RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B71 (2018), 129-136

『九章算術』（1 世紀）「開不尽法」と会田安明『算法零約術』（19 世紀）

The Open Square Method of *Jiuzhang Suanshu* (1st Century) and *Sanpo Reiyaku-jutsu* (Yasuaki Aida, 19th Century)

城地　茂・劉　伯雯

Shigeru Jochi* and Bowen Liu**

Abstract

Yasuaki AIDA, the founder of Saijo-ryu mathematical school, studied the irrational numbers, then he found that the quotients are circulates by the Euclidean algorithm. Then he calculated more accurate numbers in the chapter "Kon" of *Sanpo Reiyaku-jutsu*.

The author analyzed the original text of *Sanpo Reiyaku-jutsu*, then studied the origin of Aida's computation. It is perhaps the open square method of the *Jiuzhang Suanshu* in the first century in China. Chinese mathematicians computed the approximate value of irrational numbers by "mian". If the "mian" (面) were;

x_2 ("mian") ＝ a / (2x_1 ＋ x_2)

Japanese mathematicians, Yasuaki Aida, would have the suggestions from this formulae.

Received November 30, 2017. Revised January 16, 2018.
2010 Mathematics Subject Classifications: 01A27, 01A55
Key Words: ***Sanpo Reiyaku-jutsu*, Yasuaki Aida, *Jiuzhang Suanshu*, the open square method, "mian"**
This work was supported by JSPS KAKENHI Grant Number (C) 16K01162.
* 大阪教育大学グローバルセンターGlobal Center, Osaka Kyoiku Univ. 4-698-1, Asahigaoka, Kashiwara, Osaka, JAPAN 582-8582, e-mail: jochi@cc.osaka-kyoiku.ac.jp
** 国立高雄科技大学応用日語系 Department of Japanese, National Kaohsiung Univ. of Sci. and Tech.. No.2, Jhuoyue Rd., Nanzih Dist., Kaohsiung City 811,Taiwan (R.O.C), e-mail: lbw@nkfust.edu.tw

§1 緒論

会田安明（1747-1817）の 200 年祭を迎え、和算の再考をしてみたい。和算では通常は、数値を求めるのが課題であり、数や形の性質を考察することは、直接の課題ではなかった。しかし、会田安明には、無理数を互除法で計算するとその商が循環するという性質を発見したという業績がある。これは、帰納的に多くの無理数、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$を計算して得られたものと、会田安明自身も述べている[1]。そして、この性質を利用して、真の数値へとより近づけている。

この業績が、会田安明の全くの独創であったのか、あるいは、それ以前の業績と繋がる部分があったのかどうか。これを考察してみたい。

会田安明の先行研究としては、日本学士院（編）（藤原松三郎）（1954;1979）『明治前日本数学史』が重要である。会田安明の業績を個々に取り上げるだけではなく、『会田伝書』としてその膨大な写本群を整理し全体の中から各業績を考察しているからである。

しかし、循環するという業績については、「卒然これを読めばその意を補足するに苦しむ[2]」としており、いくつかの術語が不明との見解だったようである。そこで、先行研究があまり触れていなかった『九章算術』（著者不詳、1 世紀頃）「開不尽法」の術語を補い、真意に迫りたい。また、『九章算術』の「面」の観念を考察するつもりである。

なお、『算法零約術坤之巻』（会田安明、1800 年頃）[3]の版本は、東北大学林集書請求記号 1425 本を用いた。

§2 『九章算術』（著者不明、紀元 50 年頃）「開不尽法」の概要

現存する最古の開平方術は、『九章算術』である。年代が分かる最古の数学書である『算数書』（著者不明、前 186 年頃）では、盈不足術を使って近似分数を示しており、簡単な方法で比較的いい数値は出している[4]が分数値である。

『九章算術』では、1 桁ずつ数値を求めて行き、次の桁との係数を求めて行くために係数を調整するようになった。

『九章算術』巻四「少広」章 4 第 14−16 題「開平方術・開不尽法」

今有積五万五千二百二十五歩[5]。問為方幾何？

答曰：二百三十五歩。

開方術曰：置積為実。借一算歩之，超一等。議所得，以一乗所借一算為法，而以除。除已，倍法為定法。其復除。折法而下。復置借算歩之

---

[1] 日本学士院（編）（1954; 1979）『明治前日本数学史』4:536.
[2] 日本学士院（編）（1954; 1979）『明治前日本数学史』4:535.
[3] 日本学士院（編）（1954; 1979）『明治前日本数学史』4:532-537.には、無理数の分母・分子を互除すると商は循環することが、『算法零約術坤之巻』（会田安明、1800 年ごろ）巻上で研究したとある。
[4] $\sqrt{240}$（≒15.49193338482967）を 15 + 15/31（≒15.4838709677419355）としている（『算数書』「方田」）。
[5] 古代中国（13 世紀以前）は、面積（や体積）も長さも同じ 1 「歩」（約 1.8m）としている。

如初，以復議一乗之，所得副，以加定法，以除。以所得副從定法。復除折下如前。

若開之不尽者為不可開，当以面命之。（劉徽注）（中略）術、或有、以借算加定法、而命分者、雖粗相近、不可用也。（中略）故惟以面命之。

面積が 55225 坪（の正方形）だとする。一辺は、何間になるか。

答に曰く：235 間。

開方術に曰く。面積をおいて「実」（実数項）とする。「一算」（２次の項）をおいて、進めるには、一つ跳びにする。（商を）得て、「借一算」に掛けて「法」（１次の項）とする。（商）と「法」を掛けて、「実」から）引く。引きおわったら、「法」を倍にして、あたらしい「法」とする。

つぎの桁をもとめるには、法を１桁下げて、「借算」を最初のように（≒１桁跳びに下げる）する。つぎの商をもとめ、（「借一算」に掛けて）「法」にたし、（商と掛けて）引く。（商と「借一算」を掛けたものを）「法」に足す。下げ方は、前と同じである（≒「法」は１桁、「借一算」は１桁跳び）。

もし、開けなかったら、「不可開」とし、「面」を分（母）としてあらわす。（劉徽[6]注）（中略）術には「借（一）算」を定法に加え、分母にするものもあるが、おおむね合っているが、用いることはできない。（中略）ゆえに、ただ「面」で分数とするしかない。（太字は引用者による）

これは、現在の珠算や筆算の２桁ずつ区切代わりに、２次の項（「借一算（後の「隅」）を移動させている。

表１　開平方術の算木操作

商			200	200	200	230	230	230	235
実	55225	55225	55225	15225	15225	15225	2325	2325	0
法			20000	40000	4000	4300	4600	460	465
借（隅）	1	10000	10000	10000	100	100	100	1	1

この問題では、開けてしまうが、「不可開」のときにどうするかが問題である。術文では「面」を使って分数で近似するとある。この「面」であるが、

$S = \sqrt{(x_1^2 + r)}$を開く際に、

$$r = x_2 \quad (2x_1 \quad + x_2)$$

$$\therefore x_2 = r \ / \ (2x_1 \quad + x_2) \qquad \cdots 式1$$

「実」　（「定法」＋ 商）

---

6 263 年に『九章算術』に注釈を施した。

となっている。これを正方形で図示してみると、図１のようになる。

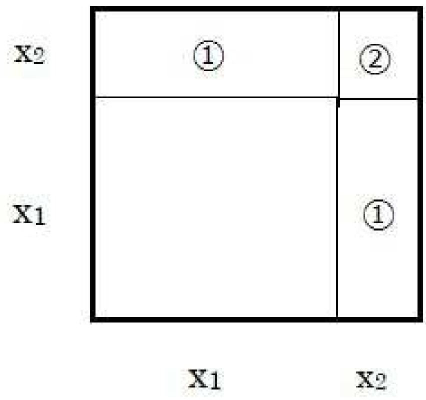

図１　「開不尽法」

ここで、開けなかった面積が①が２つと②の部分になる（「実」の余り＝r)。このうち①２つ分の長辺が「定法」として算盤に置かれている。求めたい x_2 は、図２の長方形の高さになる。

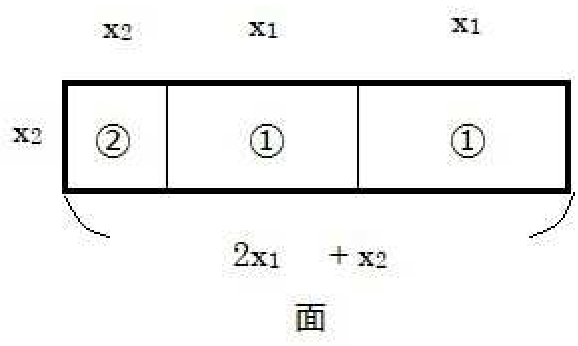

図２　「不可開」の面積を長方形として表示したもの

ここで、(「定法」＋ 商）（$2x_1+x_2$）を「面」と考えれば、式１となることが分かる。もちろん式１の両辺に未知数 x_2 が入ってくるので、実際の数値は分からない。しかし、②の一辺 x_2 は、$0<x_2<1$ になるので、「借一算（数値は１）」を「定法」（$2x_1$）を加えるか加えないかによって、近似的に

$$r / 2x_1 > x_2 > r / (2x_1 + 1)$$

となる。

式１

$$x_2 = r / (2x_1 + x_2) \quad ・・・式１$$

では、未知数 x_2 が、分母の項に入っているので、連分数で著した場合、無理数は循環することになる。東アジア数学史上には、連分数概念はないが、互除[7]法で計算すれば、その商が循環することを示している。

§3　無理数の分母・分子を互除すると商は循環

（1）　『算法零約術坤之巻』（会田安明、1800 年頃）

同書は、最上流が遺した膨大な「会田伝書」の一種である[8]。『算法零約術』は、本編 2 巻 2 冊、「乾之巻」1 巻 1 冊、「坤之巻」は上下 2 巻 2 冊の 5 巻である。しかし、どうも 5 巻が組になっているのではなく、少なくとも「乾坤之巻」は半ば独立している[9]ようである。藤原松三郎は、『算法零約術乾之巻』1 巻を「会田伝書」59 番に、『算法零約術坤之巻』2 巻を「会田伝書」60 番に分類している[10]。

これには、下記のような記述がある。

解曰、置箇数、開平方、而其商与定一互減、而其累減段数、求一周数、而整之。
答曰、方斜率、一箇四一四二一三五六二三七三〇九五〇四八八。（巻上 1 丁表）

解に曰く。箇数（≒近似値）を置いて、開平方し、其の商と「定一」を互に減じ、その段数を累減し、一周数を求め、これを整ふ。（巻下 1 丁表）
答えに曰く、正方形の一辺と斜辺の比率（＝√２）は、1.41421356237309504 88 である。（巻下 1 丁表）

とある。

これは、まず、√２を 1.41421356237395 まで計算し、この近似値の分子と分母を互除すると、

1414213562373 ÷1000000000000＝1・・・414213562373
100000000000 ÷ 414213562373＝2・・・171572875254
414213562373 ÷ 171572875254＝2・・・ 71067811865
171572875254 ÷ 71067811865＝2・・・ 29437251524
71067811865 ÷ 29437251524＝2・・・ 12193308817

---

7 ユークリッド（エウクレイデス、Εὐκλείδης, Euclid、BCE3 世紀?）の互除法に類似。『九章算術』巻 1「方田」第 6 題には、又有九十一分之四十九。問約之得幾何？　答曰：十三分之七。約分術曰：可半者半之，不可半者，副置分母子之數，以少減多，更相減損，求其等也。以等數約之。」と最大公約数を求めており、「更相減損」法と呼ばれている。

『算数書』（著者不詳、BCE186 年頃）「約分術」には最も古い「更相減損」法があるが、術語としての「更相減損」はない（城地茂（2001）、城地茂（2002））。

8 日本学士院（編）（1954）『明治前日本数学史』4:526-537 に解説がる。

9 台湾大学・加藤平左ヱ門コレクション（仮称）には、『算法零約術乾坤之巻』のみが遺されている。調閲番号：20867-20869、登録番号：446746-446748、会田安明（編）、2 巻 3 冊、写本、18.3 x 26.8 cm である。著作年は不詳であるが、1807 年頃ではないかと思われる。

10 日本学士院（編）（1954）『明治前日本数学史』4:507。

29437251524	÷	12193308817＝2	・・・	5050633890
12193308817	÷	5050633890＝2	・・・	2092041037
5050633890	÷	2092041037＝2	・・・	866551816
2092041037	÷	866551816＝2	・・・	358937405
866551816	÷	358937405＝2	・・・	148677006
358937405	÷	148677006＝2	・・・	61583393
148677006	÷	61583393＝2	・・・	25510220
61583393	÷	25510220＝2	・・・	10562953
25510220	÷	10562953＝2	・・・	4284314
10562953	÷	4284314＝2	・・・	1794325
4284314	÷	1794325＝2	・・・	795664
1794325	÷	795664＝2	・・・	202997
795664	÷	202997＝3	・・・	186673
202997	÷	186673＝1	・・・	16324
186673	÷	16324＝11	・・・	7109
16324	÷	7109＝2	・・・	2106
7109	÷	2106＝3	・・・	791
2106	÷	791＝2	・・・	524
791	÷	524＝1	・・・	267
524	÷	267＝1	・・・	257
267	÷	257＝1	・・・	10
257	÷	10＝25	・・・	7
10	÷	7＝1	・・・	3
7	÷	3＝2	・・・	1
3	÷	1＝3	・・・	0

と16回目まで「一周数[11]」２で商が循環することが分かる。

もし、真数なら、循環するであろうことは容易に推測できる。そうなると、1.414213562373095　0488と４桁多く計算できるというものである。

会田安明は、互減を√３、√５，√７、√１１、√１３、√１５、√１９、√２３、√２９、√３１の近似値でも計算し、真の数値（無理数）が循環するであろうと予測したのである。

しかし、前節で見たように、「面」を混沌術（関流の点竄術とほぼ同じ）で表せば、循環することが見つかるのでないだろうか。もし、中国の「開不尽法」の公式を知っていれば、互除をしてみようと考える動機になったはずである。

[11] 「一周」という用法は、『竿頭算法』（中根彦循、1738年）第９題。「仮如、置一算、以法数若干除之、遂為不尽一周、問得其位数術。」と「不尽一周術」（分数を小数にしたときの循環）でも使われている（日本学士院（1954）『明治前日本数学史』Ⅲ:166-174）。

§4　開不尽法の日本への影響

ここで、中国歴代の「開無尽法」の数値（公式）を見てみよう。

表２　中国歴代の「開無尽法」の公式[12]

書名	著者	年代	公式
孫子算経中:20	孫子	400 年頃	$\sqrt{(x_1^2+r)} \fallingdotseq x_1+r/2x_1$
張丘建算経中:20	張丘建	466 年頃	$\sqrt{[(x_1+b)^2+r]} \fallingdotseq (x_1+b)+r/2x_1$
周髀算経・注巻上	甄鸞	500 年頃	$\sqrt{(x_1^2+r)} \fallingdotseq x_1+r/(2x_1+1)$
夏侯陽算経上:７	韓延	700 年頃	$\sqrt{(x_1^2+r)} \fallingdotseq x_1 \cdot\cdot\cdot r$
数書九章	秦九韶	1247 年	
巻 15「計立方営」進一位			$\sqrt{(x_1^2+r)} \fallingdotseq x_1+1$
巻６「環田三積」加借算			$\sqrt{(x_1^2+r)} \fallingdotseq x_1+r/(2x_1+1)$
巻 12「屯積量容」進退開除			小数点以下計算を継続
続古摘奇算法下:18	楊輝	1275 年	$\sqrt{(x_1^2+r)} \fallingdotseq a+r/(2x_1+0.1)$
算法統宗巻６	程大位	1592 年	$\sqrt{(x_1^2+r)} \fallingdotseq x_1+r/(2x_1+1)$

表２見て分かるように、中国数学では「定法」に１である「借一算（隅)」を加えたものを「面」としているものが多い。しかし、「借一算（隅)」加えないものや、0.1 を加えるといったものまで存在している。

こうした様々な「開不尽法」を地方（じかた）和算期（1781-1876）の和算家である会田安明が知りえたかどうかである。

$\sqrt{(x_1^2+r)} \fallingdotseq x_1+r/(2x_1+1)$の公式は、『算法統宗』によって知ってはいたはずである。

そして、『孫子算経』（著者不詳、400 年頃）（と『五曹算経』（６ｃ））が、会田安明の活躍した時期、1792 年に、佐伯藩で覆刻されたのである。これによって、$\sqrt{(x_1^2+r)} \fallingdotseq x_1+r/2x_1+1$ の公式を知りえたのである。『算法統宗』と『孫子算経』の二種の数学書によって、

$$r / 2x_1 > x_2 > r / (2x_1+1)$$

が会田安明の目の前に現れたことになる[13]。

「面」を説明している『九章算術』は、律令期（554−730）に日本伝来して大学寮算道の教科書になっているが、当時の写本などは伝わっていない。算博士を継ぐ、壬生官務家[14]伝来の版本・写本は未発見である。『孫子算経』など他の『算

[12] 道脇義正・小林龍彦・城地 茂（1992）「戴震の公式」: 246.

[13] 数値の大小は、容易に知ることができたはずである。

[14] 小槻氏は、太政官の左右弁官局で、五位の左大史（大夫史、最上位の史で記録を司る）と算博士を世襲し、官務家と呼ばれた。南北朝頃には壬生家、大宮家があったが、後に大宮家が断絶し、壬生家が明治維新まで続いた。

経十種』も同様に、写本などは発見されていない。

表３　佐伯藩本『孫子算経』の系譜

『孫子算経』北宋本（1084 年）
↓
南宋本（1213 年）→不足斎叢書（1777 年）
↓
佐伯藩本（1792 年）

§5　結論

会田安明は、無理数の互除が循環することを発見した。さらに、それを用いて、より精密な数値計算に応用している。これは、帰納的に発見したものと言えるが、『九章算術』の「面」の概念を考察すれば、演繹的に発見することも可能であった。会田の生きた時代は、中国の古典数学書が覆刻された時代であり、古典数学書の研究も進んだ時期である。また、すでに代数的符号を取り扱える時期でもあった。公式から推測した可能性も否定できないのではないだろうか。

『九章算術』の時代に代数符号はないが、会田には混沌術（関流の点竄術に相当）という代数符号が生まれている。混沌術で「面」を表せば、循環することが予想できたのではないだろうか。

参考文献

[1] 林 鶴一（1937）『林鶴一博士和算研究集録』2 巻、東京開成館.

[2] 日本学士院（編）（藤原松三郎）（1954;1979）『明治前日本数学史』5 巻、東京: 岩波書店、野間科学医学研究資料館.

[3] 下平和夫（1965-70）『和算の歴史』2 巻、東京: 富士短期大学出版部.

[4] 道脇義正・小林龍彦・城地 茂（1992）「戴震の公式」pp. 241-59 of 葉光立（編）.『戴学新探』。原英文、潘伝耕（訳）中国語。

[5] Jochi Shigeru（2000）: The Dawn of Wasan (Japanese Mathematics), pp. 423-454 of *Mathematics Across Cultures –The History of Non-Western mathematics-,* Amherst: Kluwer Academic Pub, Helaine Selin et al (eds.)

[6] 城地 茂（2001）「算数書日本語訳」『和算研究所紀要』4:19-46.

[7] 城地 茂（2002）「東アジア最古の数学書『算数書』の成立年代について」『（京都大学）数理解析研究所講究録』1257:150-162。

[8] 城地 茂（2014）『和算の再発見・東洋で生まれたもう一つの数学』化学同人。