RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B72 (2018), 091–099

双曲的曲線に関連した副有限群の非分解性について (On the indecomposability of profinite groups related to hyperbolic curves)

By

南出 新 (Arata Minamide)*

Abstract

In the present paper, the author introduces results concerning the indecomposability of various profinte groups related to hyperbolic curves. For instance, we discuss the indecomposability of the étale fundamental group of the configuration space of a hyperbolic curve over an algebraically closed field of characteristic zero, and the pro-l Grothendieck-Teichmüller group. The details of the results and their proofs are given in [M].

概要

本稿では, 双曲的曲線に関連した様々な副有限群の非分解性についての結果を紹介する. 例えば, 標数 0 の代数閉体上の双曲的曲線に付随した配置空間のエタール基本群や副 l グロタンディーク・タイヒミューラー群の非分解性について議論する. 結果や証明の詳細は [M] で与えられている.

§0. 記号

本稿では, 完全体 k に対し, その代数閉包を $\overline{k}$, その絶対ガロア群を $G_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ であらわすこととします. また, 連結なネータースキーム S に対し, そのエタール基本群を Π_S であらわすこととします.

Received March 30, 2016. Revised August 31, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 14H30; Secondary11R99.
Key Words: *indecomposability, étale fundamental group, Grothendieck-Teichmüller group, hyperbolic curve, configuration space.*
*RIMS, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan.
e-mail: `minamide@kurims.kyoto-u.ac.jp`

§1. 遠アーベル性から非分解性へ

1980 年代にグロタンディークが遠アーベル幾何を提唱して以降, その後の研究により, $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体 k 上の非特異曲線 X に対して,

$$X \text{ が遠アーベル的} \iff X \text{ が双曲的}$$

という対応は確立されたといえます (例えば, [NTM] を参照). 一方, 2 次元以上の非特異多様体の遠アーベル性を規定する適切な条件は, 現在までも見つかっていません. しかし, そのような条件の中に,

$$\text{非特異多様体 } X \text{ の幾何的基本群 } \Pi_{X\times_k \overline{k}} \text{ の中心が自明}$$

という群論的性質が含まれる, ということは広く信じられています. (例えば, [IN] を参照. ただし, [IN] ではより強く, 幾何的基本群の任意の開部分群の中心自明性まで仮定しています. また, X が曲線の場合, その双曲性は "幾何的基本群が非自明かつ中心自明" という群論的性質と同値であることに注意します.) 換言すると, 中心自明性という群論的性質は

多様体の遠アーベル性と関連性が深い性質

といえます. 本稿では, "遠アーベル性と関連性が深い性質" として, 副有限群の**非分解性** — 即ち, 非自明な直積分解を持たない — という群論的性質に着目します. 実際, 遠アーベル性と非分解性には次のような関連性があります:

- <u>遠アーベル性</u> $\cdots$ テストするためには, 構造射 $X \to \mathrm{Spec}(k)$ に付随したホモトピー完全系列
$$1 \longrightarrow \Pi_{X\times_k \overline{k}} \longrightarrow \Pi_X \longrightarrow G_k \longrightarrow 1$$
から生じる自然な外ガロア表現 $\rho: G_k \to \mathrm{Out}(\Pi_{X\times_k \overline{k}})$ に対し, $\mathrm{Im}(\rho)$ の $\mathrm{Out}(\Pi_{X\times_k \overline{k}})$ での中心化群を調べる必要がある (例えば, [IN] を参照). 即ち,
$$\mathrm{Out}(\Pi_{X\times_k \overline{k}}) \text{ の部分群であって, } \mathrm{Im}(\rho) \text{ と} \textbf{可換} \text{するもの}$$
を扱う概念である.

- <u>非分解性</u> $\cdots$ テストするためには, 副有限群 G が非自明な直積分解 $G = G_1 \times G_2$ を持たないかどうか調べる必要がある. 即ち,
$$G \text{ の部分群 } (= G_1) \text{ であって, 別のある部分群 } (= G_2) \text{ と} \textbf{可換} \text{するもの}$$
を扱う概念である.

例えば, この関連性を具体的に活用することで, **副 l グロタンディーク・タイヒミューラー群**の非分解性 (定理 4.5) を示すことが出来ます. 以下では, 遠アーベル幾何に現れる様々な副有限群が, 中心自明性, そして, 非分解性をみたす, という事実を紹介します.

§2. 中心自明性

§2 では, まず, 中心自明性に関する様々な結果を復習します. 以下, §2 では, 簡単のため, k を (遠アーベル幾何にしばしば現れる)

$$\mathbb{Q} \text{ 上, あるいは, } \mathbb{Q}_p \text{ 上有限生成な体}$$

と仮定します. すると, 1 次元遠アーベル多様体の典型例といえる, k 上の**双曲的曲線** X に対して, 次のような事実が成り立ちます (例えば, [MT, Proposition 1.4] を参照):

事実 2.1. X の幾何的基本群 $\Pi_{X\times_k\overline{k}}$ は中心自明.

それでは, 高次元の場合はどうでしょうか. 現在, 高次元の遠アーベル多様体と見做されているものとしては, k 上の双曲的曲線 X の **$\boldsymbol{n}$ 次配置空間**

$$X_n \overset{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \ (i \neq j)\ \}$$

— ここで, n は正整数, X^n は X の n 個のコピーの k 上のファイバー積 — があります (例えば, [IN], [MT] を参照). この X_n に対して, 次のような事実が成り立ちます (例えば, [MT, Proposition 2.2, (ii)] を参照):

事実 2.2. X_n の幾何的基本群 $\Pi_{X_n\times_k\overline{k}}$ は中心自明.

次に, 遠アーベル的ではない多様体についても考えてみます. 今, g を 2 以上の整数, n を 3 以上の整数とする時,

$\mathbb{Q}(\zeta_n)$ (ζ_n は 1 の原始 n 乗根) 上の
次数 g, レベル n のジーゲルモジュラー多様体 $A_{g,n}$

は遠アーベル的でない多様体の例を与えます ([IN, Example (S)] を参照). $A_{g,n}$ に関しては, 次のような事実が知られています ([IN, Example (S)] 直後の議論を参照):

事実 2.3. $k = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ とする. この時, $A_{g,n}$ の幾何的基本群 $\Pi_{A_{g,n}\times_k\overline{k}}$ の中心は非自明.

また, これまでに, 様々な “体” や “多様体” が現れましたが, それらに関連した様々な副有限群も, 実は, 中心自明性をみたしています. 実際,

事実 2.4. G_k は中心自明.

事実 2.5. X の数論的基本群 Π_X, そして, X_n の数論的基本群 Π_{X_n} は中心自明.

という事実が知られています. (事実 2.4 については, 例えば, [Mzk1, Lemma 15.8] を参照. 事実 2.5 の証明は, 例えば, [M, Corollary 4.6, (i)] を参照.)

注.

(i) 実際, 事実 2.1, 事実 2.2 については, より一般に, 次が成り立ちます (例えば, [MT, Proposition 2.2, (ii)] を参照):

> K を標数 0 の代数閉体, Y を K 上の双曲的曲線, Y_n を Y の n 次配置空間とする. この時, Π_Y, Π_{Y_n} は中心自明. さらに, 任意の素数 l に対して, Π_Y, Π_{Y_n} それぞれの最大副 l 商 $\Pi_Y^{(l)}$, $\Pi_{Y_n}^{(l)}$ も中心自明.

(ii) 実際, 事実 2.4, 事実 2.5 については, ($\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の場合を除いて) より一般に, 次が成り立ちます (例えば, [M, Proposition 1.8, (i)], [M, Theorem 2.1], [M, Theorem 4.4, (ii)] の証明を参照):

> K を標数 0 の**ヒルベルト体** (例えば, [FJ, §12.1] を参照), Y を K 上の双曲的曲線, Y_n を Y の n 次配置空間とする. この時, G_K, Π_Y, Π_{Y_n} は中心自明.

§3. 非分解性

§3 では, まず, 副有限群の非分解性という概念を導入します. そして, §2 に現れた様々な副有限群が, 実際, 非分解性をみたすという事実を紹介したいと思います. §3 でも引き続き, 簡単のため, k は (遠アーベル幾何にしばしば現れる)

$\mathbb{Q}$ 上, あるいは, $\mathbb{Q}_p$ 上有限生成な体

であると仮定します.

定義 3.1. G を副有限群とする. G が条件

($*$) G が 2 つの副有限群 G_1, G_2 の直積と同型ならば, $G_1 = \{1\}$ または $G_2 = \{1\}$

をみたす時, G は非分解的である, という.

ここで, §2 に現れた, k 上の双曲的曲線 X の幾何的基本群について, 次のような事実が成り立つことに注意します (例えば, [MT, Proposition 3.2] を参照):

事実 3.2. X の幾何的基本群 $\Pi_{X\times_k\overline{k}}$ は非分解的.

筆者は, 事実 3.2 と §2 の話を踏まえ, 次のような結果を証明しました ([M, Theorem C, (i)] を参照):

定理 3.3. X の n 次配置空間 X_n の幾何的基本群 $\Pi_{X_n\times_k\overline{k}}$ は非分解的.

また, この定理の応用として, 次のような代数幾何学的事実も証明することが出来ます ([M, Theorem E] を参照):

定理 3.4. X_n が k 上の多様体 Y, Z の k 上のファイバー積 $Y \times_k Z$ と k 同型であると仮定する. この時, $Y \cong \mathrm{Spec}(k)$ または $Z \cong \mathrm{Spec}(k)$ が成り立つ.

一方, §2 に現れた

$\mathbb{Q}(\zeta_n)$ 上の次数 g, レベル n のジーゲルモジュラー多様体 $A_{g,n}$

については, 次のような事実が知られています ([IN, Example (S)] 直後の議論を参照):

事実 3.5. $k = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ とする. この時, $A_{g,n}$ の幾何的基本群 $\Pi_{A_{g,n} \times_k \overline{k}}$ は非自明な直積分解を持つ.

最後に, 事実 2.4, 事実 2.5 に対応した結果が, 非分解性の場合にも成り立つ, ということを注意しておきます:

事実 3.6. G_k は非分解的.

定理 3.7. X の数論的基本群 Π_X, そして, X_n の数論的基本群 Π_{X_n} は非分解的.

(事実 3.6 の証明は, k が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の場合は, [M, Proposition 2.4] を参照. k が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体でない場合は, ハラン, ヤルデンによる ([HJ, Corollary 2.5] を参照). 定理 3.7 の証明は, [M, Corollary 4.6, (i)] を参照.)

注.

(i) 実際, 事実 3.2, 定理 3.3 については, より一般に, 次が成り立ちます ([MT, Proposition 3.2], [M, Theorem C, (i)] を参照):

K を標数 0 の代数閉体, Y を K 上の双曲的曲線, Y_n を Y の n 次配置空間とする. この時, Π_Y, Π_{Y_n} は非分解的. さらに, 任意の素数 l に対して, Π_Y, Π_{Y_n} それぞれの最大副 l 商 $\Pi_Y^{(l)}$, $\Pi_{Y_n}^{(l)}$ も非分解的.

これに伴い, 定理 3.4 が, “k は標数 0 の (任意の) 体” の場合でも成り立つことが分かります ([M, Theorem E] を参照).

(ii) 実際, 事実 3.6, 定理 3.7 については, ($\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の場合を除いて) より一般に, 次が成り立ちます (例えば, [HJ, Corollary 2.5], [M, Corollary 4.5, (i)] を参照):

K を標数 0 の**ヒルベルト体**, Y を K 上の双曲的曲線, Y_n を Y の n 次配置空間とする. この時, G_K は非分解的. さらに, ある素数 l について, K が

l 円分充満, 即ち, K の l 進円分指標 $G_K \to \mathbb{Z}_l^\times$ の像が無限

であるとすると, Π_Y, Π_{Y_n} は非分解的.

ここで, l 円分充満という仮定は外せないことに注意します. 実際, Z を $\mathbb{C}$ 上の双曲的曲線, Y を Z を自然な単射 $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{C}(t)$ で底変換して得られる ($\mathbb{C}(t)$ 上の) 双曲的曲線とします. すると, $\mathbb{C}(t)$ は標数 0 のヒルベルト体であるにもかかわらず, Π_Y は

$$\Pi_Y \cong \Pi_Z \times G_{\mathbb{C}(t)}$$

と非自明な副有限群の直積に分解します.

§4. 有理数体の絶対ガロア群とグロタンディーク・タイヒミューラー群の比較

まず, グロタンディーク・タイヒミューラー群の定義を復習します. 以下, §4 では,

$$X \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}, \quad \overline{X} \overset{\text{def}}{=} X \times_{\mathbb{Q}} \overline{\mathbb{Q}}$$

とし, さらに, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の双曲的曲線 $\overline{X}$ の 2 次配置空間を $\overline{X}_2$, そして,

$$\Pi_1 \overset{\text{def}}{=} \Pi_{\overline{X}}, \quad \Pi_2 \overset{\text{def}}{=} \Pi_{\overline{X}_2}$$

とします. 従って, $i = 1, 2$ に対し, 第 i 射影 $\overline{X}_2 \to \overline{X}$ は自然な外部全射

$$p_i : \Pi_2 \twoheadrightarrow \Pi_1$$

を誘導することに注意します. そこで,

$$\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_2) \overset{\text{def}}{=} \{\alpha \in \mathrm{Out}(\Pi_2) \mid \alpha(\ker(p_i)) = \ker(p_i) \ \ (i = 1, 2)\}$$

とおくと, 自然な外部全射 $p_1 : \Pi_2 \twoheadrightarrow \Pi_1$ は, 自然な群準同型

$$\varphi : \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_2) \to \mathrm{Out}(\Pi_1)$$

を誘導します.

注. φ は $p_2 : \Pi_2 \twoheadrightarrow \Pi_1$ から誘導された群準同型 $\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_2) \to \mathrm{Out}(\Pi_1)$ と一致することが知られています ([HM1, Theorem A, (i)] を参照). また, 実際, φ は単射になることが知られています ([HM2, Theorem A, (i)] を参照).

以下, 本稿では, 群 G の部分群 H の中心化群を $Z_G(H)$ であらわすこととします. この時, グロタンディーク・タイヒミューラー群を次のようにして定義します (例えば, [M, Definition 6.2] 直前の段落を参照):

定義 4.1. $\mathfrak{S}_3$ を 3 次対称群, そして,

$$\mathfrak{S}_3 \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_1)$$

を $\mathfrak{S}_3$ の $\overline{X}$ への自然な作用から誘導される単射準同型とする. この時,

$$\mathrm{GT} \overset{\text{def}}{=} Z_{\mathrm{Out}(\Pi_1)}(\mathfrak{S}_3) \cap \mathrm{Im}(\varphi) \ \ (\subseteq \mathrm{Out}(\Pi_1))$$

を**グロタンディーク・タイヒミューラー群**と呼ぶ.

注. ここでの GT は, ドリンフェルトによって導入されたグロタンディーク・タイヒミューラー群と一致します (例えば, [I, §3.3], [Mzk2, Remark 1.11.1], [HM2, Definition 3.4, (i)] を参照).

定義 4.1 を踏まえると, 構造射 $X \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ に付随したホモトピー完全系列

$$1 \longrightarrow \Pi_1 \longrightarrow \Pi_X \longrightarrow G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow 1$$

から誘導される自然な外ガロア表現

$$\rho : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Out}(\Pi_1)$$

の像が GT に含まれるということが簡単に確認出来ます. この事実と, ρ の単射性 (=Belyi の定理) を組み合わせることで、自然な単射

$$G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{GT}$$

が得られます. グロタンディーク・タイヒミューラー群の理論において, この $G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{GT}$ が同型か, という問いは興味深い未解決問題です. 一方, **組み合わせ論的遠アーベル幾何** (例えば, [Mzk2], [HM1], [HM2], [HM3] 等を参照) の視点に立つと, GT は $G_{\mathbb{Q}}$ の "組み合わせ論的, 群論的類似物" と考えられるので, ($G_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathrm{GT}$ が同型であるということを示す代わりに,)

$G_{\mathbb{Q}}$ がみたす群論的性質の内, どのようなものを GT もみたしているか,

という問題を考察することが自然です ([HM3, Introduction] を参照). 例えば, §2 に現れた "中心自明性" という群論的性質について考察してみましょう. §2 でも触れたように, $G_{\mathbb{Q}}$ は中心自明性をみたしています (事実 2.4 を参照). 一方, GT についても, 次が成り立ちます (例えば, [M, Corollary 6.3] を参照):

事実 4.2. GT は中心自明.

それでは, §3 に現れた "非分解性" という群論的性質についてはどうでしょうか. $G_{\mathbb{Q}}$ が非分解性をみたしていることに注意すると (事実 3.6 を参照), 次の問いは自然なものといえます:

問題 4.3. GT は非分解的か.

筆者は, 現在のところ, 問題 4.3 の解答を得ていません. しかし, 以下述べるように, "問題 4.3 の副 l 版" については, 肯定的に解決することが出来ました. そこで, 結果を述べるために, **副 l グロタンディーク・タイヒミューラー群**の定義を復習します. 以下, l を任意の素数, $\Pi_1^{(l)}$, $\Pi_2^{(l)}$ を Π_1, Π_2 それぞれの最大副 l 商, また, $i = 1, 2$ に対し,

$$p_i^{(l)} : \Pi_2^{(l)} \twoheadrightarrow \Pi_1^{(l)}$$

を第 i 射影 $\overline{X}_2 \to \overline{X}$ から誘導された自然な外部全射, そして,

$$\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_2^{(l)}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\alpha \in \mathrm{Out}(\Pi_2^{(l)}) \mid \alpha(\ker(p_i^{(l)})) = \ker(p_i^{(l)}) \ \ (i = 1, 2)\}$$

とします. この時, 自然な外部全射 $p_1^{(l)} : \Pi_2^{(l)} \twoheadrightarrow \Pi_1^{(l)}$ は, 自然な群準同型

$$\varphi^{(l)} : \mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_2^{(l)}) \to \mathrm{Out}(\Pi_1^{(l)})$$

を誘導します.

注. $\varphi^{(l)}$ は $p_2 : \Pi_2^{(l)} \twoheadrightarrow \Pi_1^{(l)}$ から誘導された群準同型 $\mathrm{Out}^{\mathrm{F}}(\Pi_2^{(l)}) \to \mathrm{Out}(\Pi_1^{(l)})$ と一致することが知られています ([HM1, Theorem A, (i)] を参照). また, 実際, $\varphi^{(l)}$ は単射になることが知られています ([HM2, Theorem A, (i)] を参照).

そこで, 副 l グロタンディーク・タイヒミューラー群を次のようにして定義します ([M, Definition 6.2] を参照):

定義 4.4. $\mathfrak{S}_3$ を 3 次対称群, そして,

$$\mathfrak{S}_3 \hookrightarrow \mathrm{Out}(\Pi_1^{(l)})$$

を $\mathfrak{S}_3$ の $\overline{X}$ への自然な作用から誘導される単射準同型とする. この時,

$$\mathrm{GT}_l \ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ Z_{\mathrm{Out}(\Pi_1^{(l)})}(\mathfrak{S}_3) \ \cap \ \mathrm{Im}(\varphi^{(l)}) \ \ (\subseteq \mathrm{Out}(\Pi_1^{(l)}))$$

を**副 l グロタンディーク・タイヒミューラー群**と呼ぶ.

これまでの準備の下, §4 の主定理は, 次のように述べられます ([M, Theorem F] を参照):

定理 4.5. GT_l は非分解的.

注. GT_l は中心自明性もみたしています (例えば, [M, Corollary 6.3] を参照).

謝辞

本稿は, 2015 年 11 月 30 日〜12 月 4 日に催されました, “代数的整数論とその周辺” での筆者の講演を基としたものです. 講演の機会を与えてくださいました, 関係者の皆様に深く感謝いたします. また, 本稿の執筆に際し, 様々なコメントをくださいました, 望月新一氏, 星裕一郎氏に感謝を申し上げます.

References

[FJ] M. Fried and M. Jarden, *Field Arithmetic (Second Edition)*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, A Series of Modern Surveys in Mathematics* **11**, Springer-Verlag (2005).

[HJ] D. Haran and M. Jarden, Compositum of Galois extensions of Hilbertian fields, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **24** (1991), pp. 739-748.

[HM1] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: Inertia groups and profinite Dehn twists, *Galois-Teichmüller Theory and Arithmetic Geometry*, *Adv. Stud. Pure Math.* **63**, Math. Soc. Japan (2012), pp. 659-811.

[HM2] Y. Hoshi and S. Mochizuki, *Topics Surrounding the Combinatorial Anabelian Geometry of Hyperbolic curves II: Tripods and Combinatorial Cuspidalization*, RIMS Preprint **1762** (November 2012).

[HM3] Y. Hoshi and S. Mochizuki, *Topics Surrounding the Combinatorial Anabelian Geometry of Hyperbolic curves III: Tripods and Tempered Fundamental Groups*, RIMS Preprint **1763** (November 2012).

[I] Y. Ihara, Braids, Galois groups, and some arithmetic functions, Proceedings of the ICM, Kyoto, Japan (1990), pp. 99-120.

[IN] Y. Ihara and H. Nakamura, Some illustrative examples for anabelian geometry in high dimensions, *Geometric Galois Actions; 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, *London Math. Soc. Lect. Note Ser.* **242**, Cambridge Univ. Press (1997).

[M] A. Minamide, Indecomposability of various profinite groups arising from hyperbolic curves, *Math. J. Okayama Univ.* **60** (2018), pp. 175-208.

[MT] S. Mochizuki and A. Tamagawa, The Algebraic and Anabelian Geometry of Configuration Spaces, *Hokkaido Math. J.* **37** (2008), pp. 75-131.

[Mzk1] S. Mochizuki, The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves, *Invent. Math.* **138** (1999), pp. 319-423.

[Mzk2] S. Mochizuki, On the Combinatorial Cuspidalization of Hyperbolic Curves, *Osaka J. Math.* **47** (2010), pp. 651-715.

[NTM] H. Nakamura, A. Tamagawa, S. Mochizuki, The Grothendieck conjecture on the fundamental groups of algebraic curves, *Sugaku Expositions*, **14** (2001), pp. 31-53.