RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B72 (2018), 161–180

休眠 GL_n 乍の通常性について：研究報告 (On the ordinariness of dormant GL_n-opers : a research announcement)

By

若林 泰央 (Yasuhiro Wakabayashi)*

Abstract

This article includes a brief explanation of the ordinariness of dormant GL_n-opers and a research announcement for results in the papers titled “Abelian étale coverings of generic curves and ordinariness of dormant opers" (cf. [28]) and “The symplectic nature of the space of dormant indigenous bundles on algebraic curves" (cf. [26]) . In this article, we first recall the notion of a (dormant) GL_n-oper on a proper smooth curve and give some examples of dormant GL_n-opers arising from certain objects in characteristic p geometry (including Tango structures). Then, we give the definition of the ordinariness of dormant GL_n-opers and propose two related assertions; the first assertion concerns the relationship between the ordinariness of dormant GL_n-opers and Galois coverings of the underlying curves; the second assertion concerns the symplectic structure on the moduli stack classifying ordinary dormant GL_2-opers.

§1. 序

本稿では, 休眠 GL_n 乍において定義される「通常性」なる概念について触れ, この通常性に関連するものとして, 拙論文 [26] 及び [28] で得られた結果を紹介することを目的としている. 「代数的整数論とその周辺 2014」報告集に寄稿させていただいた拙文「点付き安定曲線上の休眠乍の数え上げ：研究報告」(cf. [30]) では, 休眠乍やその諸性質を可

Received June 10, 2016. Revised October 20, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 14H10, 14H60
Key Words: *projective structure, indigenous bundle, oper, dormant oper, p-adic Teichmüller theory, p-curvature.*
Supported by the FMSP program at the Graduate School of Mathematical Sciences of the University of Tokyo.
*Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, 2-12-1 Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan.
e-mail: wkbysh@math.titech.ac.jp

能な限り一般的な状況で紹介することを試みた. 一方, 本稿では (いくつか内容は重複しているが) それに続くものとして, より制限された状況のもとで具体的かつ特定のテーマを扱っている.

研究報告 [30] と同様に, この和文記事において「乍(さ)」と呼んでいるものは, A. Beilinson-V. Drinfeld （cf. [3], Definition 3.1.3）により “oper"との呼び名で導入された代数曲線上の然るべき可積分主束のことである. その最も基本的かつ重要な例として, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上で定義された代数曲線 X 上の $\mathfrak{sl}_2$ 乍, もしくは同値な概念として, X 上の GL_2 乍の $\mathbb{G}_m$ 同値類 (ただし, $\mathbb{G}_m$ 同値とは本稿 §3.1, 定義 3.1 において定義される然るべき同値関係である) を挙げることができる. これらは X に対応する Riemann 面上の「射影構造」及び「固有束」（cf. [10]）なる概念と自然に同一視されるものである.

（§5 で展開される議論のために）少しだけ「射影構造」について触れておこう (cf. [30], §2). Σ を向き付け可能で連結な種数 $g > 1$ の位相的閉曲面とする. Σ の射影構造とは, Σ の座標近傍系 $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha \subseteq \Sigma, \varphi_\alpha : U_\alpha \hookrightarrow \mathbb{C})\}_\alpha$ であり, その座標変換が「一次分数変換」で表されるものの（然るべき自然な同値関係による）同値類 $[\mathfrak{U}]$ である. Σ 上の射影構造 $[\mathfrak{U}]$ のうち誘導する複素構造が種数 g のコンパクト Riemann 面 X に同型となるとき, $[\mathfrak{U}]$ は **X 上の射影構造**であると呼ぶことにしよう. X 上の射影構造 $[\mathfrak{U}]$ が一つ与えられたとき, $\mathfrak{U}$ を構成している座標変換関数は X の基本群の PGL_2 表現を定める. この表現に対応する X 上の可積分 PGL_2 主束（resp., 階数 2 可積分ベクトル束の然るべき同値類）がまさに $\mathfrak{sl}_2$ 乍 (resp., GL_2 乍の $\mathbb{G}_m$ 同値類) となる. この構成により, X 上の射影構造全体の集合と $\mathfrak{sl}_2$ 乍の同型類（resp., GL_2 乍の $\mathbb{G}_m$ 同値類) 全体の集合との間の一対一対応が得られる.

一方, 正標数体上で定義された代数曲線における乍の理論に関しては [11], [12], [16], [17], [20], [24], [25], [27] 等を参照されたい. 特に, 正標数の乍において下部接続の p 曲率が恒等的に零となるものは「**休眠乍**」と呼ばれ, 様々な観点から扱われている興味深い対象である. §2 でいくつか例を挙げるように, この休眠乍なる概念は (その名 “oper"の由来にもなっていることだが) 直線束間の或る種の微分作用素と見做せると同時に, 「Frobenius 非安定ベクトル束」や「丹後構造」と呼ばれる代数幾何的対象と密接に関係がある. (さらに, [17] や [25] では, スピンネットワークや有理凸多面体といった組み合わせ論的対象との関係を論じている.) 一般的な状況での休眠乍やそのモジュライスタックの性質については [27] に詳しい.

本稿では, 滑らかな固有代数曲線上の休眠乍において定義される「**通常性**」なる概念について焦点を絞り紹介したい. 休眠乍 $\mathcal{F}^\heartsuit$ の通常性は, 素朴には $\mathcal{F}^\heartsuit$ に付随する層の間の或る射 $\Theta^1_{\mathcal{F}^\heartsuit}$ の単射性により定義されるものであるが (cf. 定義 3.2), これは休眠 GL_n 乍 (の $\mathbb{G}_m$ 同値類) を分類するモジュライスタックの（$\mathcal{F}^\heartsuit$ を分類する点における）不分岐性を特徴付けるものである. このようなモジュライの不分岐性を理解することは ([30] でも紹介した) 休眠 $\mathfrak{sl}_n$ 乍の個数を数え上げる明示公式 (cf. [27], Theorem H) を証明する際の本質的な鍵であった. 実際, このような「通常性」を満たす休眠乍から誘導される或る相対 Grassmann 多様体は, 標数 0 の或る相対 Grassmann 多様体へと「然るべき意味で

標準的に」持ち上がる. この持ち上げにより既存の Gromov-Witten 理論の結果を適用して所望の明示公式を得ている. 通常休眠乍やそのモジュライをさらに深く理解することにより (正標数固有の対象である) 休眠乍の理論と, 例えば Gromov-Witten 理論などといった様々な領域との繋がりを同様にして見出すことができると期待したい.

この記事で紹介する主結果は次の二つである. 一つ目はまず, 休眠 GL_n 乍の通常性を「古典的に知られる代数曲線の通常性」の一般化と位置付けたうえで, 代数曲線の通常性について成立する或る「代数曲線の被覆と通常性との関係性」の一般化を与える. 代数曲線 X とその上の休眠 GL_n 乍 $\mathcal{F}^\heartsuit$ の組 $(X, \mathcal{F}^\heartsuit)$ を幾何学的対象の単位として捉えたとき, $n=1$ (かつ $\mathcal{F}^\heartsuit$ を「自明な」休眠 GL_1 乍 $\mathcal{O}_X^\heartsuit$ とした状況) での休眠乍の通常性はまさに下部代数曲線 X の古典的な通常性に他ならない. 二つ目は, (普遍代数曲線上の) 通常休眠 GL_2 乍のモジュライスタック上定義される標準的なシンプレクティック構造に関する結果を述べる. これは S. Kawai, P. Arès-Gastesi-I. Biswas, B. Loustau らにより [1], [2], [14], [15] で得られた ($\mathbb{C}$ 上の) 射影構造のモジュライ空間に関する結果の正標数類似と呼ぶべきものである.

§2. 休眠乍 (dormant oper)

まずはじめに, 滑らかな固有代数曲線（族）上の (休眠) GL_n 乍の定義について簡単に復習しよう. より一般に, 点付き安定曲線 (族) 上の (休眠) $\mathfrak{g}$ 乍 (ただし, $\mathfrak{g}$ は半単純 Lie 代数) の定義や性質については [27] や [30] を参照されたい. また, この §2 では休眠 GL_n 乍の例を誘導するような（正標数の）代数幾何的対象をいくつか紹介する. 以下では, k を標数 $p>0$ の体とし, 簡単のため k はさらに代数閉体であると仮定しよう.

§2.1.

n を $n<p$ を満たす正整数, S を k 上の概型, そして $f: X \to S$ を S 上の幾何的連結で滑らかな種数 $g\ (>1)$ 固有代数曲線とする. $\mathcal{T}_{X/S}$ を X の S 上の接ベクトルの層, そして $\Omega_{X/S} := \mathcal{T}_{X/S}^\vee$ とする. 次のようなデータを考えよう:

$$\mathcal{F}^\heartsuit := (\mathcal{F}, \nabla_\mathcal{F}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n),$$

ただし,

- $\mathcal{F}$ は X 上の階数 n ベクトル束;
- $\nabla_\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}$ 上の S 接続 $\mathcal{F} \to \Omega_{X/S} \otimes \mathcal{F}$ (つまり, $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ 線型射であり任意の局所切断 $a \in \mathcal{O}_X$, $v \in \mathcal{F}$ に対して等式 $\nabla_\mathcal{F}(a \cdot v) = da \otimes v + a\nabla_\mathcal{F}(v)$ を満たす);
- $\{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n$ は $\mathcal{F}$ の部分ベクトル束からなる降下フィルトレーション

$$0 = \mathcal{F}^n \subseteq \mathcal{F}^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}^0 = \mathcal{F}.$$

定義 2.1 (cf. [27], Definition 4.2.1)**.**

(i) 上で与えた $\mathcal{F}^\heartsuit$ が以下の 3 条件を満たすとき, $\mathcal{F}^\heartsuit$ を X/S **上の** GL_n **乍 (**GL_n**-oper on** X/S**)** という:

- 各部分商 $\mathcal{F}^j/\mathcal{F}^{j+1}$ $(0 \leq j \leq n-1)$ は直線束になる;
- $\nabla_\mathcal{F}(\mathcal{F}^j) \subseteq \Omega_{X/S} \otimes \mathcal{F}^{j-1}$ $(1 \leq j \leq n-1)$;
- 各局所切断 $a \in \mathcal{F}^j$ $(1 \leq j \leq n-1)$ に対して $\overline{a} \mapsto \overline{\nabla_\mathcal{F}(a)}$（ただし, $\overline{(-)}$ はそれぞれの商への像を表す）により定義される $\mathcal{O}_X$ 線型射

$$\mathrm{KS}^j_{\mathcal{F}^\heartsuit} : \mathcal{F}^j/\mathcal{F}^{j+1} \to \Omega_{X/S} \otimes (\mathcal{F}^{j-1}/\mathcal{F}^j)$$

は同型になる.

(ii) $\mathcal{F}^\heartsuit := (\mathcal{F}, \nabla_\mathcal{F}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)$ 及び $\mathcal{G}^\heartsuit := (\mathcal{G}, \nabla_\mathcal{G}, \{\mathcal{G}^j\}_{j=0}^n)$ を X/S 上の GL_n 乍とする. $\mathcal{F}^\heartsuit$ から $\mathcal{G}^\heartsuit$ への（GL_n **乍としての）同型 (isomorphism of** GL_n**-opers)** とは, ベクトル束の間の同型射 $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$ のうち降下フィルトレーション及び S 接続の構造と可換なものをいう.

例 2.2. $n = 1$ のときの GL_n 乍について考えよう. $(\mathcal{L}, \nabla_\mathcal{L})$ を X/S 上の可積分直線束, つまり X 上の直線束 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}$ 上の S 接続 $\nabla_\mathcal{L} : \mathcal{L} \to \Omega_{X/S} \otimes \mathcal{L}$ との組とする. このとき, $\mathcal{L}$ 上のフィルトレーション $\{\mathcal{L}^j\}_{j=0}^1$ を $\mathcal{L}^0 := \mathcal{L}$, $\mathcal{L}^1 := 0$ として定めることにより, X/S 上の GL_1 乍

$$\mathcal{L}^\heartsuit := (\mathcal{L}, \nabla_\mathcal{L}, \{\mathcal{L}^j\}_{j=0}^1)$$

を得る. このようにして, X/S の GL_1 乍なる概念は X/S 上の可積分直線束と自然に同一視される. 特に, X/S 上の普遍導分 $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/S}$ を $\mathcal{O}_X$ 上の S 接続と見做すことにより, 「自明な」GL_1 乍

$$\mathcal{O}_X^\heartsuit := (\mathcal{O}_X, d, \{\mathcal{O}_X^j\}_{j=0}^1) \tag{2.1}$$

を得る. (下の定義 2.3 の言葉を先取りして用いるならば, この自明な GL_1 乍は「休眠」GL_1 乍となる.)

§ 2.2.

次に, 休眠 GL_n 乍の定義を思い出すためにベクトル束上の接続の p 曲率について復習する. $X^{(1)}$ を X の S 上 Frobenius 捻り, そして $F_{X/S} : X \to X^{(1)}$ を相対 Frobenius 射とする. ここで $\mathcal{T}_{X/S}$ 上の p 冪構造 (p-structure) について思い出そう (cf. [13], §5); 各局所切断 $\partial \in \mathcal{T}_{X/S}$ は (局所的に定義された) $\mathcal{O}_X$ の S 上導分と見做せるが, その p 回合成

$\partial \circ \cdots \circ \partial$ も $\mathcal{O}_X$ の S 上導分になることが確かめられる. この導分に対応する $\mathcal{T}_{X/S}$ の局所切断を $\partial^{[p]}$ とおくことにより $\partial \mapsto \partial^{[p]}$ は $\mathcal{T}_{X/S}$ 上の p 冪構造を定める.

いま, $\mathcal{F}$ を X 上のベクトル束, $\nabla_{\mathcal{F}}$ を $\mathcal{F}$ 上の S 接続とする. $\nabla_{\mathcal{F}}$ を（自然な仕方により）$\mathcal{O}_X$ 線型射 $\mathcal{T}_{X/S} \to \mathcal{E}nd_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F})$ と見做そう (ただし, $\mathcal{E}nd_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F})$ には $\mathcal{O}_X$ の局所切断を左から掛けることにより $\mathcal{O}_X$ 加群の構造を持つものとする. また, 各 $h \in \mathcal{E}nd_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F})$ に対して p 回合成 h^p を割り当てる $h \mapsto h^p$ は $\mathcal{E}nd_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F})$ 上の p 冪構造を定める). このとき, $\nabla_{\mathcal{F}}$ の p **曲率 (p-curvature)** とは以下により一意的に定まる $\mathcal{O}_X$ 線型射 $\psi_{\nabla_{\mathcal{F}}}$ である:

$$\begin{aligned} \psi_{\nabla_{\mathcal{F}}} : \mathcal{T}_{X/S}^{\otimes p} &\to \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}) \\ \partial^{\otimes p} &\mapsto \nabla_{\mathcal{F}}(\partial)^p - \nabla_{\mathcal{F}}(\partial^{[p]}). \end{aligned}$$

つまり, p 曲率とは $\nabla_{\mathcal{F}} : \mathcal{T}_{X/S} \to \mathcal{E}nd_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F})$ に関しての「$\mathcal{T}_{X/S}$ 及び $\mathcal{E}nd_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)}(\mathcal{F})$ に備わる p 冪構造の可換性への障害」として定義されるものである. 特に $\psi_{\nabla_{\mathcal{F}}} = 0$ ならば, $\nabla_{\mathcal{F}}$ は p 冪構造と可換であり, この意味において「$\nabla_{\mathcal{F}}$ は良い性質（対称性）を持っている」と言うことが出来るだろう.

「p 曲率が恒等的に零」となる可積分ベクトル束として次のような例を挙げることができる; $\mathcal{V}$ を $X^{(1)}$ 上のベクトル束としたとき, $F_{X/S}$ で引き戻して得られる X 上のベクトル束 $F_{X/k}^*(\mathcal{V})$ 上には, 部分層 $F_{X/S}^{-1}(\mathcal{V})$ の任意の局所切断が水平となるような接続

$$\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathrm{can}} : F_{X/S}^*(\mathcal{V}) \to \Omega_{X/S} \otimes F_{X/S}^*(\mathcal{V}) \tag{2.2}$$

が一意的に存在する. この接続は $\psi_{\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathrm{can}}} = 0$ を満たすことが確かめられる[1].

定義 2.3 (cf. [27], Definition 3.6.1)**.** X/S **上の休眠** GL_n **乍**とは X/S 上の GL_n 乍 $\mathcal{F}^{\heartsuit} := (\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)$ であり $\psi_{\nabla_{\mathcal{F}}} = 0$ となるものをいう.

§ 2.3.

§§ 2.3-2.5 では, (休眠) GL_n 乍の例を誘導するような（正標数の）代数幾何的対象をいくつか紹介する. §2 の残りでは, 簡単のため X は「k 上の」連結で滑らかな種数 g 固有代数曲線とする.

まずは, GL_n 乍が (“oper"の由来ともなっているように) 直線束間の或る種の微分作用素と対応していることをみよう. X 上の微分作用素からなる層 $\mathcal{D}_X$ とは, $\mathcal{O}_X$ 及び $\mathcal{T}_{X/k}$ により生成される（非可換）k 代数の層であり, 次の関係式をみたすものである:

(a) $f_1 * f_2 = f_1 f_2, \quad f_1 * \xi_1 = f_1 \xi_1;$

(b) $\xi_1 * \xi_2 - \xi_2 * \xi_1 = [\xi_1, \xi_2], \quad \xi_1 * f_1 - f_1 * \xi_1 = \xi_1(f_1)$

[1] この対応 $\mathcal{V} \mapsto (F^*(\mathcal{V}), \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathrm{can}})$ は, 「$X^{(1)}$ 上のベクトル束のなす圏」から「p 曲率が 0 である X/S 上の可積分ベクトル束のなす圏」への圏同値を与える.

(ただし, f_1, f_2 は $\mathcal{O}_X$ の任意の局所切断, そして ξ_1, ξ_2 は $\mathcal{T}_{X/k}$ の任意の局所切断とする. また, $*$ は $\mathcal{D}_X$ における積を表す). $\mathcal{D}_X$ には左から (resp., 右から) $\mathcal{O}_X$ の局所切断を掛けることにより $\mathcal{O}_X$ 加群の構造を持つ. その結果として得られる $\mathcal{O}_X$ 加群を ${}^l\mathcal{D}_X$ (resp., ${}^r\mathcal{D}_X$) と書くことにしよう. また, 各整数 m に対して $\mathcal{D}_X^{\leq m}$ を高々m 階の微分作用素からなる $\mathcal{D}_X$ の部分層とする (特に, $m < 0$ のとき $\mathcal{D}_X^{\leq m} = 0$).

m を $0 < m < p$ を満たす整数, $\mathcal{L}$ 及び $\mathcal{N}$ を X 上の直線束としよう. $\mathcal{L}$ から $\mathcal{N}$ への (高々) m 階微分作用素を

$$\mathrm{Diff}(\mathcal{L}, \mathcal{N})^{\leq m} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{N} \otimes \mathcal{D}_X^{\leq m})$$

の元として定める (ただし, $\mathcal{N} \otimes \mathcal{D}_X^{\leq m}$ には ${}^r\mathcal{D}_X$ から誘導される $\mathcal{O}_X$ 加群の構造が入っているものとする). 自然な全射 $\mathcal{D}_X^{\leq m} \twoheadrightarrow \mathcal{D}_X^{\leq m}/\mathcal{D}_X^{\leq (m-1)} = \mathcal{T}_{X/k}^{\otimes m}$ との合成により, 射

$$\sigma_m : \mathrm{Diff}(\mathcal{L}, \mathcal{N})^{\leq m} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{N} \otimes \mathcal{T}_{X/k}^{\otimes m}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{N} \otimes \mathcal{T}_{X/k}^{\otimes m})$$

を得る. 各 $P \in \mathrm{Diff}(\mathcal{L}, \mathcal{N})^{\leq m}$ に対して $\sigma_m(P)$ は (m 階の) 主表象と呼ばれる.

ここで, $\mathcal{N} = \Omega_{X/k}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L}$ と仮定しよう (特に, $\Gamma(X, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{N} \otimes \mathcal{T}_{X/k}^{\otimes m}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$). $\mathcal{D}_X^{\leq m} \otimes \mathcal{L}^\vee$ に ${}^l\mathcal{D}_X$ から誘導される $\mathcal{O}_X$ 加群の構造を入れると, 次の同型な合成射を得る:

$$\begin{aligned} \text{(2.3)} \qquad \mathrm{Diff}(\mathcal{L}, \Omega_{X/k}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L})^{\leq m} &\xrightarrow{\sim} \Gamma(X, \Omega_{X/k}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{D}_X^{\leq m} \otimes \mathcal{L}^\vee) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_{X/k}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L}^\vee, \mathcal{D}_X^{\leq m} \otimes \mathcal{L}^\vee). \end{aligned}$$

いま, $P \in \sigma_m^{-1}(1)$ をとり, m, $\mathcal{L}$ と合わせた 3 つ組み $(m, \mathcal{L}, P)$ から X/k 上の GL_m 乍を構成しよう. 合成射 (2.3) を介して P と対応する $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_{X/k}^{\otimes m} \otimes \mathcal{L}^\vee, \mathcal{D}_X^{\leq m} \otimes \mathcal{L}^\vee)$ の元を $P^\dagger$ とおく. そして左 $\mathcal{D}_X$ 加群 $\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{L}^\vee$ の $\mathrm{Im}(P^\dagger)$ ($\subseteq \mathcal{D}_X^{\leq m} \otimes \mathcal{L}^\vee \subseteq \mathcal{D}_X \otimes \mathcal{L}^\vee$) で生成される部分加群 $\langle \mathrm{Im}(P^\dagger) \rangle$ による商 $\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{L}^\vee / \langle \mathrm{Im}(P^\dagger) \rangle$ に関して, ($\sigma_m(P) = 1$ であることにより) 合成射

$$\mathcal{D}_X^{\leq (m-1)} \otimes \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{D}_X \otimes \mathcal{L}^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{D}_X \otimes \mathcal{L}^\vee / \langle \mathrm{Im}(P^\dagger) \rangle$$

は同型. この合成射を介することにより, $\mathcal{D}_X \otimes \mathcal{L}^\vee / \langle \mathrm{Im}(P^\dagger) \rangle$ における左 $\mathcal{D}_X$ 加群の構造は $\mathcal{D}_X^{\leq (m-1)} \otimes \mathcal{L}^\vee$ 上の k 接続

$$\nabla_{m, \mathcal{L}, P} : \mathcal{D}_X^{\leq (m-1)} \otimes \mathcal{L}^\vee \to \Omega_{X/k} \otimes (\mathcal{D}_X^{\leq (m-1)} \otimes \mathcal{L}^\vee)$$

を誘導する. さらに, $\{\mathcal{D}_X^{\leq m-1-j} \otimes \mathcal{L}^\vee\}_{j=0}^m$ は $\mathcal{D}_X^{\leq (m-1)} \otimes \mathcal{L}^\vee$ 上の降下フィルトレーションとなり, 結果として得られたデータ

$$\text{(2.4)} \qquad \mathcal{D}_{m, \mathcal{L}, P}^\heartsuit := (\mathcal{D}_X^{\leq (m-1)} \otimes \mathcal{L}^\vee, \nabla_{m, \mathcal{L}, P}, \{\mathcal{D}_X^{\leq m-1-j} \otimes \mathcal{L}^\vee\}_{j=0}^m)$$

は X/S 上の GL_m 乍となることが確かめられる. このようにして, 各 $(m, \mathcal{L}, P)$ に対して GL_m 乍 $\mathcal{D}^{\heartsuit}_{m,\mathcal{L},P}$ が構成される.

この GL_m 乍が「休眠」であることの特徴付けは以下のように与えられる：

$$P_0^{\dagger} : \mathcal{T}_{X/k}^{\otimes p} \otimes \mathcal{L}^{\vee} \to \mathcal{D}_X \otimes \mathcal{L}^{\vee}$$

を $\partial^{\otimes p} \otimes v \mapsto (\partial^p - \partial^{[p]}) \otimes v$ (ただし, ∂, v は各々$\mathcal{T}_{X/k}$, $\mathcal{L}^{\vee}$ の任意の局所切断とする) によって一意的に定まる $\mathcal{O}_X$ 線型射とする. このとき,

$$\mathcal{D}^{\heartsuit}_{m,\mathcal{L},P} \text{ が休眠} \iff \langle \mathrm{Im}(P_0^{\dagger}) \rangle \subseteq \langle \mathrm{Im}(P^{\dagger}) \rangle$$

が成り立つ.

§ 2.4.

次は「Frobenius 非安定ベクトル束」を思い出そう[2]. この概念は, 半安定束を分類するモジュライ空間に備わる一般化 Vershiebung 射 (=下部代数曲線の Frobenius 射が誘導するモジュライ空間の間の射) の構造を理解するうえで足掛かりとなる基本的なものである (cf. [19]).

定義 2.4 (cf. [20], Definition 4.1)**.** $l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ とする. $X^{(1)}$ 上の **レベル l の Frobenius 非安定ベクトル束 (Frobenius-unstable vector bundle of level l)** とは $X^{(1)}$ 上の階数 2 半安定ベクトル束 $\mathcal{V}$ であり $F^*_{X/k}(\mathcal{V})$ に次数 $l + \frac{p}{2} \cdot \deg(\mathcal{V})$ の部分直線束が存在するものをいう.

我々が必要とするのは $l = g-1$ のときである. $\mathcal{V}$ を $X^{(1)}$ 上のレベル $g-1$ の Frobenius 非安定ベクトル束とする. $F^*_{X/k}(\mathcal{V})$ に存在する次数 $g-1+\frac{p}{2} \cdot \deg(\mathcal{V})$ (>0) の部分直線束は一意的に定まる; これを $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ とおき, $F^*_{X/k}(\mathcal{V})$ 上のフィルトレーション $\{F^*_{X/k}(\mathcal{V})^j\}_{j=0}^2$ を

$$F^*_{X/k}(\mathcal{V})^0 := F^*_{X/k}(\mathcal{V}), \quad F^*_{X/k}(\mathcal{V})^1 := \mathcal{L}_{\mathcal{V}}, \quad F^*_{X/k}(\mathcal{V})^2 := 0$$

として定める. $F^*_{X/k}(\mathcal{V})$ 上の S 接続 $\nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{V}}$ (cf. (2.2)) は $\nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{V}}(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}) \nsubseteq \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ を満たす（実際, もし $\nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{V}}(\mathcal{L}_{\mathcal{V}}) \subseteq \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ ならば $F^*_{X/k}(\mathcal{L}_V \cap \mathrm{Ker}(\nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{V}})) \cong \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ となる. したがって $\mathcal{L}_V \cap \mathrm{Ker}(\nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{V}})$ は $\mathcal{V}$ の部分直線束となるが, この直線束と $\mathcal{V}$ の次数を考えると, これは $\mathcal{V}$ が半安定であることと矛盾する.）したがって, 合成射

$$\mathcal{L}_{\mathcal{V}} \hookrightarrow F^*_{X/k}(\mathcal{V}) \xrightarrow{\nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{V}}} \Omega_{X/k} \otimes F^*_{X/k}(\mathcal{V}) \to \Omega_{X/k} \otimes (F^*_{X/k}(\mathcal{V})/\mathcal{L}_{\mathcal{V}}) \tag{2.5}$$

は零射ではなく, さらに (次数を比較することにより) 同型となることが確かめられる. 以上より, レベル $g-1$ の Frobenius 非安定ベクトル束 $\mathcal{V}$ から X/k 上の休眠 GL_2 乍

[2] [30], § 5.1 でも同様の内容について扱っている.

$$F^*_{X/k}(\mathcal{V})^{\heartsuit} := (F^*_{X/k}(\mathcal{V}), \nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{V}}, \{F^*_{X/k}(\mathcal{V})^j\}_{j=0}^2) \tag{2.6}$$

が構成された．この対応 $\mathcal{V} \mapsto F^*_{X/k}(\mathcal{V})^{\heartsuit}$ によりレベル $g-1$ の Frobenius 非安定ベクトル束と X/k 上の休眠 GL_2 乍とは（然るべき意味で）一対一対応することがわかる (cf. [20], Proposition 4.2).

§ 2.5.

今度は, 代数曲線 X の種数 g が特別な場合にのみ存在する「丹後構造」と呼ばれる概念について議論する．Kodaira 消滅定理やその一般化である Kawamata-Viehweg 消滅定理といった標数 0 におけるコホモロジーの消滅定理において, 正標数での反例が存在するか否かは基本的かつ興味深い問いである．(代数曲線の) 丹後構造はこれらの消滅定理が成り立たない「病的な」正標数代数曲面を組織的に構成するものであり (cf. [21]), さらに然るべき意味で必要十分に特徴付けることをも期待されている (cf. [31], Theorem 1.1, Conjecture 1.2).

$\mathcal{B}$ を $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/k}$ の像, すなわち X 上の局所完全形式からなる層とする．相対 Frobenius 射 $F_{X/k}$ による順像 $F_{X/k*}(\mathcal{B})$ は $X^{(1)}$ 上の階数 $p-1$ ベクトル束となる．この §2.5 では $p|(g-1)$ であると仮定しよう．

定義 2.5 (cf. [23], Definition 1.1 (2))**.** X **上の丹後構造**とは, $X^{(1)}$ 上のベクトル束 $F_{X/S*}(\mathcal{B})$ の部分直線束 $\mathcal{L}$ であり $\deg(\mathcal{L}) = \frac{2(g-1)}{p}$ を満たすものとする．

以下では, X 上の丹後構造 $\mathcal{L}$ $(\subseteq F_{X/k*}(\mathcal{B}))$ から X/k 上の休眠 GL_2 乍を構成する．自然な全射 $F_{X/k*}(\mathcal{O}_X) \to F_{X/k*}(\mathcal{B})$ による $\mathcal{L}$ の逆像を $\widetilde{\mathcal{L}}$ とおこう．このとき, 次のような 2 つの短完全列間の埋め込みを得る:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X^{(1)}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathcal{L}} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\bigcap"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{X^{(1)}} \arrow[r] & F_{X/k*}(\mathcal{O}_X) \arrow[r] & F_{X/k*}(\mathcal{B}) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

$\widetilde{\mathcal{L}}$ は $\mathcal{L}$ の $\mathcal{O}_{X^{(1)}}$ による拡大 (特に $X^{(1)}$ 上の階数 2 ベクトル束) となり, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}, \mathcal{O}_{X^{(1)}})$ の元 $[\widetilde{\mathcal{L}}]$ を定める．また, (2.7) の上列を $F_{X/k}$ で引き戻した短完全列

$$0 \to \mathcal{O}_X \to F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}}) \to F^*_{X/k}(\mathcal{L}) \to 0 \tag{2.8}$$

によって, $F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})$ は $\mathrm{Ext}^1(F^*_{X/k}(\mathcal{L}), \mathcal{O}_X)$ の或る元 $[F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})]$ を定める拡大となる．(2.7) の下列が誘導する次の完全列を考えよう:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}, F_{X/k*}(\mathcal{B})) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}, \mathcal{O}_{X^{(1)}}) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}, F_{X/S*}(\mathcal{O}_X)) \ (\overset{\gamma}{\cong} \mathrm{Ext}^1(F^*_{X/k}(\mathcal{L}), \mathcal{O}_X)).$$

包含写像 $\mathcal{L} \hookrightarrow F_{X/k*}(\mathcal{B})$ が定める $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}, F_{X/k*}(\mathcal{B}))$ の元の α による像は $[\widetilde{\mathcal{L}}]$ であり, $[\widetilde{\mathcal{L}}]$ の β による像は (同型 γ による同一視のもとで) $[F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})]$ と一致する. したがって, $[F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})] = 0$ となり短完全列 (2.8) は分裂する. さらに, $\deg(\mathcal{L}) > 0$ より $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F^*_{X/k}(\mathcal{L}), \mathcal{O}_X) = 0$ となることから分裂射 $F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \oplus F^*_{X/k}(\mathcal{L})$ は一意的. この一意に定まる分裂を通して $F^*_{X/k}(\mathcal{L})$, $\mathcal{O}_X$ を各々$F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})$ の部分直線束, 商直線束と見做すことにする. 特に,

$$F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})^0 := F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}}), \quad F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})^1 := F^*_{X/k}(\mathcal{L}), \quad F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})^2 := 0$$

とおいて $F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})$ に降下フィルトレーション $\{F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})^j\}_{j=0}^2$ を定める. 丹後構造の定義から

$$\deg(F^*_{X/k}(\mathcal{L})) = p \cdot \deg(\mathcal{L}) = 2g - 2 \ (= \deg(\Omega_{X/k}))$$

なので, $F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})$ 上の k 接続 $\nabla^{\mathrm{can}}_{\widetilde{\mathcal{L}}}$ を用いて得られる合成射

$$F^*_{X/k}(\mathcal{L}) \hookrightarrow F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}}) \xrightarrow{\nabla^{\mathrm{can}}_{\widetilde{\mathcal{L}}}} \Omega_{X/k} \otimes F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}}) \twoheadrightarrow \Omega_{X/k} \otimes (F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})/F^*_{X/k}(\mathcal{L})) \ (= \Omega_{X/k})$$

は (次数を比較して) 同型となることが確かめられる. 以上より, X 上の丹後構造 $\mathcal{L}$ から X/k 上の休眠 GL_2 乍

$$F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})^\heartsuit := (F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}}), \nabla^{\mathrm{can}}_{\widetilde{\mathcal{L}}}, \{F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})^j\}_{j=0}^2) \tag{2.9}$$

が構成された. $F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})^\heartsuit$ を**丹後構造 $\mathcal{L}$ に付随する休眠 GL_2 乍**と呼ぶことにする.

§3. 休眠乍のモジュライと通常性

ここでは, 休眠 GL_n 乍 (の同値類) を分類するモジュライスタックを導入し, その後に休眠 GL_n 乍において定義される「通常性」なる概念を紹介しよう. 最後に, モジュライスタックの幾何学的性質 (不分岐性) とこの通常性との関連について触れる.

§3.1.

まずはじめに, (休眠)GL_n 乍の同値類を分類するモジュライを導入しよう. S を k 概型, X を S 上の幾何的連結で滑らかな種数 g (> 1) 固有代数曲線とする. $\mathcal{F}^\heartsuit := (\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)$ を X/S 上の GL_n 乍, そして $(\mathcal{L}, \nabla_{\mathcal{L}})$ を X/S 上の可積分直線束とする. $\nabla_{\mathcal{F}}$ 及び $\nabla_{\mathcal{L}}$ から定まるテンソル積 $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$ 上の S 接続を (誤解の生じる表記だが) $\nabla_{\mathcal{F}} \otimes \nabla_{\mathcal{L}}$ とおくと,

$$\mathcal{F}^\heartsuit_{(\mathcal{L}, \nabla_{\mathcal{L}})} := (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \nabla_{\mathcal{F}} \otimes \nabla_{\mathcal{L}}, \{\mathcal{F}^j \otimes \mathcal{L}\}_{j=0}^n)$$

は X/S 上の GL_n 乍となる. もし $\mathcal{F}^\heartsuit$ が休眠かつ $\psi_{\nabla_{\mathcal{L}}} = 0$ ならば $\mathcal{F}^\heartsuit_{(\mathcal{L}, \nabla_{\mathcal{L}})}$ も休眠となる.

定義 3.1. $\mathcal{F}^{\heartsuit}$ 及び $\mathcal{G}^{\heartsuit}$ を X/S 上の GL_n 乍 (resp., 休眠 GL_n 乍) とする. X/S 上の可積分直線束 $(\mathcal{L}, \nabla_{\mathcal{L}})$ (resp., $\psi_{\nabla_{\mathcal{L}}} = 0$ を満たす X/S 上の可積分直線束 $(\mathcal{L}, \nabla_{\mathcal{L}})$) が存在して $\mathcal{F}^{\heartsuit}_{(\mathcal{L},\nabla_{\mathcal{L}})} \cong \mathcal{G}^{\heartsuit}$ となるとき, $\mathcal{F}^{\heartsuit}$ と $\mathcal{G}^{\heartsuit}$ は $\mathbb{G}_m$ **同値である**と呼ぶことにする.

$\mathbb{G}_m$ 同値性は実際に X/S 上の GL_n 乍（resp., 休眠 GL_n 乍）全てのなす集合の中に同値関係を定める[3]. また, この同値関係は（自然な意味で）S 上の基底変換と可換である. ここで, $\mathfrak{M}_g$ を k 上の幾何的連結で滑らかな種数 g 固有代数曲線のモジュライスタックとしよう. (したがって良く知られているように, $\mathfrak{M}_g$ は k 上滑らかで既約な $3g-3$ 次元 Deligne-Mumford スタックである.) また, $\mathfrak{Sch}_{/\mathfrak{M}_g}$ を k 概型から $\mathfrak{M}_g$ への射全てのなす圏とする. ${}^{\sharp}\mathfrak{Op}_{n,g}$ (resp., ${}^{\sharp}\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$) を $\mathfrak{Sch}_{/\mathfrak{M}_g}$ 上の前層であり, 各 S 有理点 s (ただし, S は k 概型であり s が分類する代数曲線を X/S とする) に対し X/S 上の GL_n 乍 (resp., 休眠 GL_n 乍) の $\mathbb{G}_m$ 同値類全てからなる集合を割り当てるものとする. そして,

$$\mathfrak{Op}_{n,g} \quad (\text{resp., } \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g})$$

を ${}^{\sharp}\mathfrak{Op}_{n,g}$ (resp., ${}^{\sharp}\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$) に付随する（大エタール景に関する）層とする. $\mathfrak{Op}_{n,g}$ は $\mathfrak{M}_g$ 上の (相対次元が $(n^2-1)(g-1)$ となる) 相対アフィン空間により表現される[4] (cf. [27], Theorem A). 例えば $n=2$ のときは, $\mathfrak{Op}_{2,g}$ は階数 $3g-3$ ベクトル束 $f_*(\Omega^{\otimes 2}_{\mathfrak{C}_g/\mathfrak{M}_g})$ を随伴ベクトル束とする相対アフィン空間により表現される (ただし, $\mathfrak{C}_g$ は $\mathfrak{M}_g$ 上の普遍代数曲線であり, f はその構造射 $\mathfrak{C}_g \to \mathfrak{M}_g$ とする). また, $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$ は空でない k 上の $3g-3$ 次元 Deligne-Mumford スタックにより表現される $\mathfrak{Op}_{n,g}$ の閉部分スタックであり, 射影 $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g} \to \mathfrak{M}_g$ は有限かつ生成的エタールとなる[5] (cf. [27], Theorem C and Theorem G). $n=2$ のときはさらに, $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{2,g}$ は既約であり, $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{2,g} \to \mathfrak{M}_g$ は忠実平坦となることが知られている (cf. [17], Chap. II, §2.3, Lemma 2.3 and Theorem 2.8).

§ 3.2.

次に, 休眠 GL_n 乍の通常性を定義しよう. $\mathcal{F}^{\heartsuit} := (\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)$ を X/S 上の休眠 GL_n 乍とする. $\{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n$ から $\mathcal{E}nd(\mathcal{F})$ $(:= \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}))$ 上の降下フィルトレーション $\{\mathcal{E}nd(\mathcal{F})^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が次のようにして定まる:

$$\mathcal{E}nd(\mathcal{F})^j := \{h \in \mathcal{E}nd(\mathcal{F}) \mid \text{任意の } l \text{ に対して } h(\mathcal{F}^l) \subseteq \mathcal{F}^{l+j}\}.$$

$\nabla_{\mathcal{F}}$ により自然に誘導される $\mathcal{E}nd(\mathcal{F})$ 上の S 接続を

[3] このような同値類のことを X/S 上の PGL_n 乍 (resp., 休眠 PGL_n 乍) と呼び, これは [27] や [30] で扱った $\mathfrak{sl}_2$ 乍 (resp., 休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍) と同値な概念である.

[4] [30] の表記を借りるならば, この $\mathfrak{Op}_{n,g}$ (resp., $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$) は $\mathfrak{Op}_{\mathfrak{sl}_n,\emptyset,g,0} \times_{\overline{\mathfrak{M}}_{g,0}} \mathfrak{M}_{g,0}$ (resp., $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathfrak{sl}_n,\emptyset,g,0} \times_{\overline{\mathfrak{M}}_{g,0}} \mathfrak{M}_{g,0}$) と同型になる.

[5] [30] にて紹介した主結果により, この射影の生成的次数を明示的に与えることができる (cf. [27], Theorem H; [30], 定理 6.3).

$$\nabla^{\mathrm{ad}}_{\mathcal{F}} : \mathcal{E}nd(\mathcal{F}) \to \Omega_{X/S} \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{F})$$

とおこう. GL_n 乍の定義から, $\nabla^{\mathrm{ad}}_{\mathcal{F}}$ を制限することにより $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ 線型射

$$\nabla^{\mathrm{ad},j}_{\mathcal{F}} : \mathcal{E}nd(\mathcal{F})^j \to \Omega_{X/S} \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{F})^{j-1}$$

$(j \in \mathbb{Z})$ を得る. 合成射

$$\begin{aligned} f_*(\mathcal{E}nd(\mathcal{F})^j) &\xrightarrow{f_*(\nabla^{\mathrm{ad},j}_{\mathcal{F}})} f_*(\Omega_{X/S} \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{F})^{j-1}) \\ &\hookrightarrow f_*(\Omega_{X/S} \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{F})) \\ &\to f_*(\mathrm{Coker}(\nabla^{\mathrm{ad}}_{\mathcal{F}})) \end{aligned}$$

(ただし, f は構造射 $X \to S$ を表す) は零射になるため, これは $\mathcal{O}_S$ 線型射

$$\Theta^j_{\mathcal{F}^\heartsuit} : \mathrm{Coker}(f_*(\nabla^{\mathrm{ad},j}_{\mathcal{F}})) \to f_*(\mathrm{Coker}(\nabla^{\mathrm{ad}}_{\mathcal{F}}))$$

を誘導する.

定義 3.2 (cf. [28], Definition 2.2.1)**.** X/S 上の休眠 GL_n 乍 $\mathcal{F}^\heartsuit$ において, $\Theta^1_{\mathcal{F}^\heartsuit}$ が単射となるとき**通常である**という.

GL_n 乍 $\mathcal{F}^\heartsuit := (\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)$ 及び可積分直線束 $(\mathcal{L}, \nabla_{\mathcal{L}})$ が与えられたとき, 自然な同型射 $\eta : \mathcal{E}nd(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}nd(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L})$ を介して $\nabla^{\mathrm{ad}}_{\mathcal{F}}$ と $\nabla^{\mathrm{ad}}_{\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}}$ は可換であり, さらにフィルトレーション $\{\mathcal{E}nd(\mathcal{F})^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ と $\{\mathcal{E}nd(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L})^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は可換となる. したがって, η を介して $\Theta^1_{\mathcal{F}^\heartsuit} = \Theta^1_{\mathcal{F}^\heartsuit_{(\mathcal{L},\nabla_{\mathcal{L}})}}$ となるため, $\Theta^1_{\mathcal{F}^\heartsuit}$ の単射性は $\mathcal{F}^\heartsuit$ の $\mathbb{G}_m$ 同値類にしか依存しない. 以上より, 通常休眠 GL_n 乍を分類する $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$ の部分層

$$^{\circledcirc}\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$$

が well-defined に定義されることがわかる.

例 3.3. $n = 1$ のときの休眠乍の通常性について考えよう. 例 2.2 で議論したように, GL_1 乍 (resp., 休眠 GL_1 乍) とは可積分直線束 (resp., p 曲率が零射となる可積分直線束) のことであった. したがって, $\mathbb{G}_m$ 同値の定義から直ちに, 任意の二つの (休眠)GL_1 乍は $\mathbb{G}_m$ 同値となることがわかる. 特に,

$$\mathfrak{Op}_{n,g} = \mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g} = \mathfrak{M}_g$$

であり, 休眠 GL_1 乍の通常性は下部代数曲線にしか依存しない. では通常休眠 GL_1 乍をその上に持つような代数曲線 $f : X \to S$ は $\mathfrak{M}_g$ のどの部分によって分類されるだろうか.

そのような代数曲線を特定するためには, 自明な休眠 GL_1 乍 $\mathcal{O}_X^{\heartsuit} := (\mathcal{O}_X, d, \{\mathcal{O}_X^j\}_{j=0}^1)$ (cf. (2.1)) の通常性を調べればよい. Cartier 同型より

$$\mathrm{Coker}(f_*(\nabla_{\mathcal{F}}^{\mathrm{ad},1})) = f_*(\Omega_{X/S}), \quad f_*(\mathrm{Coker}(\nabla_{\mathcal{F}}^{\mathrm{ad}})) = f_*(\Omega_{X^{(1)}/S})$$

であり, これらの等号を介して $\Theta^1_{\mathcal{O}_X^{\heartsuit}} = f_*^{(1)}(C_{X/S})$ となることが確かめられる (ただし, $f^{(1)}$ は $X^{(1)}$ の S 上の構造射, そして $C_{X/S}$ は Cartier 作用素 $F_{X/S*}(\Omega_{X/S}) \to \Omega_{X^{(1)}/S}$ を表す). ここで, 古典的に知られる代数曲線の通常性を思い出そう. 滑らかな固有代数曲線 X/S が**通常**であるとは, $F_{X/S}$ による引き戻しが定める S 上の (いわゆる, Vershiebung) 射 $\mathrm{Ver}_{X/S} : \mathcal{J}_{X^{(1)}} \to \mathcal{J}_X$ (ただし, $\mathcal{J}_X$, $\mathcal{J}_{X^{(1)}}$ は各々X/S, $X^{(1)}/S$ の相対 Jacobi 多様体とする) が不分岐なときをいう. 通常代数曲線を分類する $\mathfrak{M}_g$ の部分スタックを ${}^{\circledcirc}\mathfrak{M}_g$ とおくならば, この ${}^{\circledcirc}\mathfrak{M}_g$ は稠密な開部分スタックになる. また, 良く知られているように, X/S が通常であることと $f_*(C_{X/S})$ が単射であることは同値である. したがって以上の議論から,

$$(\text{任意の休眠 } \mathrm{GL}_1 \text{ 乍が通常} \iff) \text{ 自明な休眠 } \mathrm{GL}_1 \text{ 乍 } \mathcal{O}_X^{\heartsuit} \text{ が通常} \iff X/S \text{ が通常}$$

なる同値が成り立つ. 特に,

$${}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{1,g}^{\mathrm{Zzz...}} = {}^{\circledcirc}\mathfrak{M}_g$$

であり, ${}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{1,g}^{\mathrm{Zzz...}}$ は $\mathfrak{Op}_{1,g}^{\mathrm{Zzz...}}$ の稠密な開部分スタックとなる. このことから, **休眠 GL_n 乍の通常性は古典的に知られる代数曲線の通常性の ($n = 1$ から n が一般の場合への) 一般化である**と見做すことができる.

例 3.4. §§2.3-2.5 では (休眠) 乍を誘導するような様々な代数幾何的対象を紹介した. 以下の (i)-(iii) では, それらの対象から誘導される休眠乍が通常であることの特徴付けを簡単に列挙しよう. ここでは $S = \mathrm{Spec}(k)$ と仮定する.

(i) m, $\mathcal{L}$ 及び P を §2.3 と同様とし, $(m, \mathcal{L}, P)$ から構成される GL_m 乍 $\mathcal{D}^{\heartsuit}_{m,\mathcal{L},P}$ は休眠であると仮定しよう.

$$\pi_1 : \mathcal{D}_X^{\leq(m-1)} \otimes \mathcal{L}^{\vee} \twoheadrightarrow \mathcal{T}_{X/k}^{\otimes(m-1)} \otimes \mathcal{L}^{\vee}, \quad \pi_2 : \Omega_{X/k} \otimes (\mathcal{D}_X^{\leq(m-1)} \otimes \mathcal{L}^{\vee}) \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(\nabla_{m,\mathcal{L},P})$$

を各々自然な商とすると, k 線型射 $\Theta^1_{\mathcal{D}^{\heartsuit}_{m,\mathcal{L},P}}$ は $Q^{\dagger} \mapsto \pi_2 \circ Q^{\dagger} \circ \pi_1|_{\mathrm{Ker}(\nabla_{m,\mathcal{L},P})}$ によって与えられる射

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{T}_{X/k}^{\otimes(m-1)} \otimes \mathcal{L}^{\vee}, \Omega_{X/k} \otimes (\mathcal{D}_X^{\leq(m-1)} \otimes \mathcal{L}^{\vee}))\\ &\qquad \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X^{(1)}}}(F_{X/k*}(\mathrm{Ker}(\nabla_{m,\mathcal{L},P})), F_{X/k*}(\mathrm{Coker}(\nabla_{m,\mathcal{L},P})))\end{aligned}$$

と同一視される. ただし, $\mathrm{Ker}(\nabla_{m,\mathcal{L},P})$, $\mathrm{Coker}(\nabla_{m,\mathcal{L},P})$ の $F_{X/k}$ による順像には自然に定まる $\mathcal{O}_{X^{(1)}}$ 加群の構造を入れているものとする.

(ii) $\mathcal{L}$ $(\subseteq F_{X/k*}(\mathcal{B}))$ を X 上の丹後構造としよう．このとき, $\mathcal{L}$ に付随する休眠 GL_2 乍 $F^*_{X/k}(\widetilde{\mathcal{L}})^\heartsuit$ が通常であるための必要十分条件は, X が通常かつ k 線型射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X^{(1)}}}(\mathcal{L}^\vee, F_{X/k*}(\Omega_{X/k})) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X^{(1)}}}(\mathcal{L}^\vee, \Omega_{X^{(1)}/k}) \\ \beta & \mapsto & C_{X/k}\circ\beta \end{array}$$

が単射となることである.

(iii) $\mathcal{V}$ を $X^{(1)}$ 上のレベル $g-1$ の Frobenius 非安定ベクトル束とする．このとき, $\mathcal{V}$ に付随する休眠 GL_2 乍 $F^*_{X/k}(\mathcal{V})^\heartsuit$ が通常であるための必要十分条件は, k 線型射

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{V},\mathcal{V}) \to \mathrm{Ext}^1(F^*_{X/k}(\mathcal{V}), F^*_{X/k}(\mathcal{V})) \overset{(\mathrm{tr},\delta)}{\to} H^1(X,\mathcal{O}_X)\oplus H^1(X,\mathcal{T}_{X/k})$$

が単射となることである．ただし, $\delta : \mathrm{Ext}^1(F^*_{X/k}(\mathcal{V}), F^*_{X/k}(\mathcal{V})) \to H^1(X,\mathcal{T}_{X/k})$ は自然な埋め込み $\mathcal{L}_\mathcal{V} \hookrightarrow F^*_{X/k}(\mathcal{V})$ と商 $F^*_{X/k}(\mathcal{V}) \twoheadrightarrow F^*_{X/k}(\mathcal{V})/\mathcal{L}_\mathcal{V}$ 及び ((2.5) から生じる) 同型 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}_\mathcal{V}, F^*_{X/k}(\mathcal{V})/\mathcal{L}_\mathcal{V}) \overset{\sim}{\to} H^1(X,\mathcal{T}_{X/k})$ から誘導されるものである.

一般の n に関しても次の性質を示すことが出来る.

命題 3.5 (cf. [28], Proposition 2.5.1)**.** $\mathcal{F}^\heartsuit$ を X/S 上の休眠 GL_n 乍とする．このとき, $\mathcal{F}^\heartsuit$ が通常であることの必要十分条件は, X/S が通常かつ $\mathcal{F}^\heartsuit$ を分類する $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$ の S 有理点の像が $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$ の ($\mathfrak{M}_g$ 上の) 不分岐部分に含まれることである．特に, (§3.1 の最後で述べたことを踏まえると) ${}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$ は $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{n,g}$ の稠密な開部分スタックにより表現される.

このように然るべきモジュライの不分岐性により特徴付けられるという点においても, 休眠 GL_n 乍の通常性は古典的に知られる代数曲線の通常性との類似性を見出すことができる．本稿の残りでは, 通常休眠 GL_n 乍やそのモジュライに関して [26] や [28] で得られた結果について紹介しよう.

§4. 通常性と代数曲線の被覆

§4 では, 休眠 GL_n 乍の通常性を代数曲線の通常性の一般化と位置づけたうえで, 代数曲線の通常性について成立する或る「代数曲線の被覆と通常性との関係性」の一般化を考える.

§4.1.

「代数曲線 X とその Galois 被覆 $Y \to X$ が与えられたとき, X が満たしている性質は Y も同様に満たすのか？」という基本的かつ素朴な問いを「代数曲線の通常性」なる

性質で考えてみよう．いま, X と Y を k 上の幾何的連結で滑らかな双曲的 (つまり, 種数が 2 以上である) 固有代数曲線とし, $\pi : Y \to X$ を Galois 被覆とする．G をその Galois 群とする．この状況のもと, X と Y の通常性にはどのような関係があるだろうか．容易に確かめられるように, Y が通常であるならば X も通常となる．実際, $\pi_*(\Omega_{Y/k})^G = \Omega_{X/k}$ であることから, Y の Cartier 作用 $C_{Y/k}$ による射 $\Gamma(Y, C_{Y/k}) : \Gamma(Y, \Omega_{Y/k}) \to \Gamma(Y, \Omega_{Y^{(1)}/k})$ を制限したものとして $\Gamma(X, C_{X/k}) : \Gamma(X, \Omega_{X/k}) \to \Gamma(X, \Omega_{X^{(1)}/k})$ が得られる．したがって, $\Gamma(Y, C_{Y/k})$ が単射 ($\Leftrightarrow$ Y が通常) ならば $\Gamma(X, C_{X/k})$ は単射 ($\Leftrightarrow$ X が通常) となる．逆の主張については, S. Nakajima, M. Raynaud による次の結果が知られている．

定理 4.1 (cf. [18], Theorem 2; [22], Theorem 14)**.** 次の 2 条件を仮定しよう:

- X が $\mathfrak{M}_g$ のなかで一般的, すなわち, g 及び k のみに依存する（特に, X には依存しない）$\mathfrak{M}_g$ の或る真閉部分スタックが存在して, X はその外部の点により分類される;
- G はアーベル群, もしくは二つの Abel 群の中心拡大であり $(\sharp(G), g!) = 1$ を満たすもの.

このとき, X が通常ならば Y も通常となる.

§ 4.2.

上の結果は休眠 GL_1 乍の通常性に関するものであった (cf. 例 3.3). では一般の n に対する休眠 GL_n 乍についてはどうだろうか. X, Y 及び π を上と同様とし, さらに $\mathcal{F}^\heartsuit := (\mathcal{F}, \nabla_\mathcal{F}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)$ を X/k 上の休眠 GL_n 乍とする．$\nabla_\mathcal{F}$, $\{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n$ を π で引き戻すことにより, $\pi^*(\mathcal{F})$ 上の k 接続 $\nabla_{\pi^*(\mathcal{F})}$ 及びフィルトレーション $\{\pi^*(\mathcal{F}^j)\}_{j=0}^n$ を得る．π がエタールであることから, データ

$$\pi^*(\mathcal{F}^\heartsuit) := (\pi^*(\mathcal{F}), \nabla_{\pi^*(\mathcal{F})}, \{\pi^*(\mathcal{F}^j)\}_{j=0}^n)$$

は Y 上の休眠 GL_n 乍になることが確かめられる．このとき, $\mathcal{F}^\heartsuit$ の通常性と $\pi^*(\mathcal{F}^\heartsuit)$ の通常性はどのような関係にあるのだろうか．以下の主張はその答えを提示するものであり, G が或る制限のもとで定理 4.1 の一般化になっている．

定理 4.2 (cf. [28], Theorem A and Theorem B)**.** $X, Y, \pi, \mathcal{F}^\heartsuit$ を上と同様とする．

(i) $\pi^*(\mathcal{F}^\heartsuit)$ が通常ならば $\mathcal{F}^\heartsuit$ も通常となる.

(ii) 次の 2 条件を仮定しよう:

- X は $\mathfrak{M}_g$ のなかで一般的;
- G はアーベル群であり $p \nmid \sharp(G)$ を満たす.

このとき, $\mathcal{F}^\heartsuit$ が通常ならば $\pi^*(\mathcal{F}^\heartsuit)$ も通常となる.

この定理の証明には, 定理 4.1 の証明の際と同様に代数曲線の退化の手法を用いる (状況はより複雑になる). 実際, ([30] で紹介したように) 休眠乍や休眠乍の通常性の定義を点付き安定曲線上へと拡張し, 下部代数曲線の退化もしくは各既約成分へ休眠乍を分解する操作と「通常である」という性質が可換であることを調べる. これにより, より単純な代数曲線の間の Galois 被覆と通常性との関係を調べることに証明が帰着される.

§5. 休眠 GL_2 乍を分類するモジュライのシンプレクティック構造

最後の節であるこの §5 では, (通常休眠) GL_2 乍のモジュライスタック上定義される標準的なシンプレクティック構造 (= 非退化な閉 2 次形式) に関する結果を述べる. これは S. Kawai, P. Arès-Gastesi-I. Biswas, B. Loustau らにより [1], [2], [14], [15] で得られた ($\mathbb{C}$ 上の) 射影構造のモジュライ空間に関する結果の正標数類似と呼ぶべきものである.

§5.1.

まずは, 関連する $\mathbb{C}$ 上の話を思い出そう. Σ を向き付け可能で連結な種数 g (>1) の位相閉曲面とする. $\mathfrak{T}$ を Σ の Teichmüller 空間, すなわち次で定義される商空間とする:

$$\mathfrak{T} := \mathfrak{Conf}(\Sigma)/\mathrm{Diff}^0(\Sigma),$$

ただし, $\mathfrak{Conf}(\Sigma)$ は Σ の向きと可換な Σ 上の共形構造の空間, そして $\mathrm{Diff}^0(\Sigma)$ を Σ の微分自己同相写像で Σ の恒等写像とホモトピックなもの全体のなす群とする. また, $\mathfrak{Proj}(\Sigma)$ を Σ 上の射影構造の空間として,

$$\mathfrak{S} := \mathfrak{Proj}(\Sigma)/\mathrm{Diff}^0(\Sigma)$$

とおく. $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$ はそれぞれ $3g-3$ 次元, $6g-6$ 次元複素多様体の構造を持つ. さらに, 2 つの $6g-6$ 次元複素多様体 $T^\vee\mathfrak{T}$ (:= $\mathfrak{T}$ の余接ベクトル束の全空間) 及び $\mathfrak{S}$ 上には標準的な構成によるシンプレクティック構造 ω_0^{can}, ω_0^{PGL} が各々存在する (以下の §5.3, §5.2 でそれぞれ言及されるシンプレクティック構造の構成を参照のこと). ここで, 射影 $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ の C^∞ 級大域切断

$$\mathrm{unif} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{S}$$

を, L. Bers により [4] で与えられた切断もしくは C. J. Earle により [9] で与えられた切断としよう. つまり, この切断は各点 $q \in \mathfrak{T}$ が分類する (マーキングが与えられた) Riemann 面 X に対して然るべき方法で特定された特別な X 上の射影構造 $[\mathfrak{U}_X]$ を割り当てている. 特に, $\mathfrak{T}$ は X とその上の然るべき特別な射影構造 (即ち, $[\mathfrak{U}_X]$) の組全てのなす $\mathfrak{S}$ の部分空間 (そして unif をその埋め込み射) と見做せる. $\mathfrak{S}$ が持つ $\mathfrak{T}$ 上相対アフィン空間の構造 (cf. §5.3) を考慮すると, その特別な部分空間 $\mathfrak{T}$ $(\subseteq \mathcal{S})$ の埋め込み射 unif は微分同相写像

$$\Psi_0 : T^\vee\mathfrak{T} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}$$

へと自然に拡張される. (つまり, Ψ_0 の零切断 $\mathfrak{T} \hookrightarrow T^\vee\mathfrak{T}$ への制限が unif と一致する.) この Ψ_0 に関して次の主張が知られている.

定理 5.1 (cf. [1], Theorem 1.1; [14], Theorem; [15], Theorem 6.10). Ψ_0 はシンプレクティック構造を (定数倍の差を除いて) 保存する. すなわち,

$$\Psi_0^*(\omega_0^{\mathrm{PGL}}) = \sqrt{-1}\cdot\omega_0^{\mathrm{can}}$$

が成り立つ[6].

§ 5.2.

以下では, 上で述べた定理 5.1 の正標数類似について考えよう. はじめに, $\mathfrak{Op}_{2,g}$ 上に定義される自然なシンプレクティック構造 ω_p^{PGL} を思い出そう. S を k 概型, X を S 上の幾何的連結で滑らかな種数 g (>1) 固有代数曲線, そして $\mathcal{F}^\heartsuit := (\mathcal{F}, \nabla_\mathcal{F}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^2)$ を X/S 上の GL_2 乍とする.

$$\mathcal{E}nd(\mathcal{F})^0 := \{h \in \mathcal{E}nd(\mathcal{F}) \mid \mathrm{tr}(h) = 0\} \ (\subseteq \mathcal{E}nd(\mathcal{F}))$$

とおこう. $\mathcal{E}nd(\mathcal{F})$ での S 接続 $\nabla_\mathcal{F}^{\mathrm{ad}}$ を制限することにより $\mathcal{E}nd(\mathcal{F})^0$ 上の接続

$$\nabla_\mathcal{F}^{0,\mathrm{ad}} : \mathcal{E}nd(\mathcal{F})^0 \to \Omega_{X/S} \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{F})^0$$

を得る. $\mathfrak{sl}_2$ 上の Killing 形式 $\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2 \to k$ により誘導される $\mathcal{O}_X$ 線型射

$$\kappa : \mathcal{E}nd(\mathcal{F})^0 \otimes \mathcal{E}nd(\mathcal{F})^0 \to \mathcal{O}_X$$

はそれぞれの S 接続 $\nabla_\mathcal{F}^{0,\mathrm{ad}} \otimes \nabla_\mathcal{F}^{0,\mathrm{ad}}$, d と可換である. 次のような合成射を考えよう:

$$\begin{aligned}(5.1)\qquad \mathbb{R}^1 f_*(\mathcal{K}^\bullet[\nabla_\mathcal{F}^{0,\mathrm{ad}}]) \otimes \mathbb{R}^1 f_*(\mathcal{K}^\bullet[\nabla_\mathcal{F}^{0,\mathrm{ad}}]) &\to \mathbb{R}^2 f_*(\mathcal{K}^\bullet[\nabla_\mathcal{F}^{0,\mathrm{ad}} \otimes \nabla_\mathcal{F}^{0,\mathrm{ad}}]) \\ &\to \mathbb{R}^2 f_*(\mathcal{K}^\bullet[d]) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^1 f_*(\Omega_{X/S}) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S,\end{aligned}$$

ただし, 層の間の射 $\nabla : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ に対して $\mathcal{K}^\bullet[\nabla]$ は ∇ に対応する (次数 0, 1 以外は 0 となる) 複体を表し (特に $\mathcal{K}^0 := \mathcal{G}$, $\mathcal{K}^1 := \mathcal{H}$), (5.1) の最初の射はコホモロジーのカップ積, 2 番目の射は κ により誘導されるものである. この (5.1) は $\mathbb{R}^1 f_*(\mathcal{K}^\bullet[\nabla_\mathcal{F}^{0,\mathrm{ad}}])$ 上の歪対称 $\mathcal{O}_S$ 双線型射を定める. $\mathbb{R}^1 f_*(\mathcal{K}^\bullet[\nabla_\mathcal{F}^{0,\mathrm{ad}}])$ は $\mathfrak{Op}_{2,g}$ における接ベクトル束を $(X/S, \mathcal{F}^\heartsuit)$ を

[6] ω_0^{PGL} に関する定義は [15] に従った. [14] ではこの等式は $\Psi_0^*(\omega_0^{\mathrm{PGL}}) = \pi\cdot\omega_0^{\mathrm{can}}$ と表されている.

分類する S 有理点へ制限した $\mathcal{O}_S$ 加群と標準的に同型であることに注意しよう．あらゆる GL_2 乍 $\mathcal{F}^{\heartsuit}$ においてこのような双線型射 (5.1) を考えることにより, $\mathfrak{Op}_{2,g}$ 上に 2 形式

$$\omega_p^{\mathrm{PGL}} \in \Gamma(\mathfrak{Op}_{2,g}, \bigwedge^2 \Omega_{\mathfrak{Op}_{2,g}/k})$$

が与えられるが, これは $\mathfrak{Op}_{2,g}$ 上のシンプレクティック構造 (すなわち, ω_p^{PGL} は非退化閉 2 次形式) となることが確かめられる (cf. [26], Proposition 4.2.2).

§ 5.3.

一方, ${}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}$ の余接ベクトル束の全空間 $T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}$ には (普遍 1 形式を微分して得られる) 標準的なシンプレクティック構造

$$\omega_p^{\mathrm{can}} \in \Gamma(T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}, \bigwedge^2 \Omega_{T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}/k})$$

が存在する．このようにして $T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}$, $\mathfrak{Op}_{2,g}$ 上にそれぞれシンプレクティック構造を構成したが, これらの間には一体どのような関係があるのだろうか．

§5.1 で議論した $\mathbb{C}$ 上の話では, 特別な射影構造を分類する $\mathfrak{S}$ の部分空間として $\mathfrak{T}$ $(= \mathrm{Im}(\mathrm{unif}))$ に注目した． 今の議論においては, ${}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}} \hookrightarrow \mathfrak{Op}_{2,g}$ を考えるべき特別な部分空間としよう．$T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}$ は変形理論の一般論から, $\mathbb{R}^1 f_*(\mathcal{T}_{\mathfrak{C}_g/\mathfrak{M}_g})^{\vee}|_{{}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}}$ $(\cong f_*(\Omega_{\mathfrak{C}_g/\mathfrak{M}_g}^{\otimes 2})|_{{}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}})$ を随伴ベクトル束とする ${}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}$ 上の「自明な」相対アフィン空間となる．一方, $\mathfrak{Op}_{2,g}$ は（§3.1 の最後で述べたように）$f_*(\Omega_{\mathfrak{C}_g/\mathfrak{M}_g}^{\otimes 2})$ を随伴ベクトル束とする $\mathfrak{M}_g$ 上の相対アフィン空間となる．したがって, 埋め込み ${}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}} \to \mathfrak{Op}_{n,g}$ は (${}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}$ と $\mathfrak{Op}_{n,g}$ が持つアフィン空間の構造と可換になるような) $\mathfrak{M}_g$ 上の射

$$\Psi_p : T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}} \to \mathfrak{Op}_{2,g} \tag{5.2}$$

を誘導する．（再び§3.1 の最後で述べたことから）この射は (k 上の滑らかで既約な $6g-6$ 次元 Deligne-Mumford スタックの間の) 支配的準有限エタール射である．特に, $\mathfrak{Op}_{2,g}$ 上のシンプレクティック構造 ω_p^{PGL} を Ψ_p で引き戻すことができ, $T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}$ 上にもう一つのシンプレクティック構造 $\Psi_p^*(\omega_p^{\mathrm{PGL}})$ を得る．ω_p^{can} と $\Psi_p^*(\omega_p^{\mathrm{PGL}})$ は全く異なる構成により与えられた $T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz...}}$ 上の (一見して互いに異なる) シンプレクティック構造である．しかし, 定理 5.1 の正標数類似と呼ぶべきものとして以下の定理を示すことができる．

定理 5.2 (cf. [26], Theorem A)**.** Ψ_p はシンプレクティック構造を保存する．すなわち,

$$\Psi^*(\omega_p^{\mathrm{PGL}}) = \omega_p^{\mathrm{can}}$$

が成り立つ．

§ 5.4.

最後にこの定理 5.2 の応用を一つ挙げて本稿を終えることにしよう．以下では，「与えられたシンプレクティック構造に対して，その上の（つまり然るべき意味で可換な）変形量子化が存在するか」という古典的な問題に関するものである．定理 5.2 を適用することにより，具体的に把握することの難しい ω_p^{PGL} の上に正標数 (非可換) 代数幾何学的観点でとても良い変形量子化を構成することができるという事実を紹介する．

X を k 上の滑らかな概型 (もしくはより一般に Deligne-Mumford スタック), ω を X 上のシンプレクティック構造とする．ω は $\mathcal{T}_{X/k}$ 上の非退化なペアリング $\mathcal{T}_{X/k} \otimes \mathcal{T}_{X/k} \to \mathcal{O}_X$ に対応し，したがってこれは同型 $(\mathcal{T}_{X/k}^\vee =)\ \Omega_{X/k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}_{X/k}$ を与える．この同型を介して ω は $\Omega_{X/k}$ 上の (非退化な) ペアリング $\omega^{-1} : \Omega_{X/k} \times \Omega_{X/k} \to \mathcal{O}_X$, さらには歪対称 k 双線型射

$$\begin{aligned} \{-,-\}_\omega : \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_X &\to \quad \mathcal{O}_X \\ (f,g) \quad &\mapsto \omega^{-1}(df, dg) \end{aligned}$$

を定める (ω が閉形式であることにより $\{-,-\}_\omega$ は Poisson ブラケットになる).

定義 5.3 (cf. [5], Definition 3.3; [6], Definition 1.4)**.**

(i) $(\mathcal{O}_X^\hbar, \tau)$ を次のようなものからなる組とする:

- $\mathcal{O}_X^\hbar$ は $\hbar$ 進位相に関して完備な X 上の平坦 $k[[\hbar]]$ 代数の Zariski 層;
- τ は k 代数の層の同型射 $\mathcal{O}_X^\hbar / \hbar \cdot \mathcal{O}_X^\hbar \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$.

$\mathcal{O}_X^\hbar$ の交換子が mod $\hbar^2 \cdot \mathcal{O}_X^\hbar$ において $\hbar \cdot \{-,-\}_\omega$ と（τ を介して）一致するとき，$(\mathcal{O}_X^\hbar, \tau)$ を ω の**変形量子化**[7]と呼ぶ.

(ii) ω の **Frobenius 定数変形量子化**とは次のような三つ組 $(\mathcal{O}_X^\hbar, \tau, s)$ のことと定義する:

- $(\mathcal{O}_X^\hbar, \tau)$ は ω の変形量子化;
- s は k 代数の層の射 $\mathcal{O}_{X^{(1)}} \to \mathcal{Z}^\hbar$ (ただし，$\mathcal{Z}^\hbar$ は $F_{X/k*}(\mathcal{O}_X^\hbar)$ の中心を表す) であり，合成射

$$\mathcal{O}_{X^{(1)}} \xrightarrow{s} \mathcal{Z}^\hbar \hookrightarrow F_{X/k*}(\mathcal{O}_X^\hbar) \twoheadrightarrow F_{X/k*}(\mathcal{O}_X^\hbar / \hbar \cdot \mathcal{O}_X^\hbar) \xrightarrow{F_{X/k*}(\tau)} F_{X/k*}(\mathcal{O}_X)$$

が $F_{X/k}^* : \mathcal{O}_{X^{(1)}} \to F_{X/k*}(\mathcal{O}_X)$ と一致するもの.

例えば，$T^\vee X$ 上の (普遍 1 形式を微分して得られる) シンプレクティック構造 ω_X^{can} (cf. §5.3) に対し，標準的な Frobenius 定数変形量子化を構成することができる．§2.3 で導入した $\mathcal{D}_X$ に形式的パラメータ $\hbar$ を含めた $\mathcal{D}_X^\hbar$ を次のように定義しよう: $\mathcal{D}_X^\hbar$ は $\mathcal{O}_X$ 及び $\mathcal{T}_{X/k}$ により生成される（非可換）k 代数の層であり，§2.3 で述べた関係式 (a) 及び

[7] もしくはシンプレクティック多様体 (X, ω) の変形量子化ともいう.

(b)$_\hbar$ $\xi_1 * \xi_2 - \xi_2 * \xi_1 = \hbar \cdot [\xi_1, \xi_2]$, $\xi_1 * f_1 - f_1 * \xi_1 = \hbar \cdot \xi_1(f_1)$

なる関係式を満たすものとする. π を射影 $T^\vee X \to X$, $\pi^{(1)} : (T^\vee X)^{(1)} \to X^{(1)}$ を π により誘導される k 上 Frobenius 捻り $(T^\vee X)^{(1)}$, $X^{(1)}$ の間の射とする. $\mathcal{D}_X^\hbar$ は自然な同型 $\tau : \mathcal{D}_X^\hbar / \hbar \cdot \mathcal{D}_X^\hbar \xrightarrow{\sim} \pi_*(\mathcal{O}_{T^\vee X})$ を持ち, さらに $h^p \mapsto h^p$, $\xi^p \mapsto \xi^p - h^{p-1}\xi^{[p]}$ $(h \in \mathcal{O}_X$, $\xi \in \mathcal{T}_{X/k})$ で定まる射 $s : \pi_*^{(1)}(\mathcal{O}_{(T^\vee X)^{(1)}}) \to Z(\mathcal{D}_X^\hbar)$ が存在する (ただし, $Z(\mathcal{D}_X^\hbar)$ は $F_{X/k*}(\mathcal{D}_X^\hbar)$ の中心を表す). このとき, 3 つ組 $(\mathcal{D}_X^\hbar, \tau, s)$ は然るべき自然な仕方により, シンプレクティック構造 ω_X^{can} 上の Frobenius 定数変形量子化と見做せる (cf. [5], Proposition 3.5). 特に, $X = {}^{\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz}\ldots}$ の場合を考えることにより, $T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz}\ldots}$ 上のシンプレクティック構造 ω_p^{can} には標準的に Frobenius 定数変形量子化が与えられる. したがって, 定理 5.2 を適用することにより次の系を得る:

系 5.4 (cf. [26], Corollary 6.2.1)**.** $\mathfrak{Op}_{2,g}$ 上のシンプレクティック構造 ω_p^{PGL} は, 或る支配的準有限エタール射（具体的には $\Psi_p : T^{\vee\circledcirc}\mathfrak{Op}_{2,g}^{\mathrm{Zzz}\ldots} \to \mathfrak{Op}_{2,g}$）で引き戻すことにより Frobenius 定数変形量子化を持つ.

§6. 謝辞

本稿を終えるにあたり、「代数的整数論とその周辺 2015」報告集への原稿掲載の機会を与えてくださった編集委員の方々に深く感謝いたします. 投稿締め切りを守れず遅れてしまい, 大変ご迷惑をお掛けしましたことを心よりお詫び申し上げます. そして本稿の査読を引き受けてくださり, 内容に関して大変有意義なコメント及びアドバイスをしてくださった査読者の方に深く感謝いたします.

References

[1] P. Arés-Gastesi, I. Biswas, On the symplectic form of the moduli space of projective structures. *J. Symplectic. Geom.* **6**, (2008), pp. 239-246.

[2] P. Arés-Gastesi, I. Biswas, On the symplectic structure over a moduli space of orbifold projective structures. *math.AG/1308.3353*, (2013).

[3] A. Beilinson, V. Drinfeld, "Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves." Available at: http://math.uchicago.edu/∼mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf

[4] L. Bers, Fiber spaces over Teichmüller spaces. *Acta Math.* **130**, (1973), pp. 89-126.

[5] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin, Mckay equivalence for symplectic quotient singularities. *Proc. of the Steklov Inst. of Math.* **246**, (2004), pp. 13-33.

[6] R. Bezrukavnikov, D. Kaledin. Fedosov quantization in positive characteristic. *J. Am. Math. Soc.* **21**, (2008), pp. 409-438.

[7] I. Biswas, Schottky uniformization and the symplectic structure of the cotangent bundle of a Teichmüller space. *J. Geom. Phys.* **35**, (2000), pp. 57-62.

[8] P. Deligne, D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publ. Math. I.H.E.S.* **36** (1969), pp. 75-110.
[9] C. J. Earle, Some intrinsic coordinates on Teichmüller space. *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (1981), pp. 527-531.
[10] R. C. Gunning, Special coordinate covering of Riemann surfaces. *Math. Ann.* **170** (1967), pp. 67-86.
[11] Kirti Joshi, C. Pauly, Hitchin-Mochizuki morphism, opers and Frobenius-destabilized vector bundles over curves. *math. AG/0912.3602* (2009).
[12] Kirti Joshi, S. Ramanan, E. Z. Xia, and J. K. Yu, On vector bundles destabilized by Frobenius pull-back. *Composito Mathematica* **142** (2006), pp. 616-630.
[13] N. M. Katz, Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **39** (1970), pp. 175-232.
[14] S. Kawai, The symplectic nature of the space of projective connections on Riemann surfaces. *Math. Ann.* **305** (1996), pp. 161-182.
[15] B. Loustau, The complex symplectic geometry of the deformation space of complex projective structures. *Geometry & Topology* **19** (2015), pp. 1737-1775.
[16] S. Mochizuki, A theory of ordinary p-adic curves. *Publ. RIMS* **32** (1996), pp. 957-1151.
[17] S. Mochizuki, *Foundations of p-adic Teichmüller theory.* American Mathematical Society, (1999).
[18] S. Nakajima, On generalized Hasse-Witt invariants of an algebraic curve. *Galois groups and their representations (Nagoya, 1981) (Y. Ihara, ed.), Adv. Stud. Pure Math.* **2**, North Holland/Kinokuniya, (1983), pp. 69-88.
[19] B. Osserman, The generalized Vershiebung map for curves of genus 2. *Math. Ann.* **336** (2006), pp. 963-986.
[20] B. Osserman, Mochizuki's crys-stable bundles: A lexicon and applications. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **43** (2007), pp. 95-119.
[21] M. Raynaud, Contre-exemple au "vanishing theorem" en caractéristique $p > 0$. C. P. Ramanujan — A tribute, *Studies in Math.* **8** (1978), pp. 273-278.
[22] M. Raynaud, Revêtements des courbes en caractéristique $p > 0$ et ordinarité. *Compositio Math.* **123** (2000), pp. 73-88.
[23] Y. Takeda, K. Yokogawa, Pre-Tango structures on curves. *Tohoku Math. J.* **54** (2002), pp. 227-237.
[24] Y. Wakabayashi, An explicit formula for the generic number of dormant indigenous bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **50** (2014), pp. 383-409.
[25] Y. Wakabayashi, Spin networks, Ehrhart quasi-polynomials, and combinatorics of dormant indigenous bundles. *RIMS Preprint* **1786** (2013).
[26] Y. Wakabayashi, The symplectic nature of the space of dormant indigenous bundles on algebraic curves. *arXiv: math. AG/1411.1197v2*, (2014).
[27] Y. Wakabayashi, A theory of dormant opers on pointed stable curves —a proof of Joshi's conjecture—. *arXiv: math. AG/1411.1208v3*, (2014).
[28] Y. Wakabayashi, Abelian étale coverings of generic curves and ordinariness of dormant opers. *arXiv: math. AG/1602.07061*, (2016).
[29] Y. Wakabayashi, Tango structures and dormant Miura opers. *in preparation.*
[30] 若林 泰央, 点付き安定曲線上の休眠乍の数え上げ：研究報告.「代数的整数論とその周辺 2014」報告集.
[31] Q. Xie, Counterexamples to the Kawamata-Viehweg vanishing on ruled surfaces in positive characteristic. *J. Algebra* **324** (2010), pp. 3494-3506.