RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B72 (2018), 067–071

Cynk-Hulek 構成による保型的な Calabi-Yau 多様体の降下について (On the descent of certain modular Calabi-Yau varieties via the Cynk-Hulek construction) (announcement)

By

平川 義之輔 (Yoshinosuke HIRAKAWA)*

Abstract

This is a survey of author's article of the same title. In the article, we construct infinitely many new examples of (not necessarily geometrically simply-connected) Calabi-Yau varieties defined over $\mathbb{Q}$ with the middle L-functions related to the L-functions of modular forms. These varieties give new affirmative examples for the problem proposed independently by B. Mazur and D. van Straten.

代数体上に定義された代数多様体に付随する L 関数と, 保型形式や保型表現に起源を持つ L 関数との対応は, 数論幾何における基本的な研究テーマである. 例えば, [1] で証明された谷山-志村予想は, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上に定義された楕円曲線の L 関数は, 重さ 2 の $\mathbb{Q}$-係数楕円 Hecke 固有新尖点形式（以下, 新形式）の L 関数であり, また, その逆も正しい, ということを主張している. この対応の片側, すなわち, 新形式（の L 関数）を幾何的に実現する $\mathbb{Q}$ 上の代数多様体の存在に関して, Mazur と van Straten は以下のような問題を独立に提起した.

Received March 31, 2016. Revised October 10, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 14J32 (11F23 11G15 11G40 14G10 14J28)
Key Words: *Calabi-Yau varieties, modular forms, complex multiplication.*
This research was supported by the Foundation for Research Fellowships of Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists (DC1) Grant 15J05818. This research was also supported in part by KAKENHI 26247004, as well as the JSPS Core-to-Core program "Foundation of a Global Research Cooperative Center in Mathematics focused on Number Theory and Geometry" and the KiPAS program 2013–2018 of the Faculty of Science and Technology at Keio University.
*Keio University Faculty of Science and Technology Yagami Campus. 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, Kanagawa 223-8522, Japan
e-mail: `hirakawa@keio.jp`

問題 1 (Mazur, van Straten, [8, §7]). 重さ $k = d + 1 \geq 1$ の $\mathbb{Q}$-係数新形式 f_k を任意に与えた時, それを幾何的に実現する $\mathbb{Q}$ 上の d 次元 Calabi-Yau 多様体 X_d は存在するか？すなわち, d 次 l 進エタールコホモロジー群 $H_l^d(X)$ (l は固定された素数) に付随する L 関数（以下, d 次 L 関数）が

$$L(X_d, s) = L(f_k, s) \times \prod \left(H_l^d(X_d) \text{ の部分商に付随する } L \text{ 関数}\right)$$

と分解する d 次元 Calabi-Yau 多様体 X_d は存在するか？

ここで, d 次元 Calabi-Yau 多様体 $X = X_d$ とは, 楕円曲線のある種の高次元化であり, $\Omega_X^d \simeq \mathcal{O}_X$ かつ $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ $(1 \leq \forall q \leq d-1)$ を満たす d 次元非特異射影代数多様体として定義されるものである. ただし, 問題 1 を含め, 本稿では Calabi-Yau 多様体の定義に幾何的単連結性を要請しないものとする.

問題 1 に関して, モジュラー曲線の Jacobi 多様体から Hecke 対応により切り取られる Abel 多様体, いわゆる志村の Abel 多様体は, $k = 2$ の場合に完全かつ肯定的な解を与えている ([14, Theorem 7.15], [2, Application 0.8]). また, より最近になって, Elkies と Schütt [5] は, 奇かつ 2 次の Dirichlet 指標に対する一般化された Riemann 予想を仮定した上で, $k = 3$ の場合に完全かつ肯定的な解を与えた. さらに, $k = 4$ の場合にも, 3 次元 Calabi-Yau 多様体への多方面からの興味も相まって, 膨大な量の肯定的な具体例が構成されている (例えば, [8], [15] を見よ). その一方で, $k \geq 5$ の場合には, 筆者の知る限り Cynk と Hulek[4] による結果以外に肯定的な結果は存在しない. 彼らは, 低次元の Calabi-Yau 多様体から高次元の Calabi-Yau 多様体を帰納的に構成する方法を導入し, 以下の結果を得た.

定理 1 (Cynk-Hulek [4, §2]). E を $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(j_E)$ 上の楕円曲線で, 虚 2 次体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ に CM を持つ, すなわち $\mathrm{End}_K(E) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たすものとする. この時, 任意の正整数 d に対して, Abel 多様体 E^d からの支配的な有理射を持つ $\mathbb{Q}$ 上の d 次元 Calabi-Yau 多様体 X_d が存在して, その d 次 L 関数は

$$L(X_d, s) = L(f_{d+1}, s) \times \prod \left(H_l^d(X_d) \text{ の部分商に付随する } L \text{ 関数}\right),$$

と分解する. ここで, $f_{d+1}(z) := \sum_{0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} \psi_{E^d}(\mathfrak{a}) e^{2\pi i z N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a})}$ は, CMAbel 多様体 E^d に付随する K の Hecke 指標 ψ_{E^d} から誘導される重さ $d + 1$ の新形式である.

虚数乗法論により, Cynk-Hulek の定理における虚 2 次体 K の類数は常に 1 となってしまうことに注意されたい. 以下に述べる本稿の主結果は, 虚 2 次体 K に関する制限を緩めることで, 問題 1 に新たな肯定的な具体例を与える.

定理 2 ([7, Theorem 1.3]). E をそのモジュライ体上 $\mathbb{Q}(j_E)$ の楕円曲線で, $\mathrm{End}_{\overline{\mathbb{Q}}}(E) \simeq \mathcal{O}_K$ を満たすものとする. また, 以下を仮定する.

1. $\#\mathrm{Cl}(K) = 2^n$ $(n \geq 1)$. [1]

[1] 虚 2 次体の類数に関するこの仮定に関して, 査読者の方から, Cohen-Lenstra の Heuristic (cf. [3]) に基づいた数値実験結果と合わせて, “自然密度は 0 と推察されるが 2 冪類数持つ虚 2 次体は無限個あるのではないかと思われる" とのご指摘を頂きました. 貴重なご指摘を頂き, 深く感謝致します.

2. E は $\mathbb{Q}$-楕円曲線である, すなわち, 各 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ に対して, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の同種写像 $E \to E^{\sigma}$ が存在する. ([6], [11] よりも広い意味での $\mathbb{Q}$-楕円曲線であることに注意.)

3. E は $\mathbb{Q}(j_E)$ 上に非自明な 2-捩れ点を持つ.

この時, Abel 多様体 $R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}(E)$ からの支配的な有理射を持つ $\mathbb{Q}$ 上の 2^n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2^n} が存在して, その 2^n 次 L 関数が

$$L(X_{2^n}, s) = L(f_{2^n+1}, s) \times \prod \left(H_l^d(X_{2^n}) \text{ の部分商に付随する } L \text{ 関数}\right),$$

と分解する. ここで, $R_{\mathbb{Q}(j_E)/\mathbb{Q}}$ は Weil の係数制限関手 ([16, Chapter 1]) であり, f_{2^n+1} は K の Hecke 指標から誘導される重さ 2^n+1 の $\mathbb{Q}$-係数新形式である.

定理 3 ([7, Theorem 1.4]). $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ (D は平方因子を持たない正整数) を以下を満たす虚 2 次体とする.

1. $\#\mathrm{Cl}(K) = 2^n$ $(n \geq 1)$.

2. $D \not\equiv 3 \bmod 8$, すなわち, 素数 2 は K で惰性的でない.

この時, 任意の正整数 N と, K の Hecke 指標から誘導される重さ 2^nN+1 の任意の $\mathbb{Q}$-係数新形式 f_{2^nN+1} に対して, $\mathbb{Q}$ 上の 2^nN 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2^nN} が存在して, その 2^nN 次 L 関数が

$$L(X_{2^nN}, s) = L(f_{2^nN+1}, s) \times \prod \left(H_l^d(X_{2^nN}) \text{ の部分商に付随する } L \text{ 関数}\right),$$

と分解する.

ここで, Ribet の定理 [12, Proposition (4.4), Theorem (4.5)] により, 重さ奇数の任意の $\mathbb{Q}$-係数新形式は, ある虚 2 次体の Hecke 指標から誘導されることに注意されたい.

以下では, 上記の定理の証明の概要を述べる. 詳細は [7] を参照されたい.

まず, 定理 2 における Calabi-Yau 多様体 X_{2^n} の構成について述べる. これは Cynk-Hulek による構成方法に倣って, 以下のように帰納的に実行される. K の類数に関する仮定から, 代数体の降下列 $\mathbb{Q}(j_E) = F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n = \mathbb{Q}$ であって, $[F_i : F_{i+1}] = 2$ $(i \geq 0)$ となるものが存在するので, これを 1 つ固定する. 与えられた楕円曲線 E から F_1 上の Kummer 曲面 $X_2 = \mathrm{Km}(R_{F_0/F_1}(E))$ を得るが, E の 2-捩れ点に関する仮定から, X_2 上の不分岐対合 ι_1 であって F_1 上定義されるもの (いわゆる Lieberman 対合) が存在する. そこで, 商多様体 $X_4 = R_{F_1/F_2}(X_2)/\langle R_{F_1/F_2}(\iota_1)\rangle$ を考えると, これは F_2 上の 4 次元 Calabi-Yau 多様体であり, Weil の係数制限の関手性から不分岐 2 次商写像 $X_4 \to R_{F_1/F_2}(X_2/\iota_1)$ を持つことが分かる. この被覆変換 ι_2 も F_2 上に定義されるので, 以下同様にして $X_{2^n} = R_{F_{n-1}/F_n}(X_{2^{n-1}})/\langle R_{F_{n-1}/F_n}(\iota_{n-1})\rangle$ を得る.

次に, 定理 2 における X_{2^n} の L 関数の分解と保型性について述べる. 以下では, 絶対 Hodge サイクルの意味でのモチーフを単にモチーフと呼ぶ. L 関数の分解と保型性は,

X_{2^n} の帰納的な構成方法を用いて, X_{2^n} から階数 2 のモチーフを切り取り, そのモチーフに Livné の保型性定理 [9, Theorem 1.3] を用いることで示される．実際, Kummer 曲面 X_2 は Picard 数極大なので, その超越的モチーフ（代数的サイクルが生成する部分空間による 2 次コホモロジー群の商）が $n = 1$ の場合の所望の階数 2 のモチーフとなる．$n \geq 2$ の場合は, Abel 多様体 $R_{F_0/F_n}(E)$ が, $\mathbb{C}$ 上では虚数乗法を持つ同種な楕円曲線の直積に分解し, その (p,p)-類が全て代数的になること [10] を用いて, 代数的サイクルが生成する部分モチーフを切り捨てることで, 帰納的に階数 2 のモチーフを得る.

最後に, 定理 3 の証明について述べる．まず, 中村 [11] による（狭い意味での）$\mathbb{Q}$-楕円曲線の分類定理により, 各虚 2 次体 K に対して, $\mathbb{Q}(j_E)$ 上の $\mathbb{Q}$-楕円曲線であって $\mathrm{End}_{K(j_E)}(E) \simeq \mathcal{O}_K$ となるものが存在する．また, $E(\overline{\mathbb{Q}})[2]$ への Galois 群の作用から, 2 が K で惰性的でないならば E は $\mathbb{Q}(j_E)$ 上の非自明な 2-捩れ点を持つことが分かるので, 定理 2 により 2^n 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2^n} を得る．さらに, Weil の係数制限関手の代わりに X_{2^n} の N 個直積を用いて同様の構成を辿ることで, 2^nN 次元 Calabi-Yau 多様体 X_{2^nN} を得る．構成から, この Calabi-Yau 多様体上には $H^0(X_{2^nN}, \Omega^{2^nN})$ に -1 倍で作用する対合が存在するので, この対合に関する 2 次捻り [7, Definition 4.4] を考えることができる．一方, Schütt による Hecke 指標の分類定理 [13, Theorem 2.4] により, 実現すべき f_{2^nN+1} たちは全てこのような 2 次捻りで実現されるので, これで証明が完了する.

謝辞. 貴重な研究発表の場をご提供頂いた委員の先生方をはじめ関係者の方々に, 深く感謝致します．また, 原稿の細部まで目を通して頂き, さらに貴重なご指摘も下さった査読者の方にも, この場をお借りして厚く御礼申し上げます.

References

[1] C. Breuil, B. Conrad,F. Diamond and R. Taylor, On the modularity of elliptic curves over Q: wild 3-adic exercises, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), no. 4, 843–939.

[2] H. Carayol, Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **19** (1986), no. 3, 409–468.

[3] H. Cohen and H. W. Lenstra, Jr., Heuristics on class groups of number fields, in *Number theory*, Noordwijkerhout 1983 (Noordwijkerhout, 1983), 33–62, Lecture Notes in Mathematics, **1068**, Springer, Berlin, 1984.

[4] S. Cynk and K. Hulek, Higher-dimensional modular Calabi-Yau manifolds, *Canad. Math. Bull.* **50** (2007), no. 4, 486–503.

[5] N. D. Elkies and M. Schütt, Modular forms and K3 surfaces, *Adv. Math.* **240** (2013), 106–131.

[6] B. H. Gross, *Arithmetic of elliptic curves with complex multiplication* with an appendix by B. Mazur, Lecture Notes in Mathematics **776**, Springer, Berlin, 1980.

[7] Y. Hirakawa, On the descent of certain modular Calabi-Yau varieties via the Cynk-Hulek construction, in preparation.

[8] K. Hulek, R. Kloosterman and M. Schütt, Modularity of Calabi-Yau varieties, in *Global aspects of complex geometry*, Springer, Berlin, 2006, 271–309.

[9] R. Livné, Motivic orthogonal two-dimensional representations of Gal($\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), *Israel J. Math.* **92** (1995), 149–156.
[10] T. Murasaki, On rational cohomology classes of type (p, p) on an abelian variety, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A* **10** (1969), 66–74.
[11] T. Nakamura, A classification of **Q**-curves with complex multiplication, *J. Math. Soc. Japan* **56** (2004), no. 2, 635–648.
[12] K. A. Ribet, Galois representations attached to eigenforms with nebentypus, *Modular Functions of One Variable, V, (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, Lecture Notes in Mathematics **601**, Springer, Berlin, 1977, 18–52.
[13] M. Schütt, CM newforms with rational coefficients, *Ramanujan J.* **19** (2009), 187–205.
[14] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Reprint of the 1971 original, Publications of the Mathematical Society of Japan, 11, Kanô Memorial Lectures, 1, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
[15] N. Yui, Modularity of Calabi-Yau varieties: 2011 and beyond, in *Arithmetic and geometry of K3 surfaces and Calabi-Yau threefolds*, Fields Inst. Commun. **67** (2013), 101–139.
[16] A. Weil, *Adeles and algebraic groups* with appendices by M. Demazure and Takashi Ono, Progr. Math. **23**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1982.