RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B72 (2018), 073–084

Grossの先頭項予想の精密化について (On the refinement of Gross's Leading Term Conjecture)

By

広瀬 稔 (Minoru HIROSE)*

Abstract

This paper is a summary of [6] in which we formulate the refinement of Gross's Leading Term Conjecture. Here, Gross's Leading Term Conjecture is a certain generalization of Gross-Stark conjecture and Gross conjecture. To formulate our conjecture, we introduce the notion of Shintani data, which axiomatizes algebraic aspects of Shintani zeta functions. In this paper, we also discuss the idea behind the conjecture.

§1. 序

この論文では [6] の主結果についての概説を行う．[6] の主結果は Gross の先頭項予想の精密化であるが，1.1 節ではその元になった予想である Gross の先頭項予想について概説し，1.2 節では精密化の基本的なアイデアおよび関連する先行研究を紹介する．精密化は特殊な元 $\hat{\Theta}_{S,T,V}$ を用いて定式化される．2.1 から 2.5 節では Gross の先頭項予想の正確な定式化を与え，2.6 節では精密化の定式化について，$\hat{\Theta}_{S,T,V}$ の構成方法以外の部分を解説する．3 節では，$\hat{\Theta}_{S,T,V}$ の構成方法とそれに必要な新谷データの概念について概説する．

§1.1. Gross の先頭項予想とは

[6] の主結果は Gross の先頭項予想（以下，GLTC=Gross's Leading Term Conjecture と表記）の精密化である．GLTC の正確な定式化は 2 節で行うこととして，ここでは GLTC の位置づけについて述べる．現在，数論的 L 関数の特殊値と数論的不変量を結びつける

Received March 31, 2016. Revised October 15, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11R42
Key Words: *Shintani zeta function, Gross's conjecture, Gross-Stark conjecture.*
*Faculty of Mathematics, Kyushu University, 744, Motooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, Japan.
e-mail: `m-hirose@math.kyushu-u.ac.jp`

多くの予想が知られている．数論的 L 関数には様々な種類のものがあるが，ここでは特に代数体の abel 拡大に付随する L 関数について取り扱う．そのような L 関数の特殊値に関する予想の一つが Gross-Stark 予想 [4] であり，これは p 進 L 関数の原点におけるテイラー展開の先頭項の係数（=原点における高階微分値）と p 進 regulator を結びつける．Gross-Stark 予想は Stark 予想の $s = 0$ における p 進類似である．また GLTC は Gross-Stark 予想の一般化である．GLTC は同変玉河数予想から従うことも知られている．GLTC は Stickelberger 元の言葉を用いて定式化され，p 進 L 関数の高階微分値は直接現れない．それにもかかわらず GLTC が Gross-Stark 予想の一般化となるのは，Stickelberger 元に関する情報から，p 進 L 関数の高階微分値についての情報を取り出すことができるからである．

§ 1.2.　偏微分値による精密化について

[6] における主結果のアイデアの基となっているのが，高階偏微分値による精密化という考え方である．これについて説明する．簡単のために rank 1 の場合，つまり元々の予想が

(1.1) $$\frac{\partial}{\partial s}L(s)\,|_{s=k}= R \quad (\text{R は数論的不変量})$$

形で表されている場合を考える．ここで新谷ゼータ関数の理論を用いると，自然な多変数関数

$$F(s_1, \ldots, s_n)$$

であって

$$F(s, \ldots, s) = L(s)$$

を満たすものが構成できる．このような多変数化の構成の鍵は次の等式である．

$$\left|N_{F/\mathbb{Q}}(x)\right|^{-s} = \prod_{\rho: F \hookrightarrow \mathbb{C}} |\rho(x)|^{-s}.$$

ただし p 進的設定で考えている場合は $\mathbb{C}$ の代わりに $\mathbb{C}_p$ とする．$F(s_1, \ldots, s_n)$ の偏微分値を考える．つまり

$$c_i := \frac{\partial}{\partial s_i}F(s_1, \ldots, s_n)\,\Big|_{(s_1,\ldots,s_n)=(k,\ldots,k)}$$

と置く．このとき次が成立する．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}L(s)\,\Big|_{s=k} &= \frac{\partial}{\partial s}F(s, \ldots, s)\,\Big|_{s=k} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial s_i}F(s_1, \ldots, s_n)\,\Big|_{(s_1,\ldots,s_n)=(k,\ldots,k)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i.
\end{aligned}$$

c_i $(i=1,\dots,n)$ が主要項となる部分である．一般には c_i は良い振る舞いをしないため補正項を加えて c'_i とする．

$$c'_i := c_i + (\text{correction term}).$$

このとき R のより細かい数論的不変量への分解

$$R := \sum_{i=1}^{n} R_i$$

が存在し，(1.1) が

$$c_i = R_i \quad (i=1,\dots,n)$$

という形に精密化されるのではないか，というのが高階偏微分値による精密化という考え方である．

類似の考え方に則った先行研究を以下の表に示す．

	先行研究	その元になった予想	微分値が持つと期待される情報	偏微分値が持つと期待される情報
(1)	Yoshida [11, 12]	Colmez 予想 [1]	CM 型アーベル多様体の周期	志村の周期記号
(2)	Zagier-Gangl [14]	虚二次体に対する Zagier 予想 [13]	Bloch 群の BWR ポリログ[1]による像	Bloch 群の強化ポリログによる像
(3)	Kashio-Yoshida [7, 8]	p 進 Colmez 予想	CM 型アーベル多様体の p 進周期	志村の p 進周期記号
(4)	Dasgupta [2]	Gross's tower of field 予想 [5]	Gross-Stark 単数 $u \in F_{\mathfrak{p}}^{\times}$ の $\mathbb{Q}_p$ におけるノルム	Gross-Stark 単数 $u \in F_{\mathfrak{p}}^{\times}$
(5)	Ren-Sczech [9]	虚 3 次体に対する rank 1 Stark 予想	Stark 単数 $u \in \mathbb{C}^{\times}$ の絶対値	Stark 単数 $u \in \mathbb{C}^{\times}$

これらの予想を定式化した論文内では，いずれも一階微分値を分解してより精密な量を得ているが，上で説明したような L 関数の多変数化と偏微分値による記述はなされていない．表内の論文 [11, 12]，[14]，[7, 8]，[2]，[9] で与えられた分解は，偏微分値による構成と正確に一致すると考えられるが，そのことの証明は今後の課題である．

(4)(5) についてさらに詳しく述べておく．v を有理数体 $\mathbb{Q}$ の素点，F を代数体，S_{v} を v の上にある F の素点の集合，S を F の素点の有限集合で S_{v} の元と無限素点を全て含むもの，H を F の有限次 abel 拡大体，v を H/F で完全分解する S_{v} の元，とする．さらに技術的な理由により，ある条件を満たす F の素点の有限集合 T を固定する．また σ を $\mathrm{Gal}(H/F)$ の元とし，$\zeta_{\mathsf{v}}(s,\sigma)$ を $((S,T)$-修正された$)\mathsf{v}$ 進部分ゼータ関数とする．つまり

[1] Bloch-Wigner-Ramakrishnan polylogarithm

$\zeta_{\mathsf{v}}(s,\sigma)$ は，v が無限素点のとき通常の部分ゼータ関数であり，v が素数 p のとき p 進部分ゼータ関数である．また v の上にある H の素点 w を一つ固定する．次の図式を考える．

$$H^\times \xrightarrow{i} H_w^\times \xrightarrow{f} F_v^\times \xrightarrow{\mathrm{N}} \mathbb{Q}_{\mathsf{v}}^\times.$$

ただし i は自然な埋め込み，f は自然な同型，$N = N_{F_v/\mathbb{Q}_{\mathsf{v}}}$ は norm 写像とする．このとき $u \in F^\times$ が存在して，任意の $\sigma \in \mathrm{Gal}(H/F)$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta_{\mathsf{v}}(s,\sigma) = \log\circ N\circ f\circ i(u^{\sigma^{-1}})$$

が成立するというのが，Stark 予想 (v が無限素点の場合) 及び Gross-Stark 予想 (v が有限素点の場合) である．$\mathbb{Q}_{\mathsf{v}}$ の代数閉体を $\mathbb{C}_{\mathsf{v}}$ と置こう．このとき右辺は

$$\log\circ N\circ f\circ i(u^{\sigma^{-1}}) = \sum_{\rho}\log\circ\rho\circ f\circ i(u^{\sigma^{-1}}) \quad (\rho \text{ は } F_v \text{の } \mathbb{C}_{\mathsf{v}} \text{への埋め込み全体を走る})$$

という形に分解できる．さらに左辺が新谷ゼータ関数の理論により

$$\frac{\partial}{\partial s}\zeta_{\mathsf{v}}(s,\sigma) = \sum_{\rho} c_\rho \quad (\rho \text{ は } F_v \text{の } \mathbb{C}_{\mathsf{v}} \text{への埋め込み全体を走る})$$

という形に分解され，さらに

$$c_\rho = \log\circ\rho\circ f\circ i(u^{\sigma^{-1}})$$

が成立するというのが (4)(5) の大雑把な主張である．ただし (4) は F が総実代数体で v が有限素点の場合であり，(5) は F が虚三次体で v が無限素点の場合である．

§2. 定式化

§2.1. 設定

以下，総実代数体 F, F の有限次 abel 拡大 K，K/F の中間体 H，無限素点と K/F で分岐する有限素点をすべて含むような F の素点の有限集合 S，S と交わりを持たない F の素点の有限集合 T，H/F で完全分解するような S の元 $v_1,\dots,v_r$，及び $v_1,\dots,v_r$ の上にある H の素点 $w_1,\dots,w_r$，を固定する．また

$$V := \{v_1,\dots,v_r\}$$

とおく．また $E \in \{K,H\}$ に対し，S_E で S に含まれる素点の上にある E の素点の集合，T_E で T に含まれる素点の上にある E の素点の集合を表す．また $(\mathrm{mod}\ T_E)$ で 1 となる S_E-単数の群を $\mathcal{O}_{E,S,T}^\times$ で表す．また $G_E := \mathrm{Gal}(E/F)$ とおく．以下では $V \neq S$ と $\mathcal{O}_{K,S,T}^\times$ が torsion-free であることを仮定する．

§ 2.2. Stickelberger 関数

$\chi \in \widehat{G_E} := \mathrm{Hom}(G_E, \mathbb{C}^\times)$ に対し，

$$L_{S,T}(\chi, s) := \prod_{\mathfrak{p}\in T}(1-\chi(\sigma_\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{1-s})\prod_{\mathfrak{p}\notin S}(1-\chi(\sigma_\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1},$$

$$e_\chi := \sum_{\sigma\in G_E}\chi(\sigma)[\sigma^{-1}] \in \mathbb{C}[G_E]$$

と置く．さらに

$$\Theta_{E,S,T}(s) := \sum_{\chi\in\widehat{G_E}} e_{\chi^{-1}} L_{S,T}(\chi, s) \in \mathbb{C}[G_E]$$

$$\Theta_{K,S,T} := \Theta_{K,S,T}(0) \in \mathbb{C}[G_K]$$

と置く．このとき Deligne-Ribet の定理 [3] より

$$\Theta_{K,S,T} \in \mathbb{Z}[G_K]$$

が成立する．

§ 2.3. Rubin-Stark lattice

対称群 $\mathfrak{S}_r$ は $(\mathcal{O}_{H,S,T}^\times)^{\otimes r}$ に自然に作用する．G_H の $(\mathcal{O}_{H,S,T}^\times)^{\otimes r} \otimes \mathbb{Z}[G_H]$ への作用を次で定める．

$$\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes [\tau]) = u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes [\sigma\tau].$$

また $\sigma \in G_H$ に対し $c_\sigma \in \mathrm{End}((\mathcal{O}_{H,S,T}^\times)^{\otimes r} \otimes \mathbb{Z}[G_H])$ を次で定める．

$$c_\sigma(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes [\tau]) = u_1^\sigma \otimes \cdots \otimes u_r \otimes [\tau].$$

定義 2.1 (Rubin-Stark lattice). 以下の条件を全て満たす $u \in (\mathcal{O}_{H,S,T}^\times)^{\otimes r} \otimes \mathbb{Z}[G_H]$ からなる部分 $\mathbb{Z}[G_H]$ 加群を $\Lambda_{S,T}$ で表し，Rubin-Stark Lattice と呼ぶ．

- 任意の $f \in \mathfrak{S}_r$ に対して，$f(u) = \mathrm{sgn}(f)\cdot u$
- 任意の $\sigma \in G_H$ に対して，$c_\sigma(u) = \sigma(u)$
- $L_{S,T}(\chi, s)$ の $s = 0$ における零点の位数が r より大きくなる任意の $\chi \in \widehat{G_H}$ に対して，$e_\chi u = 0$.

Rubin-Stark lattice は [10] で定義されている

$$\mathbb{Q} \otimes \wedge^r_{\mathbb{Z}[G_H]} \mathcal{O}_{H,S,T}^\times$$

の部分加群 $\Lambda_{S,T}$ と標準的な同型がある [6, Proposition 3.3].

§2.4.　Rubin-Stark 予想

準同型 $R_\infty : (\mathcal{O}_{H,S,T}^\times)^{\otimes r} \otimes \mathbb{Z}[G_H] \to \mathbb{R}[G_H]$ を次で定義する．

$$R_\infty(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes [\tau]) = (\prod_{j=1}^{r} -\log |u_j|_{w_j})[\tau].$$

Rubin [10] は次（正確には次と同値な主張）を予想した．

予想 2.1 (Rubin-Stark 予想)**.**　次を満たす $\epsilon_{S,T} \in \Lambda_{S,T}$ がただ一つ存在する．

$$R_\infty(\epsilon_{S,T}) = \lim_{s \to 0} s^{-r} \Theta_{H,S,T}(s).$$

以下，本稿ではこの予想を仮定する．予想中に現れる $\epsilon_{S,T}$ は Rubin-Stark 元と呼ばれる．

§2.5.　GLTC の定式化

$v \in S$ に対し $G_{K,v} \subset G_K$ を分解群とする．$\mathbb{Z}[G_K]$ のイデアルを

$$\begin{aligned} I_{K,v} &:= \ker(\mathbb{Z}[G_K] \to \mathbb{Z}[G_K/G_{K,v}]) \\ I_{K,G_H} &:= \ker(\mathbb{Z}[G_K] \to \mathbb{Z}[G_H]) \end{aligned}$$

で定める．各 $j = 1, \ldots, r$ に対して $f_j : \mathcal{O}_{H,S,T}^\times \to G_K$ を次の自然な合成写像とする．

$$f_j : \mathcal{O}_{H,S,T}^\times \subset H^\times \subset H_{w_j}^\times = F_{v_j}^\times \xrightarrow{\mathrm{rec}} G_K.$$

準同型

$$R_G : (\mathcal{O}_{H,S,T}^\times)^{\otimes r} \otimes \mathbb{Z}[G_H] \to \mathbb{Z}[G_K] / \left(I_{K,G_H} \prod_{v \in V} I_{K,v} \right)$$

を次で定める．

$$R_G(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes [\tau]) = [\tau] \prod_{j=1}^{r} ([f_j(u_j)] - [1]).$$

予想 2.2 (GLTC, Gross の先頭項予想)**.**　次が成立する．

$$R_G(\epsilon_{S,T}) \equiv \Theta_{K,S,T} \pmod{I_{K,G_H} \prod_{v \in V} I_{K,v}}.$$

§2.6.　GLTC の精密化

本稿では詳しく述べないが，以下ではいくつかの技術的な仮定 ([6, Definition 0.5]) が必要となる．以下では，[6, Definition 0.5] で定義された条件 (C1) が成り立つ場合のみを考える．

各 $v \in V$ に対し，十分小さい開部分群 $J_v \subset F_v^\times$ を固定する．有限素点 v に対し F_v の極大コンパクト部分環を O_v とする．記号を以下のように置く．

$$\begin{aligned} N_v &:= F_v^\times / J_v \\ N &:= \mathbb{A}_F^\times / (\prod_{v \in S} J_v \prod_{v \notin S} O_v^\times) \\ I_v &:= \ker(\mathbb{Z}[N] \to \mathbb{Z}[N/N_v]) \\ I_{G_H} &:= \ker(\mathbb{Z}[N] \xrightarrow{\text{rec}} \mathbb{Z}[G_H]) \\ I_{F^\times} &:= \ker(\mathbb{Z}[N] \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[F^\times]} \mathbb{Z}[N]). \end{aligned}$$

各 $j = 1, \ldots, r$ に対し $g_j : \mathcal{O}_{H,S,T}^\times \to F_{v_j}^\times$ を次の自然な合成者像とする．

$$g_j : \mathcal{O}_{H,S,T}^\times \subset H^\times \subset F_{w_j}^\times = F_{v_j}^\times.$$

Regulator 写像

$$\hat{R} : (\mathcal{O}_{H,S,T}^\times)^{\otimes r} \otimes \mathbb{Z}[G_H] \to \mathbb{Z}[N]/I_{G_H} \prod_{v \in V} I_v$$

を次で定義する．

$$\hat{R}(u_1 \otimes \cdots \otimes u_r \otimes [\tau]) := [\tau] \prod_{j=1}^{r} ([g_j(u_j)] - [1]).$$

次の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[N]/\left(I_{F^\times} \prod_{v \in V} I_v\right) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & \mathbb{Z}[G_K] \arrow[d, "f_3"'] \\ \mathbb{Z}[N]/\left(I_{G_H} \prod_{v \in V} I_v\right) \arrow[r, "f_4"'] & \mathbb{Z}[G_K]/\left(I_{K,G_H} \prod_{v \in V} I_{K,v}\right) \end{tikzcd}$$

ただし f_2, f_3 は自然な商写像，f_1, f_4 は自然な相互写像とする．

$$\begin{aligned} \Theta_{K,S,T} &\in \mathbb{Z}[G_K] \\ R_G(\epsilon_{S,T}) &\in \mathbb{Z}[G_K]/\left(I_{K,G_H} \prod_{v \in V} I_{K,v}\right) \\ \hat{R}(\epsilon_{S,T}) &\in \mathbb{Z}[N]/\left(I_{G_H} \prod_{v \in V} I_v\right) \\ f_4(\hat{R}(\epsilon_{S,T})) &= R_G(\epsilon_{S,T}) \end{aligned}$$

に注意する．GLTC は次に同値である．

$$f_3(\Theta_{K,S,T}) = R_G(\epsilon_{S,T}).$$

次の結果が予想を定式化するうえで根幹となる部分である．

定理 2.2.　$\mathbb{Z}[N]/\left(I_{F^\times}\prod_{v\in V} I_v\right)$ の元 $\hat{\Theta}_{S,T,V}$ であって以下の条件をみたすものを構成する，自然な方法が存在する．

- $\hat{\Theta}_{S,T,V} \in \prod_{v\in V} I_v/\left(I_{F^\times}\prod_{v\in V} I_v\right)$.
- $f_1(\hat{\Theta}_{S,T,V}) = \Theta_{K,S,T}$.

$\hat{\Theta}_{S,T,V}$ の構成方法については次節で述べる．次が [6] の主予想である．

予想 2.3 ([6, Conjecture 4.2])**.**　次の等式が成立する．

$$f_2(\hat{\Theta}_{S,T,V}) = \hat{R}(\epsilon_{S,T}).$$

§ 3.　$\hat{\Theta}_{S,T,V}$ の構成

$\hat{\Theta}_{S,T,V}$ の構成は次の 4 段階に分かれる．

Step1 新谷データの定義．

Step2 任意の新谷データ $(\mathcal{F},\varphi,x)$ に対して $Q(\mathcal{F},\varphi,x)$ を構成する．

Step3 新谷データ $(B,\mathcal{L},\vartheta)$ を構成する．

Step4 $\hat{\Theta}_{S,T,V} = Q(B,\mathcal{L},\vartheta)$ と置く．

§ 3.1.　新谷データの定義

$\mathbf{Sub}(V)$ を V の部分集合を対象，包含写像を射とする圏とする．つまり

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{Sub}(V)) = \{W \subset V\}$$
$$\#\mathrm{Hom}(U_1,U_2) = \begin{cases} 1 & U_1 \subset U_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．また $\mathbb{Z}[F^\times]$-加群の圏を $\mathbf{Mod}(F^\times)$ と書く．$\mathbf{Sub}(V)$ から $\mathbf{Mod}(F^\times)$ への関手 R を次で定義する．

$$R(W) := \mathbb{Z}[N/\prod_{v\in W} N_v].$$

以下 $\mathbb{Z}[F^\times]$-加群 M に対し $IM := \ker(M \to \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}[F^\times]} M)$ と置く．

定義 3.1.　$\mathcal{F}$ を $\mathbf{Sub}(V)$ から $\mathbf{Mod}(F^\times)$ への関手，φ を $\mathcal{F}$ から R への自然変換，x を $\mathcal{F}(\emptyset)/I\mathcal{F}(\emptyset)$ の元とする．三つ組 $(\mathcal{F},\varphi,x)$ が新谷データであるとは以下の条件を全て満たすことをいう．

- $i > 0$ と $W \subset V$ に対し
$$H_i(F^\times, \mathcal{F}(W)) = 0.$$
- 各 $v \in V$ に対し $f_v : \mathcal{F}(\emptyset)/I\mathcal{F}(\emptyset) \to \mathcal{F}(\{v\})/I\mathcal{F}(\{v\})$ を自然な写像とする．このとき任意の $v \in V$ に対して
$$f_v(x) = 0.$$
- rec : $\mathbb{Z}[N] \to \mathbb{Z}[G_K]$ を相互写像 $N \to G_K$ から誘導される自然な写像とする．$\bar{x} \in \mathcal{F}(\emptyset)$ を x の持ち上げとするとき
$$(\mathrm{rec} \circ \varphi_\emptyset)(\bar{x}) = \Theta_{K,S,T}.$$

§ 3.2. $Q(\mathcal{F}, \varphi, x)$ の構成

$(\mathcal{F}, \varphi, x)$ を新谷データとする．自然数 k に対して次のように置く．

$$\mathcal{F}_k := \bigoplus_{\substack{W \subset V \\ \#W = k}} \mathcal{F}(W)$$
$$R_k := \bigoplus_{\substack{W \subset V \\ \#W = k}} R(W).$$

$\mathbb{Z}[F^\times]$-加群の圏における $\mathbb{Z}$ の自由分解を一つ固定する．

$$\to \mathcal{I}_3 \to \mathcal{I}_2 \to \mathcal{I}_1 \to \mathcal{I}_0 = \mathbb{Z}[F^\times] \to \mathbb{Z} \to 0.$$

さらに $\mathcal{F}_{i,j} = \mathcal{I}_i \otimes_{\mathbb{Z}[F^\times]} \mathcal{F}_j$, $R_{i,j} = \mathcal{I}_i \otimes_{\mathbb{Z}[F^\times]} R_j$ と置く．以下では簡単のため $r = 2$ として説明するが，一般の場合も全く同様である．次の 2 つの二重複体を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_{2,0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{2,1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{2,2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathcal{F}_{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}_{1,2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathcal{F}_{0,0} \arrow[r] & \mathcal{F}_{0,1} \arrow[r] & \mathcal{F}_{0,2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
R_{2,0} \arrow[r] \arrow[d] & R_{2,1} \arrow[r] \arrow[d] & R_{2,2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
R_{1,0} \arrow[r] \arrow[d] & R_{1,1} \arrow[r] \arrow[d] & R_{1,2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
R_{0,0} \arrow[r] & R_{0,1} \arrow[r] & R_{0,2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

このとき左の二重複体における垂直方向の列は完全である．また右の二重複体における水平方向の列は完全である．以下，垂直方向の (vertical) 写像を ∂_v と書き，水平方向の (horizontal) 写像を ∂_h と書く．

$a_0 \in \mathcal{F}_{0,0} = \mathcal{F}(\emptyset)$ を x の任意の持ち上げとする．このとき次を満たす $a_1 \in \mathcal{F}_{1,1}$,

$a_2 \in \mathcal{F}_{2,2}$, $b_2 \in R_{2,1}$, $b_1 \in R_{1,0}$ が存在する．

$$\begin{aligned}\partial_h(a_0) &= \partial_v(a_1)\\ \partial_h(a_1) &= \partial_v(a_2)\\ \partial_h(b_2) &= \varphi(a_2)\\ \partial_h(b_1) &= \varphi(a_1) - \partial_v(b_2).\end{aligned}$$

ここで $(a_0, a_1, a_2, b_2, b_1)$ の選び方は一意ではないが，次が成立する．

命題 3.2 ([6, Proposition 1.8])**.** $\varphi(a_0) - \partial_v(b_1) \pmod{I_{F^\times} \prod_{v\in V} I_v}$ は $(a_0, a_1, a_2, b_2, b_1)$ の選び方に依らない．

また次も成立する．

命題 3.3 ([6, Proposition 1.7])**.** $\varphi(a_0) - \partial_v(b_1) \in \prod_{v\in V} I_v$.

よって次の定義は well-defined である．

定義 3.4. 新谷データ $(\mathcal{F}, \varphi, x)$ に対し，$Q(\mathcal{F}, \varphi, x) \in \prod_{v\in V} I_v / I_{F^\times} \prod_{v\in V} I_v$ を $Q(\mathcal{F}, \varphi, x) = \varphi(a_0) - \partial_v(b_1)$ で定める．

§3.3. 新谷データ $(B, \mathcal{L}, \vartheta)$ の構成

定義 3.5. 新谷データ $(\mathcal{F}_1, \varphi_1, x_1)$ と $(\mathcal{F}_2, \varphi_2, x_2)$ に対し，自然変換 $\psi : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ が存在して $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$ かつ $x_2 = \psi_\emptyset(x_1)$ となるとき $(\mathcal{F}_1, \varphi_1, x_1)$ と $(\mathcal{F}_2, \varphi_2, x_2)$ を同値とするような，最小の同値関係を $\sim$ とする．

次の定理が成立することに注意する．

定理 3.6 ([6, Proposition 1.10])**.** $(\mathcal{F}_1, \varphi_1, x_1)$ と $(\mathcal{F}_2, \varphi_2, x_2)$ を新谷データとする．$(\mathcal{F}_1, \varphi_1, x_1) \sim (\mathcal{F}_2, \varphi_2, x_2)$ となるとき $Q(\mathcal{F}_1, \varphi_1, x_1) = Q(\mathcal{F}_2, \varphi_2, x_2)$.

[6] では新谷データ $(B, \mathcal{L}, \vartheta)$ を構成しているが，この定義には多くの変種が考えられる．それらの変種と比べ，$(B, \mathcal{L}, \vartheta)$ の定義が自然なものであるかが問題になるが，上記の定理により，同値関係 $\sim$ で結ばれるような定義の違いに関しては，気にする必要がないという事に注意しておく．

[6] では一般の場合を取り扱っているが，本稿では簡単のため F の類数を 1 と仮定する．$(B, \mathcal{L}, \varphi)$ の定義及び $(B, \mathcal{L}, \varphi)$ が新谷データとなることの証明は [6, Section 2] で与えられるが，$(B, \mathcal{L}, \varphi)$ の定義はかなり複雑である．本稿では $(B, \mathcal{L}, \varphi)$ に比べ，ずっと簡単に定義可能な三つ組 $(B', \mathcal{L}', \varphi')$ の構成を説明する．ただし，残念ながら $(B', \mathcal{L}', \varphi')$ が新谷データとなることの証明は得られていない．$(B', \mathcal{L}', \varphi')$ が新谷データであれば $(B, \mathcal{L}, \varphi) \sim (B', \mathcal{L}', \varphi')$ となる．

S_f を S に含まれる有限素点の集合とする．$W \subset V$ に対して $j_W : F^\times \to \prod_{v \in S \setminus W} N_v$ を自然な対角写像とする．$f : F \to \mathbb{Z}$, $y \in \prod_{v \in S \setminus W} N_v$, 及び $\boldsymbol{s} = (s_v)_{v \in S_\infty \setminus W} \in \mathbb{C}^{\#(S_\infty \setminus W)}$ に対して級数 $\zeta_{f,y}(\boldsymbol{s})$ を次で定める．

$$\zeta_{f,y}(\boldsymbol{s}) := \sum_{x \in j_W^{-1}(y)} \prod_{v \in S_\infty \setminus W} |x|_v^{-s_v}.$$

定義 3.7. $W \subset V$ に対して次の条件を満たす関数 $f : F^\times \to \mathbb{Z}$ の集合を $B'(W)$ と書く．

- $\boldsymbol{s}$ の全ての成分の実部が十分に大きいとき，任意の $y \in \prod_{v \in S \setminus W} N_v$ に対して $\zeta_{f,y}(\boldsymbol{s})$ は絶対収束する．
- 有限個の $y \in \prod_{v \in S \setminus W} N_v$ を除き $\zeta_{f,y}(\boldsymbol{s}) = 0$.
- 任意の $y \in \prod_{v \in S \setminus W} N_v$ に対して $\zeta_{f,y}(\boldsymbol{s})$ は $\mathbb{C}^{\#(S_\infty \setminus W)}$ 全体に解析接続され，さらに $\zeta_{f,y}(\boldsymbol{0}) \in \mathbb{Z}$ を満たす．

$B'(W)$ には自然に $\mathbb{Z}[F^\times]$-加群の構造が入る．また任意の $W_1 \subset W_2 \subset V$ に対して $B'(W_1) \subset B'(W_2) \subset \mathrm{Map}(F^\times, \mathbb{Z})$ である．よって B' は自然に $\mathbf{Sub}(V)$ から $\mathbf{Mod}(F^\times)$ への関手となる．

定義 3.8. $W \subset V$ とする．$\prod_{v \in S \setminus W} N_v$ は自然に $N / \prod_{v \in W} N_v$ に埋め込まれることに注意する．$\mathcal{L}'_W \in \mathrm{Hom}(B'(W), R(W))$ を

$$\mathcal{L}'_W(f) := \sum_{y \in \prod_{v \in S \setminus W} N_v} \zeta_{f,y}(\boldsymbol{0})[y] \in \mathbb{Z}[N / \prod_{v \in W} N_v] = R(W)$$

で定義する．

$\mathcal{L}' = (\mathcal{L}'_W)_{W \subset V}$ は B' から R への自然変換となる

最後に $\vartheta' \in B'(\emptyset)/IB'(\emptyset)$ を定義する．写像 $c_{S,T} : F^\times \to \mathbb{Z}$ を以下で定義する．$x \notin \mathcal{O}_F$ に対しては

$$c_{S,T}(x) := 0,$$

$x \in \mathcal{O}_F$ に対しては

$$c_{S,T}(x) = \prod_{\mathfrak{p} \in S_f} \begin{cases} 1 & x \notin \mathfrak{p} \\ 0 & x \in \mathfrak{p} \end{cases} \times \prod_{\mathfrak{p} \in T} \begin{cases} 1 & x \notin \mathfrak{p} \\ 1 - N(\mathfrak{p}) & x \in \mathfrak{p} \end{cases}$$

とする．新谷ゼータ関数の理論より，$f \in B'(\emptyset)$ を構成する自然な方法が存在し，任意の $x \in F^\times$ に対して

$$\sum_{\epsilon \in \mathcal{O}_F^\times} f(\epsilon x) = c_{S,T}(x)$$

となる．このような f を一つ固定し $\vartheta' \in B'(\emptyset)/IB'(\emptyset)$ を f の射影とする．

三つ組 $(B', \mathcal{L}', \vartheta')$ に関しては

$$(\mathrm{rec} \circ \mathcal{L}'_{\emptyset})(\vartheta') = \Theta_{K,S,T}$$

が成立する．$(B', \mathcal{L}', \vartheta')$ が常に新谷データとなるかどうかは不明である．[6] では，$(B', \mathcal{L}', \vartheta')$ の構成に類似したアイデアで $(B, \mathcal{L}, \vartheta)$ を構成し，さらに $(B, \mathcal{L}, \vartheta)$ が新谷データとなることを証明した [6, Theorem 2.16]．また，自然変換 $\psi : B \to B'$ が存在して $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \circ \psi$ かつ $\vartheta' = \psi_{\emptyset}(\vartheta)$ となることが $(B, \mathcal{L}, \vartheta)$ の構成方法から自然に従う．

References

[1] Colmez, P., Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe, *Ann. of Math.*, **138** (1993) 625–683

[2] Dasgupta, S., Shintani zeta functions and Gross-Stark units for totally real fields, *Duke Math. J.*, **143** (2008) 225–279

[3] Deligne, P. and Ribet, K. A., Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, *Invent. Math.*, **59** (1980), 227–286.

[4] Gross, B. H., p-adic L-series at $s = 0$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo,* **28** (1981), 979–994.

[5] Gross, B. H., On the values of abelian L-functions at $s = 0$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **35** (1988), 177–197.

[6] Hirose M., Shintani zeta functions and a refinement of Gross's leading term conjecture, `arXiv:1602.00666v1 [math.NT]`.

[7] Kashio T., and Yoshida H., On p-adic absolute CM-periods. I, *Amer. J. Math.*, **130** (2008), 1629–1685.

[8] Kashio T., and Yoshida H., On p-adic absolute CM-periods. II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **45** (2009), 187–225.

[9] Ren, T. and Sczech, R., A refinement of Stark's conjecture over complex cubic number fields, *J. Number Theory*, **129** (2009), 831–857.

[10] Rubin, K., A Stark conjecture "over $\mathbf{Z}$" for abelian L-functions with multiple zeros, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), **46** (1996), 33–62.

[11] Yoshida H., On absolute CM-periods. II, *Amer. J. Math.*, **120** (1998), 1199–1236.

[12] Yoshida H., On absolute CM-periods, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **66** (1999), 221–278.

[13] Zagier, D., Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic K-theory of fields, *Arithmetic algebraic geometry (Texel, 1989), Progr. Math.*, **89** 391–430

[14] Zagier, D. and Gangl, H., Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-series, *in The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff,AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci.*, **548** 561–615.