RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B72 (2018), 101–117

モデュラス対の一般化と応用について (On a generalization of modulus pairs and its applications)

By

宮﨑 弘安 (Hiroyasu MIYAZAKI)*

Abstract

In this article, we present a generalization of the notion of modulus pairs and and define the higher Chow groups with modulus of the generalized modulus pairs. We generalize, to the modulus setting, the $\mathbb{A}^1$-homotopy invariance of the higher Chow groups of schemes. As an application, we prove that the higher Chow groups with modulus over a field of positive characteristic p do not depend on the multiplicity of the modulus divisors after p is inverted. This is a research announcement of [13] and some of the proofs are omitted. The more details are available in [13].

本稿を通じて，任意の体 k を一つ固定する．$\mathbf{Sch}_k$ で k 上の有限型かつ分離的なスキームと k 上の射のなす圏を表す．$\mathbf{Sm}_k$ で k 上のスムーズなスキーム全体のなす $\mathbf{Sch}_k$ の充満部分圏を表す．

§1. 導入：代数的サイクルと高次チャウ群

スキーム $X \in \mathbf{Sch}_k$ に対する高次チャウ群の定義を復習する．

定義 1.1. スキーム $X \in \mathbf{Sch}_k$ 上の代数的サイクルとは，X の既約閉部分集合の形式的有限和

$$V = \sum_{i \in I} n_i V_i$$

のことである．ここで，I は有限集合であり，各 $i \in I$ に対して $n_i \in \mathbb{Z}$ かつ V_i は X の既約閉部分集合を表す．

Received March 28, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 14C15, 14C25, 14F42, 19E15
Key Words: *generalized modulus pair, higher chow group with modulus, cube-invariance.*
Supported by JAPAN SUPPORT
*Institut de Mathématiques de Jussieu (IMJ-PRG). Supported by a Grant-in-Aid for JSPS Fellows (Grant Number 15J08833) and by the Program for Leading Graduate Schools, MEXT, Japan.
e-mail: `hiroyasu.miyazaki@imj-prg.fr`
RIKEN, Interdisciplinary Theoretical and Mathematical Sciences Program (iTHEMS)
e-mail: `hiroyasu.miyazaki@riken.jp`

定義 1.2. スキーム $X \in \mathbf{Sch}_k$ の二つの既約閉部分集合 $V, W \subset X$ が**正しく交わる (intersect properly)** とは，不等式

$$\dim(V \cap W) \leq \dim(V) + \dim(W) - \dim(X)$$

が成り立つことである．X 上の二つの代数的サイクル $V = \sum_i n_i V_i, W = \sum_j m_j W_j$（$V_i, W_j$ は既約）が正しく交わるとは，任意の i, j に対して V_i, W_j が正しく交わることである．

定義 1.3. 非負整数 q に対して $\mathbb{A}^q = \mathbb{A}^q_k$ は k 上の q 次元アファイン空間を表す．スキーム $X \in \mathbf{Sch}_k$ と自然数 r, q に対し，自由アーベル群 $\underline{z}^r(X, q)$ を以下のように定義する：

$$\underline{z}^r(X,q) := \mathbb{Z}\left\{ \begin{array}{l} \text{余次元 } r \text{ の既約閉部分集合 } V \subset X \times \mathbb{A}^q \text{ で} \\ \text{あって，すべての faces と正しく交わるもの} \end{array} \right\}.$$

ここで，$\mathbb{A}^1$ の face とは集合 $\{\,\{0\}, \{1\}, \{\mathbb{A}^1\}\,\}$ の元のことである．$\mathbb{A}^q \cong (\mathbb{A}^1)^q$ の face は $\mathbb{A}^1$ の faces の q 個の積と定義する．例えば，$\mathbb{A}^2$ の faces 全体の集合は

$$\{\ \mathbb{A}^2 \text{の faces}\ \} = \left\{ \begin{array}{l} \{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\}, \\ \{0\} \times \mathbb{A}^1, \{1\} \times \mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1 \times \{0\}, \mathbb{A}^1 \times \{1\}, \\ \mathbb{A}^2 \end{array} \right\}.$$

$X \times \mathbb{A}^q$ の face は $\mathbb{A}^q$ の face と X の積として定める（正しく交わることの定義は 1.2 を参照）．各 $i \in \{1, \ldots, q\}$ と $\epsilon \in \{0, 1\}$ に対し，i 番目の $\mathbb{A}^1$ の座標が ϵ であるような $\mathbb{A}^q$ 超平面が $\mathbb{A}^q$ の余次元 1 の face である．対応する $X \times \mathbb{A}^q$ の余次元 1 の face を

$$\delta_i^\epsilon : X \times \mathbb{A}^{q-1} \hookrightarrow X \times \mathbb{A}^q$$

とする．$\underline{z}^r(X, q)$ に属するサイクルは δ_i^ϵ の像と正しく交わるので，引き戻し

$$\delta_i^{\epsilon *} : \underline{z}^r(X, q) \to \underline{z}^r(X, q-1)$$

を考えることができる．これらの交代和 $\underline{d} := \sum_{i,\epsilon} (-1)^{i+\epsilon} \delta_i^{\epsilon *}$ を考えると，形式的な計算により，関係式 $\underline{d}^2 = \underline{d} \circ \underline{d} = 0$ が確かめられ，$\{\underline{z}^r(X, \bullet), \underline{d}\}$ は複体となる．

次に，部分群 $\underline{z}^r(X, q)_{\mathrm{degn}} \subset \underline{z}^r(X, q)$ を以下で定める：

$$\underline{z}^r(X,q)_{\mathrm{degn}} := \mathrm{Image}\left[\bigoplus_{i=1}^q \underline{z}^r(X, q-1) \xrightarrow{\bigoplus_i p_i^*} \underline{z}^r(X, q) \right].$$

ここで，各 $i \in \{1, \ldots, q\}$ に対して $p_i : X \times \mathbb{A}^q \to X \times \mathbb{A}^{q-1}$ は i 番目の $\mathbb{A}^1$ の座標を取り除く射影，p_i^* は p_i によるサイクルの引き戻しである（すなわち，$p_i^*(W) = W \times \mathbb{A}^1$）．この部分群の元を**退化サイクル (degenerate cycle)** という．以上の準備のもとで，X の**サイクル複体 (cycle complex)** を以下の商複体として定める：

$$z^r(X, *) := \underline{z}^r(X, *)/\underline{z}^r(X, *)_{\mathrm{degn}}.$$

この複体の q 次ホモロジー群 $H_q(z^r(X,q))$ を X の余次元 r の q 次**高次チャウ群（higher Chow group）**と呼び，記号 $\mathrm{CH}^r(X,q)$ で表す．

高次チャウ群は様々なよい性質をもつ．本稿の内容と関係する性質を述べる：

定理 1.4. ([3, Theorem 2.1,4.1] を参照)

(1) (関手性) $X,Y \in \mathbf{Sm}_k$ とし，$f : X \to Y$ を k 上の任意のスキームの射とする．このとき，任意の $r,q \geq 0$ に対し，標準的なアーベル群の引き戻し写像

$$f^* : \mathrm{CH}^r(Y,q) \to \mathrm{CH}^r(X,q)$$

が存在する．

(2) (ホモトピー不変性) 任意の $X \in \mathbf{Sch}_k$ に対し，第 1 射影 $\mathrm{pr}_1 : X \times \mathbb{A}^1 \to X$ による引き戻しは，任意の $r,q \geq 0$ に対し以下のアーベル群の同型を引き起こす：

$$\mathrm{pr}_1^* : \mathrm{CH}^r(X,q) \cong \mathrm{CH}^r(X \times \mathbb{A}^1, q).$$

§2. モデュラス対

本節では [2] で導入されたモデュラス対と，モデュラス対の高次チャウ群の定義を紹介する．次節において我々はこの概念を一般化するので，区別するために [2] で導入されたモデュラス対を**有効モデュラス対**と呼ぶことにする．

定義 2.1. 体 k 上の**有効モデュラス対 (effective modulus pair)** とは，対 $\mathscr{X} = (X,D)$ で以下の性質をみたすものである：

(1) X は k 上の整スキームかつ $X \in \mathbf{Sch}_k$.

(2) D は X 上の有効カルティエ因子．

(3) X の開部分集合 $X^\circ = X - |D| \subset X$ に対し $X^\circ \in \mathbf{Sm}_k$.

有効モデュラス対 $\mathscr{X} = (X,D)$ に対し，D を $\mathscr{X}$ の**モデュラス**という．k 上の有効モデュラス対 (X,D) の圏 $\mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}}$ を以下で定義する：

(a) $\mathrm{Ob}(\mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}}) = k$ 上の有効モデュラス対全体

(b) 任意の $\mathscr{X} = (X,D), \mathscr{Y} = (Y,E) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}})$ に対し，

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}}}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) := \left\{ \begin{array}{l} k \text{ 上の射 } f : X^\circ \to Y^\circ \text{ でモデュラス条} \\ \text{件 } (\star) \text{ をみたすもの} \end{array} \right\}.$$

ここで，条件 $(\star)$ は以下で定義される：

(⋆) $\Gamma_f \subset X^\circ \times Y^\circ$ を f のグラフとし，$\overline{\Gamma}_f \subset X \times Y$ を Γ_f の $X \times Y$ における閉包とする．また，$\nu : \overline{\Gamma}_f^N \to \overline{\Gamma}_f$ を $\overline{\Gamma}_f$ の正規化とする．このとき，$\overline{\Gamma}_f^N$ 上のカルティエ因子の不等式

$$\nu^*(D \times Y) \leq \nu^*(X \times E)$$

が成り立つ．

任意の $(f,g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}}}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}}}(\mathscr{Y},\mathscr{Z})$ に対して，スキームの射としての合成 $g \circ f : X^\circ \to Z^\circ$ は再びモデュラス条件をみたすことが確かめられる（詳細は [7, Proposition 1.6], [13] を参照）．

注. 自然な関手 $\mathbf{Sm}_k \to \mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}}$ が対応 $X \mapsto (X, \emptyset)$ により定まる．ここで，$\emptyset$ は空集合を表す．

例 2.2. $f : X^\circ \to Y^\circ$ がスキームの射 $\overline{f} : X \to Y$ に延長されており，かつ X 上のカルティエ因子 $\overline{f}^*(E) - D$ が有効ならば，f はモデュラス条件をみたす．

モデュラス対 $\mathscr{X} \in \mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}}$ の高次チャウ群を定義する．

定義 2.3. 有効モデュラス対 $\mathscr{X} = (X,D) \in \mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}}$ と整数 $r, q \geq 0$ に対し，部分群

$$\underline{z}^r(\mathscr{X}, q) \subset \underline{z}^r(X^\circ, q)$$

を，サイクル $\sum_i n_i V_i \in \underline{z}^r(X^\circ, q)$ であって，各既約成分 $V = V_i \subset X^\circ \times \mathbb{A}^q$ が以下のモデュラス条件 (⋆⋆) をみたすものからなる部分群として定義する．

(⋆⋆) 射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathrm{Proj}(k[T_0, T_1])$ を考え，$\mathbb{A}^1$ を開部分スキーム $\{T_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^1$ と同一視する．この同一視から誘導される開うめこみ $X^\circ \times \mathbb{A}^q \hookrightarrow X \times (\mathbb{P}^1)^q$ によって V を $X \times (\mathbb{P}^1)^q$ の局所閉部分集合とみなす．$\overline{V} \subset X \times (\mathbb{P}^1)^q$ を V の閉包とし，$\nu_V : \overline{V}^N \to \overline{V}$ を $\overline{V}$ の正規化とする．このとき，$\overline{V}^N$ 上のカルティエ因子の不等式

$$\nu_V^*(D \times (\mathbb{P}^1)^q) \leq \nu_V^*(X \times F_q)$$

が成り立つ．ただし，$F_q = \sum_{i=1}^q (\mathbb{P}^1)^{i-1} \times \{\infty\} \times (\mathbb{P}^1)^{q-i}$ $(\{\infty\} = \{T_0 = 0\} \subset \mathbb{P}^1)$ とおく．

このとき，引き戻し写像 $\delta_i^{\epsilon *} : \underline{z}^r(X^\circ, q) \to \underline{z}^r(X^\circ, q-1)$ は部分群の間の射 $\delta_i^{\epsilon *} : \underline{z}^r(\mathscr{X}, q) \to \underline{z}^r(\mathscr{X}, q-1)$ を誘導することが確かめられる（下の注を参照）．よって部分複体 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, *) \subset \underline{z}^r(X^\circ, *)$ を得る．$\delta_i^{\epsilon *}$ と同じことが p_i^* についても言える．よって，定義 1.3 と全く同じ手続きにより退化サイクルの部分複体 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, *)_{\mathrm{degn}} \subset \underline{z}^r(\mathscr{X}, *)$ および商複体 $z^r(\mathscr{X}, *) = \underline{z}^r(\mathscr{X}, *)/\underline{z}^r(\mathscr{X}, *)_{\mathrm{degn}}$ を得る．そこで，有効モデュラス対 $\mathscr{X}$ の余次元 r の q 次**高次チャウ群**を

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) := H_q(z^r(\mathscr{X}, *))$$

と定義する．

注． 有効モデュラス対 $\mathscr{X}=(X,D)$ に対し，$D=\emptyset$ ならば，$\mathscr{X}$ の高次チャウ群はスキーム X の高次チャウ群と一致する．実際，$D=\emptyset$ ならばモデュラス条件 $(\star\star)$ に現れる不等式の左辺は 0，右辺は有効カルティエ因子であるから，この不等式は任意のサイクル $V\subset X\times\mathbb{A}^q$ に対して成立している．

注． $\delta_i^{\epsilon *}:\underline{z}^r(\mathscr{X},q)\to\underline{z}^r(\mathscr{X},q-1)$ が well-defined であることを示すためには，以下の事実を $Y=X\times(\mathbb{P}^1)^q, E=X\times F_q-D\times(\mathbb{P}^1)^q$ および既約なサイクル $V\in\underline{z}^r(\mathscr{X},q)$ と $W=\delta_i^{\epsilon *}(V)$ に対して適用すれば良い（[11, Lemma 2.2], [2, Lemma 2.1], [13]）：

(包含補題) $Y\in\mathbf{Sch}_k$ と Y 上の（有効とは限らない）カルティエ因子 E に対し，$Y^\circ:=Y-|E|$ とおく（$|E|$ は E の台を表す）．$V\subset Y^\circ$ を既約閉部分集合とし，$\overline{V}\subset Y$ を閉包，$\overline{V}^N\to\overline{V}$ を正規化とする．さらに，$\overline{V}^N$ 上への E の引き戻し $E|_{\overline{V}^N}$ が有効であると仮定する．このとき，任意の既約閉部分集合 $W\subset V$ に対し，$\overline{W}\subset Y$ を閉包，$\overline{W}^N\to\overline{W}$ を正規化とすると，$\overline{W}^N$ 上への E の引き戻し $E|_{\overline{W}^N}$ も有効である．

有効モデュラス対の高次チャウ群は，モデュラス条件をみたす平坦射に関して反変関手的である．

命題 2.4. モデュラス条件 $(\star)$ をみたす射 $f:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ が，スキームの射 $X^\circ\to Y^\circ$ として平坦であるとする．このとき，任意の $r,q\geq 0$ に対し，f によるサイクルの引き戻しによって誘導される標準的な射

$$f^*:z^r(\mathscr{Y},*)\to z^r(\mathscr{X},*)$$

および

$$f^*:\mathrm{CH}^r(\mathscr{Y},q)\to\mathrm{CH}^r(\mathscr{X},q)$$

が存在する．

Proof. [2, Lemma 2.7] または [13] をみよ． □

注． $\mathbf{MP}_k^{\mathrm{eff}}$ の任意の射 f に関する高次チャウ群の引き戻し写像 f^* が存在するかどうかは，今のところ不明である．しかしながら，[9] において，高次チャウ群を Nisnevich 位相とよばれる位相について適切に層化することにより，任意の f に関する反変関手性を実現できることが示されている．

§3. Cube 不変性

定理 1.4(2) で述べられたホモトピー不変性を，モデュラス対の高次チャウ群に対して一般化することがこの節の目標である．ホモトピー不変性の自然な一般化は次の形の主張であるべきである：

（主張）ある有効モデュラス対 $\mathscr{P}$ が存在して，任意の有効モデュラス対 $\mathscr{X}$ と，任意の $r, q \geq 0$ に対し，自然な同型

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \cong \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \mathscr{P}, q)$$

が存在する．

ここで，有効モデュラス対 $\mathscr{X} = (X, D), \mathscr{P} = (P, F)$ の積 $\mathscr{X} \times \mathscr{P}$ は次式で定義される：

$$\mathscr{X} \times \mathscr{P} := (X \times P, D \times P + X \times F).$$

しかしながら，有効モデュラス対の枠組みでは，この形の主張を示すことは不可能である．実際，$\mathscr{P}$ のモデュラス F が空集合でないならば，サイクル複体の間の自然な写像

$$\underline{z}^r(\mathscr{X}, q) \to \underline{z}^r(\mathscr{X} \times \mathscr{P}, q)$$

も存在しない．このことを $q = 0$ の場合に説明する．まず次の言い換えに注意する：

$$\begin{aligned}
\underline{z}^r(\mathscr{X}, 0) &= \mathbb{Z}\left\{\begin{array}{l}\text{余次元 } r \text{ の既約閉部分集合 } V \subset X^\circ \text{ であって, 閉包 } \overline{V} \subset X \\ \text{の正規化 } \overline{V}^N \text{ 上への } D \text{ の引き戻しが } \leq 0 \text{ となるもの}\end{array}\right\} \\
&= \mathbb{Z}\left\{\begin{array}{l}\text{余次元 } r \text{ の既約閉部分集合 } V \subset X^\circ \text{ であって,} \\ \text{閉包 } \overline{V} \subset X \text{ が } D \text{ の台と交わらないもの}\end{array}\right\} \\
&= \mathbb{Z}\left\{\begin{array}{l}\text{余次元 } r \text{ の既約閉部分集合 } V \subset X \text{ であって,} \\ D \text{ の台と交わらないもの}\end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

同様にして

$$\underline{z}^r(\mathscr{X} \times \mathscr{P}, 0) = \mathbb{Z}\left\{\begin{array}{l}\text{余次元 } r \text{ の既約閉部分集合 } V \subset X \times P \text{ であって,} \\ D \times P + X \times F \text{ の台と交わらないもの}\end{array}\right\}.$$

このとき，第 1 射影 $p : X \times P \to X$ によるサイクルの引き戻し $p^*(V) = V \times P$ がアーベル群の写像 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, 0) \to \underline{z}^r(\mathscr{X} \times \mathscr{P}, 0)$ を誘導するかどうかを考えると，$|V| = \emptyset$ でないかぎり，$|p^*(V)| = |V| \times P$ は $|X \times F| \subset |D \times P + X \times F|$ と常に交わってしまうので，これは不可能である．同様の現象が $q > 0$ の場合にも発生する．したがって，$F \neq \emptyset$ の場合には自然な引き戻し写像を定義できない．

一方，$F = \emptyset$ を仮定する．この場合は，$X \times P \to X$ によるサイクルの引き戻しが自然な写像 $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \to \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times P, q)$ を誘導することが確かめられる．もし $D = \emptyset$ ならば，この写像はスキームの高次チャウ群の引き戻し写像 $\mathrm{CH}^r(X, q) \to \mathrm{CH}^r(X \times P, q)$ と一致する．これが任意の X に対し同型であるような P の候補として我々が知っているのは $P = \mathbb{A}^1$（あるいはその有限個の積）のみである．しかしながら，有効モデュラス対の高次チャウ群は，一般にはホモトピー不変性を満たさないことが知られているので，$F = \emptyset$ の場合にも同型を得ることが出来ない．

そこで，我々はより一般的なモデュラス対を以下のように定義する．

定義 3.1. 体 k 上の**モデュラス対 (modulus pair)** とは，対 $\mathscr{X} = (X, D)$ で以下の性質をみたすものである：

(1) X は k 上の整スキームかつ $X \in \mathbf{Sch}_k$.

(2) D は X 上のカルティエ因子.

(3) X の開部分集合 $X^\circ = X - |D| \subset X$ に対し，$X^\circ \in \mathbf{Sm}_k$.

モデュラス対 $\mathscr{X} = (X, D)$ に対し，D を $\mathscr{X}$ の**モデュラス**という．k 上のモデュラス対の圏 $\mathbf{MP}_k$ は，k 上のモデュラス対全体を対象とし，対象の間の射は有効モデュラス対の間の射と字義通りに同じ形で定義する（前節のすべての定義は，カルティエ因子が有効でなくても意味を持っていることに注意）．モデュラス対 $\mathscr{X} \in \mathbf{MP}_k$ に対し，複体 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, *), \underline{z}^r(\mathscr{X}, *)_{\mathrm{degn}}, z^r(\mathscr{X}, *)$ および高次チャウ群 $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, *)$ も有効モデュラス対の場合と字義通りに同じ形で定義する．モデュラス対の積 $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ も有効モデュラス対の積と同じ式で定義する．

上記のように定義を一般化することの大きな利点の一つは，次の **minus cube** を扱えることである：任意の自然数 $n \geq 1$ に対し，

$$\overline{\square}^{(-n)} := (\mathbb{P}^1, -n \cdot \{\infty\}).$$

任意のモデュラス対 $\mathscr{X} = (X, D)$ に対して，第一射影

$$\mathrm{pr}_1 : \mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-n)} \to \mathscr{X}$$

はモデュラス条件 $(\star)$ をみたすことに注意する．これにより，サイクルの引き戻し写像

$$\mathrm{pr}_1^* : \mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \to \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-n)}, q)$$

が任意の $r, q \geq 0, n \geq 1$ に対して定義される．ひとつ目の主結果は次の定理である：

定理 3.2. **(Cube 不変性)** 任意のモデュラス対 $\mathscr{X} \in \mathbf{MP}_k$ と任意の整数 $r, q \geq 0$ に対し，第一射影による引き戻し写像

$$\mathrm{pr}_1^* : \mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \to \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, q)$$

はアーベル群の同型である．

注. モデュラス対が $\mathscr{X} = (X, \emptyset)$ の形のとき，定理 3.2 の主張は定理 1.4 (2) の主張と一致する．実際，定義 2.3 の直後の注により $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) = \mathrm{CH}^r(X, q)$ であり，注と同様の議論により $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, q) = \mathrm{CH}^r(X \times \mathbb{A}^1, q)$ も確かめられる．

定理 3.2 の証明には，以下に述べる命題 3.4 および定理 3.5 を用いる．主張を述べる前に，ひとつ定義をおく．

定義 3.3. $\mathscr{X} = (X, D) \in \mathbf{MP}_k$ をモデュラス対とし，w を $X^\circ = X - |D|$ の閉部分集合からなる有限集合とする．このとき，整数 $r, q \geq 0$ に対し，$\underline{z}^r(\mathscr{X}, q)$ の部分アーベル群

$$\underline{z}^r_w(\mathscr{X}, q) \subset \underline{z}^r(\mathscr{X}, q)$$

を以下のように定義する：

$$\underline{z}^r_w(\mathscr{X}, q) := \mathbb{Z}\left\{\begin{array}{l}\text{既約閉部分集合}\, V \subset X^\circ \times \mathbb{A}^q \,\text{であって，}\, V \in \underline{z}^r(\mathscr{X}, q) \\ \text{をみたし，かつ，任意の}\, W \in w \,\text{と任意の face}\, F \subset \mathbb{A}^q \\ \text{に対し，}\, V \,\text{は}\, W \times F \,\text{と正しく交わるもの}\end{array}\right\}.$$

この部分群の族 $\underline{z}^r_w(\mathscr{X}, *)$ は自然に $\underline{z}^r(\mathscr{X}, *)$ の部分複体の構造を持つ．また，

$$p_i^* : \underline{z}^r_w(\mathscr{X}, q-1) \to \underline{z}^r_w(\mathscr{X}, q)$$

も自然に誘導されるので，$\oplus_{i=1}^q p_i^*$ による像を $\underline{z}^r_w(\mathscr{X}, q)_{\mathrm{degn}}$ と書くことにすれば部分複体 $\underline{z}^r_w(\mathscr{X}, *)_{\mathrm{degn}} \subset \underline{z}^r_w(\mathscr{X}, *)$ を得る．商複体を

$$z^r_w(\mathscr{X}, *) := \underline{z}^r_w(\mathscr{X}, q)/\underline{z}^r_w(\mathscr{X}, q)_{\mathrm{degn}}$$

と書く．包含写像 $\underline{z}^r_w(\mathscr{X}, *) \subset \underline{z}^r(\mathscr{X}, *)$ は自然な写像 $z^r_w(\mathscr{X}, *) \to z^r(\mathscr{X}, *)$ を誘導することが容易にわかる．

命題 3.4. **(rigidity lemma)** $\mathscr{X} \in \mathbf{MP}_k$ を任意のモデュラス対とし，

$$w = \{\, X^\circ \times \{0, 1\}\,\}$$

とおく．このとき，$\epsilon \in \{0, 1\}$ に対して，閉うめこみ $i_\epsilon : X^\circ \cong X^\circ \times \{\epsilon\} \hookrightarrow X^\circ \times \mathbb{A}^1$ による well-defined な 2 つの引き戻し写像

$$i_0^*, i_1^* : z^r_w(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *) \to z^r(\mathscr{X}, *)$$

はホモトピックである．とくに，ホモロジー群の間に誘導される写像は等しい．

Proof. 任意の $q \geq 0$ に対し，自然な写像

$$\Phi_q : z^r_w(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, q) \to z^r(\mathscr{X}, q+1)$$

が恒等射 $\mathrm{id} : X^\circ \times \mathbb{A}^{q+1} \cong (X^\circ \times \mathbb{A}^1) \times \mathbb{A}^q$ による引戻しで得られる（モデュラス条件のチェックは読者の演習問題とする）．これが i_0^* と i_1^* の間のホモトピーを与える． □

定理 3.5. **(moving lemma)** $\mathscr{X}$ をモデュラス対とし，$\mathscr{P}$ を

$$\mathscr{P} = \prod_{i=1}^N \overline{\square}^{(-n_i)} \quad (n_i \geq 1)$$

の形のモデュラス対とする．また，w を $\{ X^\circ \times (\mathbb{A}^{n_i}$ の faces の積$) \subset X^\circ \times \prod_i \mathbb{A}^{n_i} \}$ の部分集合とする．このとき，任意の自然数 $n \geq 1$ に対し，自然な写像

$$z^r_w(\mathscr{X} \times \mathscr{P}, *) \to z^r(\mathscr{X} \times \mathscr{P}, *)$$

は複体の擬同型である．

証明の概略． この定理は cube-不変性の証明の中核であり非常に重要だが，厳密な証明はやや複雑であるため，詳細は [13] に譲り，ここでは核となるアイデアのみを述べる．簡単のため $N = 1, w = \{ X^\circ \times \{0,1\} \}$ とする．証明は大きく 2 つのステップに分けられる：

(1) サイクル $V \in z^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, q)$ を，任意の $W \in w, F \subset \mathbb{A}^q$ に対して $W \times F$ と正しく交わる $(X^\circ \times \mathbb{A}^1) \times \mathbb{A}^q$ 上のサイクル V' に動かすホモトピーサイクル $\mathcal{H}(V)$ を $(X^\circ \times \mathbb{A}^1) \times \mathbb{A}^q \times \mathbb{A}^1_K$（$K$ は k の適切な超越拡大を表し，$\mathbb{A}^1_K := \mathbb{A}^1 \otimes_k K$）上に構成する．ここで，最後の $\mathbb{A}^1$ は，サイクルを動かす “時間軸” を表す．

(2) (1) で構成したホモトピーサイクル $\mathcal{H}(V)$ がモデュラス条件をみたすように “調整” する．すなわち，(1) で述べた条件を保存したまま異なるサイクル $\mathcal{H}'$ を構成し，かつ，$\mathcal{H}'$ が次のモデュラス条件をみたすようにする：

(∗) $\overline{\mathcal{H}'} \subset (X \times \mathbb{P}^1) \times (\mathbb{P}^1)^{q+1}$ を閉包とし，$\overline{\mathcal{H}'}^N \to \overline{\mathcal{H}}$ を正規化とする．このとき，$\overline{\mathcal{H}'}^N$ 上のカルティエ因子の不等式

$$(D \times \mathbb{P}^1 - n \cdot X \times \{\infty\}) \times (\mathbb{P}^1)^{q+1}|_{\overline{\mathcal{H}'}^N} \leq X \times \mathbb{P}^1 \times F_{q+1}|_{\overline{\mathcal{H}'}^N}$$

が成り立つ．

(1) の構成は，[3] のものと全く同様であり，感覚的に述べれば次のような操作をしている．簡単のために $q = 0$ の場合を考え，サイクル V は $X^\circ \times \mathbb{A}^1$ の既約閉部分集合であるとする．もしも V がある閉部分集合 $X^\circ \times \{0,1\}$ と正しく交わっていないとしても，V を $\mathbb{A}^1$ に沿って適切に “平行移動” することにより，正しく交わらせることができるであろう．ここで，サイクルをどの程度移動させればよいかはサイクルごとに異なることに注意する．たとえば，$V = X^\circ \times \{-1\}$ というサイクルを $\mathbb{A}^1$ に沿って $+1$ 平行移動させると，$X^\circ \times \{0\}$ と正しく交わらなくなってしまう．しかし，このような「まずい」平行移動の数は少ないので，“一般的な平行移動” を考えることでこの問題を回避できる．(1) で現れる超越拡大 K/k は, この「一般的」という条件を実現する上で必要になる．これがステップ (1) の概要である．

次に (2) について述べる．(1) で述べた $\mathbb{A}^1$ に沿った平行移動が，$X \times \mathbb{P}^1$ 上の因子 $D \times \mathbb{P}^1 - X \times \{\infty\}$ および $(\mathbb{P}^1)^q$ 上の因子 F_q を動かさないことから，$\mathcal{H} := \mathcal{H}(V)$ は次の条件をみたすことがわかる：

(∗∗) $\overline{\mathcal{H}} \subset (X \times \mathbb{P}^1) \times (\mathbb{P}^1)^q \times \mathbb{P}^1$ を閉包とし，$\overline{\mathcal{H}}^N \to \overline{\mathcal{H}}$ を正規化とする．さらに，$\overline{\mathcal{H}}^\circ := \overline{\mathcal{H}} \cap (X \times \mathbb{P}^1) \times (\mathbb{P}^1)^q \times \mathbb{A}^1$ とおき，$\overline{\mathcal{H}}^{\circ N} \to \overline{\mathcal{H}}^\circ$ を正規化とする．このとき，$\overline{\mathcal{H}}^{\circ N}$ 上のカルティエ因子の不等式

$$(D \times \mathbb{P}^1 - n \cdot X \times \{\infty\}) \times (\mathbb{P}^1)^q \times \mathbb{A}^1|_{\overline{\mathcal{H}}^{\circ N}} \leq X \times \mathbb{P}^1 \times F_q \times \mathbb{A}^1|_{\overline{\mathcal{H}}^{\circ N}}$$

が成り立つ．

このことから，自然数 d を十分に大きくとれば，次の不等式が成立する：

$$(D \times \mathbb{P}^1 - n \cdot X \times \{\infty\}) \times (\mathbb{P}^1)^{q+1}|_{\overline{\mathcal{H}}^N} \leq X \times \mathbb{P}^1 \times F_q \times \mathbb{P}^1 + d \cdot X \times \mathbb{P}^1 \times (\mathbb{P}^1)^q \times \{\infty\}|_{\overline{\mathcal{H}}^N}$$

右辺に出現する因子 $d \cdot X \times \mathbb{P}^1 \times (\mathbb{P}^1)^q \times \{\infty\}$ の係数 d を 1 にすることができればよい．そのためには，d 乗写像を考える：

$$\rho^d : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, [T_0 : T_1] \mapsto [T_0^d : T_1^d].$$

$(\rho^d)^*\{\infty\} = d \cdot \{\infty\}$ に注意する．$\mathrm{id}_{X \times \mathbb{P}^1 \times (\mathbb{P}^1)^q} \times \rho^d$ によるサイクルの押し出し

$$\overline{\mathcal{H}}^d := (\mathrm{id}_{X \times \mathbb{P}^1 \times (\mathbb{P}^1)^q} \times \rho^d)_* \overline{\mathcal{H}}$$

を考えれば，正規化上の自然な有限全射 $\overline{\mathcal{H}}^N \to \overline{\mathcal{H}}^{dN}$ が誘導される．[11, Lemma 2.2] を適用すれば，$\overline{\mathcal{H}}^{dN}$ 上のカルティエ因子の不等式

$$\begin{aligned}
&(D \times \mathbb{P}^1 - n \cdot X \times \{\infty\}) \times (\mathbb{P}^1)^{q+1}|_{\overline{\mathcal{H}}^{dN}} \\
&\leq X \times \mathbb{P}^1 \times F_q \times \mathbb{P}^1 + 1 \cdot X \times \mathbb{P}^1 \times (\mathbb{P}^1)^q \times \{\infty\}|_{\overline{\mathcal{H}}^{dN}} \\
&= X \times \mathbb{P}^1 \times F_{q+1}|_{\overline{\mathcal{H}}^{dN}}
\end{aligned}$$

が成立することがわかる．そこで，$\mathcal{H}^d := \overline{\mathcal{H}}^d \cap (X^\circ \times \mathbb{A}^1) \times \mathbb{A}^{q+1}$ とおく．この押し出しによって (1) で保証した「正しく交わる」という性質は保たれることが確かめられる．ただし，平行移動の時刻をパラメタづけする $\mathbb{A}^1$ に沿って d 乗写像で押し出したことにより，$\mathcal{H}^d$ の時刻 0 での切断は，最初にとったサイクル V の d 倍になっている．したがって，正しいホモトピー $\mathcal{H}'$ は

$$\mathcal{H}' := \mathcal{H}^{d+1} - \mathcal{H}^d$$

で与えられる．以上がステップ 2 の概要である． □

定理 3.2 の証明． 以下の証明は [3, Corollary 2.6] と同様である．命題 3.4 と定理 3.5 を認めて定理 3.2 を証明する．合成写像

$$z^r(\mathscr{X}, *) \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*} z_w^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *) \xrightarrow{i_0^*} z^r(\mathscr{X}, *)$$

が identity であることと，定理 3.5 より

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, q) = H_q(z^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *)) \cong H_q(z_w^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *))$$

であることより，pr_1^* がホモロジー群の間に誘導する写像は単射である．次に，全射性を示す．スキームの射 $\mu : \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1, (s,t) \mapsto st$ を考える．μ は平坦射であり，またモデュラス条件 $(\star)$ をみたす射 $\mu : \overline{\square}^{(-1)} \times \overline{\square}^{(-1)} \to \overline{\square}^{(-1)}$ を定める（この事実については [13] および [7, Lemma 6.1] を参照）．よって引き戻し写像

$$\mu^* : z^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *) \to z^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)} \times \overline{\square}^{(-1)}, *)$$

が定まる．定理 3.5 と合わせれば，写像

$$\begin{aligned} H_q(z^r_w(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *)) &\cong \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, q) \\ &\overset{\mu^*}{\to} \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)} \times \overline{\square}^{(-1)}, q) \\ &\cong H_q(z^r_{w'}(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)} \times \overline{\square}^{(-1)}, *)) \\ &\overset{i'^*_\epsilon}{\to} \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, q) \end{aligned}$$

を得る．ここで $w' := \{\, X^\circ \times \mathbb{A}^1 \times \{0,1\} \,\}$, $\epsilon \in \{0,1\}$, $i'_\epsilon : X^\circ \times \mathbb{A}^1 \cong X^\circ \times \mathbb{A}^1 \times \{\epsilon\} \hookrightarrow X^\circ \times \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$. このとき，$i'^*_1 \mu^* = \mathrm{id}$ であり，任意のサイクル $Z \in z^r_w(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, q)$ に対して $i'^*_0 \mu^* Z = \mathrm{pr}_1^* i^* Z$ が確かめられる．命題 3.4 より，ホモロジー群において

$$Z = i'^*_1 \mu^* Z = i'^*_0 \mu^* Z = \mathrm{pr}_1^* i^* Z$$

が成り立つので，全射性が示された． □

§ 4. 正標数の体上のモデュラス対への応用

本節では，前節までに展開した cube 不変性の理論の応用について述べる．以下では，標数が正の体 k を考える．k の標数を $p > 0$ とおく．目標は次の定理である．

定理 4.1. 体 k 上のスキーム $X \in \mathbf{Sch}_k$ と X 上の 2 つの有効カルティエ因子 D, D' に対し，$|D| = |D'|$ と仮定し，$\mathscr{X} = (X, D)$, $\mathscr{X}' = (X, D')$ とおく．このとき，任意の非負整数 r, q に対し標準的な同型

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \cong \mathrm{CH}^r(\mathscr{X}', q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$$

が存在する．

この定理により，有効モデュラス対の高次チャウ群は，p 準素ねじれ部分群の情報を除けばモデュラスの重複度に依存しないことがわかる．この定理の主張は，X が k 上固有かつ $r = \dim(X), q = 0$ の場合に [1, Corollary 2.22] において示されている．定理 4.1 の証明の鍵は次の定理である．

定理 4.2. k 上の任意のモデュラス対 $\mathscr{X} \in \mathbf{MP}_k$ に対し, 自然な射影 $\mathscr{X} \times \mathbb{A}^1 \to \mathscr{X}$ による引き戻し写像

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \to \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \mathbb{A}^1, q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$$

は同型である.

Proof. まず次の補題を示す.

補題 4.3. $\mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \mathbb{A}^1, q) \cong \mathrm{colim}_{n\geq 1}\mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-n)}, q)$

Proof. 定義から，自然な複体の包含

$$\underline{z}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-n)}, *) \subset \underline{z}^r(\mathscr{X} \times \mathbb{A}^1, *)$$

が存在する．任意の $V \in \underline{z}^r(\mathscr{X} \times \mathbb{A}^1, q)$ に対して，ある自然数 $n \geq 1$ が存在し，次が成り立つ：

$\overline{V} \subset (X \times \mathbb{P}^1) \times (\mathbb{P}^1)^q$ を閉包とし，$\overline{V}^N \to \overline{V}$ を正規化とする．このとき，$\overline{V}^N$ 上のカルティィエ因子の不等式

$$(D \times \mathbb{P}^1) \times (\mathbb{P}^1)^q \leq (X \times \mathbb{P}^1) \times F_q + n \cdot (X \times \{\infty\}) \times (\mathbb{P}^1)^q$$

が成り立つ.

このことは $V \in \underline{z}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-n)}, q)$ を意味する. □

補題 4.3 より，定理 4.2 を示すためには，任意の $n = p^m$ $(m \geq 0)$ に対し，

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \to \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-p^m)}, q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p].$$

が同型であることを示せば十分である．この同型は，前節の定理 3.5 と次の命題 4.4 を用いれば，cube 不変性 3.2 の証明と全く同様にして証明できる.

命題 4.4. **(higher rigidity lemma)** $\mathscr{X} \in \mathbf{MP}_k$ を任意のモデュラス対とし，

$$w = \{\, X^\circ \times \{0, 1\} \,\}$$

とおく．このとき, 任意の $m \geq 0$ に対して, 閉うめこみ $i_\epsilon : X^\circ \cong X^\circ \times \{\epsilon\} \hookrightarrow X^\circ \times \mathbb{A}^1$ $(\epsilon \in \{0, 1\})$ による well-defined な 2 つの引き戻し写像

$$i_0^*, i_1^* : z_w^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-p^m)}, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \to z^r(\mathscr{X}, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$$

がホモロジー群の間に誘導する写像は等しい.

Proof. $\epsilon \in \{0,1\}$ に対し，合成写像

$$\alpha_\epsilon : z_w^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-p^m)}, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \xrightarrow{(\mathrm{id}_X \times \rho^{p^m})_*} z_w^r(\mathscr{X} \times \overline{\square}^{(-1)}, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \xrightarrow{i_\epsilon^*} z^r(\mathscr{X}, *) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$$

を考える．命題 3.4 より，α_0, α_1 はホモロジー群の間に同じ写像を誘導する．よって，次の等式を示せば十分である：

$$\alpha_0 = p^m \cdot i_0^*$$
$$\alpha_1 = p^m \cdot i_1^*.$$

これら 2 つの等式は，サイクルの交叉積に関する射影公式と，k 上の多項式の計算

$$t^{p^m} - 0 = (t-0)^{p^m}$$
$$t^{p^m} - 1 = (t-1)^{p^m}$$

から確かめることができる（詳細については [13] をみよ）．1 つ目の等式は自明であり，2 つ目の等式は k の標数が p であることから従う． □

以上で定理 4.2 の証明が完了した． □

定理 4.1 は，以下で述べるより強い主張から従う．主張を述べるために少し準備をする．

定義 4.5. 任意のモデュラス対 $\mathscr{X} = (X, D)$ と整数 $r, q \geq 0$ に対し，自由アーベル群 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, q)'$ を以下で定義する：

$$\underline{z}^r(\mathscr{X}, q)' = \mathbb{Z}\left\{ \begin{array}{l} \text{余次元 } r \text{ の既約閉部分集合 } V \subset X^\circ \times \mathbb{A}^q \text{ であっ} \\ \text{て，次のモデュラス条件 } (\star\star)' \text{ をみたすもの} \end{array} \right\}$$

$(\star\star)'$ $\overline{V} \subset X \times \mathbb{A}^q$ を閉包とし，$\overline{V}^N \to \overline{V}$ を正規化とする．このとき，$\overline{V}^N$ 上のカルティエ因子の不等式

$$D \times \mathbb{A}^q|_{\overline{V}^N} \leq 0$$

が成り立つ．

これによりアーベル群の複体 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, *)', \underline{z}^r(\mathscr{X}, *)'_{\mathrm{degn}}, z^r(\mathscr{X}, *)'$ が定義 2.3 と同様の手続きで定まる．$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q)' := H_q(z^r(\mathscr{X}, *)')$ とおく．

注. モデュラス D が有効ならば，モデュラス条件 $(\star\star)'$ は，閉包 $\overline{V}$ が $|D| \times \mathbb{A}^1$ と交わらない（すなわち，$\overline{V} = V$）という条件と同値である．とくに，条件は D の台のみに依存するので，$|D| = |D'|$ を満たす任意の有効カルティエ因子 D' に対して $\mathscr{X}' = (X, D')$ とおけば等式

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q)' = \mathrm{CH}^r(\mathscr{X}', q)'$$

が成り立つ．

定理 4.6. k 上の任意のモデュラス対 $\mathscr{X}$ に対し，標準的な同型

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \cong \mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q)' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$$

が存在する．

注. 定義 4.5 の直後の注より，定理 4.1 は定理 4.6 からただちに従う．

定理 4.6 の証明の前に，次の事実に注意しよう．

補題 4.7. モデュラス対 $\mathscr{X}$ と整数 $r, q \geq 0$ に対し，部分群 $\underline{z}^r(\mathscr{X}, q)_0 \subset \underline{z}^r(\mathscr{X}, q)$ を次で定義する：

$$\underline{z}^r(\mathscr{X}, q)_0 := \bigcap_{i=1}^{q} \mathrm{Ker}(\delta_i^{0*}).$$

ここで，δ_i^ϵ の定義については定義 1.3, 2.3 をみよ．このとき，$\underline{z}^r(\mathscr{X}, *)_*$ は $\underline{z}^r(\mathscr{X}, *)$ の部分複体をなし，合成写像

$$\underline{z}^r(\mathscr{X}, *)_0 \hookrightarrow \underline{z}^r(\mathscr{X}, *) \to z^r(\mathscr{X}, *)$$

は複体の同型である．ここで，2 つ目の写像は自然な商写像である．とくに，任意の $q \geq 0$ に対し，次のアーベル群の同型を得る：

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, q) \cong H_q(\underline{z}^r(\mathscr{X}, *)_0).$$

Proof. この事実は，アーベル圏に値を持つ cubical 対象に対し一般に成立する．証明は [10, Lemma 1.2] をみよ． □

Proof. アーベル群の 2 重複体 $\mathscr{Z}(*, *)$ を以下で定義する．

$$\mathscr{Z}(a,b) := \mathbb{Z}\left\{\begin{array}{l}\text{余次元 } r \text{ の既約閉部分集合 } V \subset X^\circ \times \mathbb{A}^a \times \mathbb{A}^b \\ \text{で，任意の face } F \subset \mathbb{A}^a \times \mathbb{A}^b \cong \mathbb{A}^{a+b} \text{ に対し} \\ X^\circ \times F \text{ と正しく交わり，かつ，つぎの条件} \\ (\star\star\star) \text{ をみたすもの}\end{array}\right\} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$$

$(\star\star\star)$ $\overline{V} \subset X \times (\mathbb{P}^1)^a \times \mathbb{A}^b$ を閉包とし，$\overline{V}^N \to \overline{V}$ を正規化とする．このとき，$\overline{V}^N$ 上のカルティエ因子の不等式

$$D \times (\mathbb{P}^1)^a \times \mathbb{A}^b|_{\overline{V}^N} \leq X \times F_a \times \mathbb{A}^b|_{\overline{V}^N}$$

が成立する．

微分写像 $d' : \mathcal{Z}(a,*) \to \mathcal{Z}(a-1,*), d'' : \mathcal{Z}(*,b) \to \mathcal{Z}(*,b-1)$ は余次元 1 の faces への制限写像の交代和として定義される．$\mathcal{Z}(*,*)$ の部分複体 $\mathcal{Z}(*,*)_l, \mathcal{Z}(*,*)_r \subset \mathcal{Z}(*,*)$ を以下で定義する：

$$\mathcal{Z}(a,b)_l := \mathcal{Z}(a,b) \cap \left\{ \begin{array}{l} X^\circ \times \mathbb{A}^a \times \mathbb{A}^b \text{ 上の余次元 } r \text{ の（}\mathbb{Z}[1/p] \text{ 係数）サ} \\ \text{イクルであって，余次元 1 の face } X^\circ \times \mathbb{A}^{j-1} \times \\ \{0\} \times \mathbb{A}^{a-j} \times \mathbb{A}^b \ (j \in \{1,\ldots,a\}) \text{ への制限が} \\ \text{任意の } j \text{ に対し 0 であるもの} \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{Z}(a,b)_r := \mathcal{Z}(a,b) \cap \left\{ \begin{array}{l} X^\circ \times \mathbb{A}^a \times \mathbb{A}^b \text{ 上の余次元 } r \text{ の（}\mathbb{Z}[1/p] \text{ 係数）} \\ \text{サイクルであって，余次元 1 の face } X^\circ \times \mathbb{A}^a \times \\ \mathbb{A}^{j-1} \times \{0\} \times \mathbb{A}^{b-j} \ (j \in \{1,\ldots,b\}) \text{ への制限} \\ \text{が任意の } j \text{ に対し 0 であるもの} \end{array} \right\}.$$

さらに $\mathcal{Z}(*,*)_0 := \mathcal{Z}(*,*)_l \cap \mathcal{Z}(*,*)_r$ とおく．2 重複体 $\mathcal{Z}(*,*)_0$ に付随する以下のスペクトル系列を考える：

$${}'E^2_{b,a} = {}''H_b({}'H_a(\mathcal{Z}(*,*)_0)) \Longrightarrow H_{a+b}(\mathrm{Tot}(\mathcal{Z}(*,*)_0)),$$

$${}''E^2_{a,b} = {}'H_a({}''H_b(\mathcal{Z}(*,*)_0)) \Longrightarrow H_{a+b}(\mathrm{Tot}(\mathcal{Z}(*,*)_0)).$$

ここで，${}'H, {}''H$ はそれぞれ d', d'' に関するホモロジー群を表し，Tot は 2 重複体を付随する全複体にうつす関手を表す．我々の目標は次の補題である：

補題 4.8.

$${}'E^1_{b,a} = \begin{cases} 0 & (b>0) \\ \mathrm{CH}^r(\mathscr{X},a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] & (b=0), \end{cases}$$

$${}''E^1_{a,b} = \begin{cases} 0 & (a>0) \\ \mathrm{CH}^r(\mathscr{X},b)' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] & (a=0). \end{cases}$$

この補題を認めれば，スペクトル系列の退化により

$$\mathrm{CH}^r(\mathscr{X},n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \cong H_n(\mathrm{Tot}(\mathcal{Z}(*,*)_0)) \cong \mathrm{CH}^r(\mathscr{X},n)' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$$

となり証明が終わる．本稿では，補題 4.8 の前半の等式についてだけ証明を与える（こちらがより本質的な主張である）．後半の等式の証明は前半の証明と同様（本質的にはより簡単）なのでここでは割愛する（詳細については [13] を参照）．まず，任意の $b \geq 0$ に対して等式

$$\mathcal{Z}(*,b)_l = \underline{z}^r_w(\mathscr{X} \times \mathbb{A}^b, *)_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]$$

が成立することに注意する．ここで $w = \left\{ X^\circ \times Z \;\middle|\; Z \text{ は } \mathbb{A}^b \text{の任意の face} \right\}$．よって定理 3.5，補題 4.7，定理 4.2 より

$$\begin{aligned} {}'H_a(\mathcal{Z}(*,b)_l) &\cong H_a(\underline{z}^r(\mathscr{X} \times \mathbb{A}^b, *)_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p]) \\ &= \mathrm{CH}^r(\mathscr{X} \times \mathbb{A}^b, a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \\ &\cong \mathrm{CH}^r(\mathscr{X}, a) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[1/p] \\ &= {}'H_a(\mathcal{Z}(*,0)_l). \end{aligned}$$

この合成写像は $X^\circ \times \{(0,\ldots,0)\} \hookrightarrow X^\circ \times \mathbb{A}^b$ によるサイクルの引き戻しであることに注意する．したがって，$b > 0$ ならば，写像 ${}'H_a(\mathcal{Z}(*,b)_0) \to {}'H_a(\mathcal{Z}(*,b)_l)$ と合成すると 0 写像である．ところが包含写像 $\mathcal{Z}(*,b)_0 \hookrightarrow \mathcal{Z}(*,b)_l$ は分裂的単射であることが具体的にレトラクションを構成することで確かめられる（詳細は [13] を参照）．したがって ${}'H_a(\mathcal{Z}(*,b)_0) \to {}'H_a(\mathcal{Z}(*,b)_l)$ は単射であり，したがって ${}'H_a(\mathcal{Z}(*,b)_0) = 0$ を得る．$b = 0$ の場合の主張は定義そのものである．以上で証明が完了した． □

Acknowledgements

本稿は筆者の博士課程における研究に基づいています．研究上の困難な時にあって常に温かい励ましと有益なアドバイスをくださった指導教員の齋藤秀司氏に感謝いたします．また, 日頃から活発な数学的議論を行ってくれた甲斐亘氏に感謝いたします．最後に，RIMS 講究録別冊への投稿の機会を与えてくださったプログラム委員の方々に深く感謝いたします．

References

[1] Binda, F., Cao, J., Kai, W. and Sugiyama, R. : *Torsion and divisibility for reciprocity sheaves and 0-cycles with modulus*, J. Algebra **469**, 437-463 (2017).

[2] Binda, F. and Saito, S. : *Relative cycles with moduli and regulator maps*, J. Inst. Math. Jussieu, 1-61 (2017).

[3] Bloch, S. : *Algebraic Cycles and Higher K-theory*, Advances in Mathematics **61**, Issue 3, 267-304 (1986).

[4] Bloch, S. : *Some notes on elementary properties of higher chow groups, including functoriality properties and cubical chow groups*, available at the homepage of S. Bloch `http://www.math.uchicago.edu/~bloch/publications.html`.

[5] Bloch, S. and Esnault, H. : *An additive version of higher Chow groups*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 36, 463-477 (2003).

[6] Hartshorne, R. : *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math., Springer **52** (1977).

[7] Kahn, B. Saito, S. and Yamazaki, T. : *Reciprocity sheaves*, Compos. Math. **152**, 1851-1898 (2016).

[8] Kahn, B. Saito, S. and Yamazaki, T. : *Motives of modulus*, arXiv preprint `http://arxiv.org/abs/1511.07124` (2015).

[9] Kai, W. : *A moving lemma for algebraic cycles with modulus and contravariance*, arXiv preprint `http://arxiv.org/abs/1507.07619` (2016).

[10] Krishna, A. and Levine, M. : *Additive higher Chow groups of schemes*, J. Reine Angew. Math. **619**, 75-140 (2008).
[11] Krishna, A. and Park, J. : *Moving lemma for additive higher Chow groups*, Algebra and Number theory, **6**(2), 293-326 (2012).
[12] Mazza, C. Voevodsky, V. and Weibel, C. : *Lecture Notes on Motivic Cohomology.* Clay Mathematical Monographs, **2** (2006).
[13] Miyazaki, H. : *Cube invariance of higher Chow groups with modulus*, to appear J. Algebraic Geom.
[14] Serre, J.-P. : *Groupes algébriques et corps de classes*, Publications de L'Institut de Mathématique de L'Universite de Nancago, **7** (1959).