$ であることを見出す。そして、$+a$ を商の中に書く。再び、$y=a+p$ を考え、私はその値を代入し、$p^3+3ap^2+4aap\&c$ という項を結果として余白に設定する。これらから私は p と x が分離している最小次元の $+4aap+aax$ を取り出す。そしてそれを 0 に近似的に等しいと考える。すなわち、$p=-\frac{x}{4}$ に近く、あるいは $p=-\frac{x}{4}+q$ と書ける。[以下略]

MP II, pp.222-225

上記の算法を現代表記で示す。

L1. $f(x,y)=y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ において $x=0$ とした $y^3+a^2y-2a^3=0$ の根 $y=+a$ が (初) 商である。(y がベキ級数展開 $y=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots,b_i$ できるときは、$x=0$ とおくと定数項 b_0 が得られる。[8, p.290])

L2. $y=a+p$ を $f(x,y)=0$ に代入すると、$f_1(x,p)=a^2x-x^3+(4a^2+ax)p+3ap^2+p^3=0$ となる。p と x が分離している最小次元のもの $4a^2p+a^2x$ を取り出し、近似的に 0 とおく。(分離している p の項は $4a^2p+3ap^2+p^3$ であり、最小次元の項は $4a^2p$ である。分離している x の項は a^2x-x^3 であり、最小次元の項は a^2x である。)

L3. $a^2x+4a^2p\approx 0$ を解くと $p\approx-\frac{1}{4}x$ なので、$-\frac{1}{4}x$ を商に取る。$p=-\frac{1}{4}x+q$ を $f_1(x,p)=0$ に代入すると $f_2(x,q)=-\frac{1}{16}ax^2-\frac{65}{64}x^3+\left(4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{3}{16}x^2\right)q+\left(3a-\frac{3}{4}x\right)q^2+q^3=0$ を得る。

L4. q と x が分離している最小次元の量 $-\frac{1}{16}ax^2+4a^2q$ を近似的に 0 とおき、$q\approx\frac{1}{64a}x^2$ を得る。(分離している q の項は $4a^2q+3aq^2+q^3$ であり、最小次元の項は $4a^2q$ である。分離している x の項は $-\frac{65}{64}x^3-\frac{1}{16}ax^2$ であり、最小次元の項は $-\frac{1}{16}ax^2$ である。)

L5. ($f_2(x,q)$ の)q^3 を省略し $q=\frac{1}{64a}x^2+r$ を $\tilde{f}_2(x,q)=-\frac{1}{16}ax^2-\frac{65}{64}x^3+\left(4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{3}{16}x^2\right)q+\left(3a-\frac{3}{4}x\right)q^2=0$ に代入すると $\tilde{f}_3(x,r)=-\frac{131}{128}x^3+\frac{15}{4096a}x^4+\left(4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2\right)r+\left(-\frac{3}{4}x+3a\right)r^2=0$ となる。

L6. (計算を打ち切るときは r の定数項と 1 次の項の係数をすべて用い) $-\frac{131}{128}x^3+\frac{15}{4096a}x^4+\left(4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2\right)r=0$ から、除算 $4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)\frac{131}{128}x^3-\frac{15}{4096a}x^4$ を計算して $+\frac{131}{512a^2}x^3+\frac{509}{16384a^3}x^4$ を得る。

L7. $y=a-\frac{1}{4}x+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}$ が y の x^4 までの級数展開である。

分離している最小次元の項は、$f_1(x,p)=0$ および $f_2(x,q)=0$ をそれぞれ p および q の 1 次式で近似し、根を分数式で表したとき分母と分子の主要項 (x に関する最低次数の項) になる。

L2′. $a^2x-x^3+(4a^2+ax)p+3ap^2+p^3=0$ を 1 次式で近似した根は

$$p=\frac{-a^2x+x^3}{4a^2+ax}=-\frac{x}{4}\frac{1-\frac{x^2}{a^2}}{1+\frac{x}{4a}}=-\frac{x}{4}+O(x^2),\quad x\to 0$$

L4′. $f_2(x,q) = -\frac{1}{16}ax^2 - \frac{65}{64}x^3 + \left(4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{3}{16}x^2\right)q + \left(3a - \frac{3}{4}x\right)q^2 + q^3 = 0$ を 1 次式で近似した根は

$$q = \frac{\frac{1}{16}ax^2 + \frac{65}{64}x^3}{4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{3}{16}x^2} = \frac{x^2}{64a} + O(x^3), \quad x \to 0$$

ここまでは、x が小さいときの級数展開であるが、x が大きいときの級数展開を次に述べている。

> x が大きいときに面積が真値に近づくことを望むときは、例 $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$ のように行なえ。したがって、これを解くため x, y が分離しているか互いに掛け合わされた項の次元が最大で等しい項 $y^3 + xxy - 2x^3$ を取り 0 とおく。x を見つけ商とする。あるいは x に 1 を代入し $y^3 + y - 2 = 0$ から根 1 を抽出し、それに x を掛け積 x を商とする。そして $x + p = y$ とし、商 $x - \dfrac{a}{4} + \dfrac{aa}{64x} + \dfrac{131a^3}{512xx} + \dfrac{509a^4}{16384x^3}$&c を得るまで前の例と同様に進め。
>
> MP II, p.226

「前の例と同様に進め」の箇所を現代表記で示す。前の例の「x と y が分離している最小次元」を「x と y が分離しているか互いに掛け合わされた項の次元が最大で等しい項」に読み替える。

M1. $f(x,y) = y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$ とおく。x, y が分離しているか互いに掛け合わされた項の次元が最大で等しい項は、$(y = O(x)$ を仮定すると$)y^3 + x^2y - 2x^3$ である。$y^3 + x^2y - 2x^3 = 0$ とおくと $y = +x$ が根である。$y = x + p$ とおき、y を $f(x,y) = 0$ に代入すると、$f_1(x,p) = ax^2 - a^3 + (4x^2 + ax)p + 3xp^2 + p^3 = 0$ となる。

M2. $(p = O(1)$ を仮定し、$)x, p$ が分離している最大次元の項を 0 とおくと $ax^2 + 4x^2p \approx 0$ となる。根は $p = -\frac{a}{4}$ である。

M3. $p = -\frac{a}{4} + q$ を $f_1(x,p) = 0$ に代入すると $f_2(x,q) = -\frac{1}{16}a^2x - \frac{65}{64}a^3 + \left(4x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{3a^2}{16}\right)q + (3x - \frac{3}{4}a)q^2 + q^3 = 0$ となる。

M4. $(q = O(\frac{1}{x})$ を仮定し、$)$ x, q が分離している最大次元の項を 0 とおくと $-\frac{1}{16}a^2x + 4x^2q \approx 0$ となる。根は $q = \frac{a^2}{64x}$ である。

M5. $f_2(x,q) = 0$ から q^3 を無視した $\tilde{f}_2(x,q) = -\frac{1}{16}a^2x - \frac{65}{64}a^3 + \left(4x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{3a^2}{16}\right)q + (3x - \frac{3}{4}a)q^2 = 0$ に $q = \frac{a^2}{64}\frac{1}{x} + r$ を代入すると $f_3(x,r) = -\frac{131}{128}a^3 + \frac{15a^4}{4096x} - \frac{3a^5}{16384x^2} + \left(4x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9a^2}{32} - \frac{3a^3}{128x}\right)r + \left(3x - \frac{3}{4}a\right)r^2 = 0$ となる。

M6. $f_3(x,r) = 0$ を 1 次式で近似し
$-\frac{131}{128}a^3 + \frac{15a^4}{4096x} - \frac{3a^5}{16384x^2} + \left(4x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9a^2}{32} - \frac{3a^3}{128x}\right)r \approx 0$ を解くと
$r \approx \left(\frac{131}{128}a^3 - \frac{15a^4}{4096x} + \frac{3a^5}{16384x^2}\right) \div \left(4x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9a^2}{32} - \frac{3a^3}{128x}\right) = \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3} + \cdots$

M7. y の $x \to \infty$ における $\frac{1}{x^3}$ までの漸近展開は $y = x - \frac{a}{4} + \frac{a^2}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$ で、$x \to 0$ における漸近展開 $y = a - \frac{1}{4}x + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ の a と x を入れ替えたものになっている。

M1 で $y = O(x)$ と仮定してよいことは次のようにいえる。

$$y = cx^{\alpha} + o(x^{\alpha}),\ (x \to \infty)$$

とおく。

$$\begin{aligned} f(x,y) =& c^3x^{3\alpha} + acx^{1+\alpha} + cx^{2+\alpha} - a^3 - 2x^3 + o(x^{\max\{3\alpha,3\}}) \\ =& \begin{cases} c^3x^{3\alpha} + o(x^{3\alpha}), & \alpha > 1 \\ (c^3 + c - 2)x^3 + o(x^3), & \alpha = 1 \\ -2x^3 + o(x^3), & \alpha < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$f(x,y)$ の x に関する次元を小さくする $c \neq 0$ が確定するためには、$\alpha = 1$ が必要である。そのとき、$c^3 + c - 2 = 0$、すなわち、$c = 1$ である。

「x, y が分離しているか互いに掛け合わされた項の次元が最大で等しい項」を取り出し、$y = O(x^{\frac{m}{n}})$ の (m, n) も決定できる一般的で容易な方法が、『方法について』で与えられている。これについては稿 [16] を改める。

本例の場合、「x, y が分離しているか互いに掛け合わされた項の次元が最大で等しい項」は、$f_1(x,p) = 0$ および $f_2(x,q) = 0$ をそれぞれ p および q の 1 次式で近似し、根を分数式で表したとき分母と分子の主要項 (x に関する最高次数の項) になる。

M2′ $f_1(x,p) = 0$ を p の 1 次式で近似すると $ax^2 - a^3 + (4x^2 + ax)p \approx 0$ である。

$$p = \frac{-ax^2 + a^3}{4x^2 + ax} = -\frac{a}{4} + O(\frac{1}{x}), \quad x \to \infty$$

M4′ $f_2(x,q) = 0$ を q の 1 次式で近似すると $-\frac{1}{16}a^2x - \frac{65}{64}a^3 + \left(4x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{3a^2}{16}\right)q \approx 0$ である。

$$q = \frac{\frac{1}{16}a^2x + \frac{65}{64}a^3}{4x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a^2}{64x} + O(\frac{1}{x^2}), \quad x \to \infty$$

§ 5.　おわりに

本論文では、『解析について』の規則 3 について 10 進数についての操作と文字 (一般変数) の操作を対比した。数値方程式の解法を現代的に定式化し、ニュートンの有効桁数の

取り方は理にかなっていることを示した。数値方程式と文字方程式の解法を対比することにより、文字方程式の解法における $x \to 0$ のときの「分離している最小次元の項」および $x \to \infty$ のときの「分離しているか互いに掛け合わされた項の次元が最大で等しい項」が 1 次式で近似したときの分母と分子の主要項であることを示した。

参考文献

[1] 五十嵐正夫、Vieta と Raphson の代数方程式の数値例と Newton-Raphson 法について、科学史研究, II, 26 (1987), 214-221.

[2] リチャード・S・ウェストフォール、田中一郎・大谷隆昶訳、アイザック・ニュートン、上、平凡社、1993

[3] 高橋秀裕、ニュートン – 流率法の変容、東京大学出版会、2003.

[4] 中村幸四郎、近世数学の歴史 – 微積分の形成をめぐって、日本評論社、1980.

[5] 林知宏、数学史講義、第 3 回、パリ時代 (1672-1676) のライプニッツ、学習院高等科紀要、(2009)、31-73.

[6] 林知宏、数学史講義、第 6 回、アイザック・ニュートンの数学 1、学習院高等科紀要、(2012)、29-95.

[7] 原亨吉、付録、ライプニッツ著作集、2 数学論・数学、(工作舎、1997)、所収、pp.125-133.

[8] 原亨吉、近世の数学、ちくま学芸文庫、2013

[9] 山本哲朗、数値解析入門 [増訂版]、サイエンス社、2003.

[10] Chabert, Jean-Luc, *A History of Algorithms*, Springer, 1999.

[11] Edwards, C. H., *The Historical Development of the Calculus*, Springer, 1979.

[12] Henrici, P., *Elements of Numerical Analysis*, John Wiley & Sons, 1964.

[13] Lagrange, J. L., *Traité de la Résolution des équations numériques de tous les degrés*, Bachelier, 1826.
`https://ia600402.us.archive.org/3/items/bub_gb_qIQbvPhQhNUC/bub_gb_qIQbvPhQhNUC.pdf`

[14] Maseres, F., *Tracts on the Resolution of Affected Algebräic Equations by Dr. Halley's, Mr. Raphson's and Sir Isaac Newton's methods of approximation*, London, 1800.

[15] Mercator, N., *Logarithmotechnia*, Londini, 1668. (Reprint. Kessinger Publishing.)

[16] Osada, N., Literal resolution of affected equations by Isaac Newton, in preparation.

[17] Raphson, J., *Analysis Æquationum universalis*, London, 1690.

[18] Stedall, J. A., *The Arithmetic of Infinitesimals, John Wallis 1656*, Springer, 2004.

[19] Turnbull, H. W., *The Correspondence of Isaac Newton*, Vol.I,II, Cambridge University Press, 1959-60.

[20] Whiteside, D. T., *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol.I-VIII, Cambridge University Press, 1967-81.

[21] Ypma, T. J., Historical Development of the Newton-Raphson Method, *SIAM Rev.* **37** (1995), 531-551.