RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B72 (2018), 181–186

対角的 3 次曲面の Chow 群の明示的生成元の構成について (On construction of explicit generators of the Chow group of diagonal cubic surfaces)

By

山本 健人 (Kento YAMAMOTO)*

Abstract

In this paper, we give a brief description of an explicit construction of generators of the degree-zero part of the Chow group of zero-cycles on some diagonal cubic surfaces over 3-adic fields. An important point is to check that such cycles are linearly independent by using the Hilbert symbol.

§1. 序

本稿は 3 進体上の対角的 3 次曲面のゼロサイクルのなす Chow 群の生成元に関しての結果 [11] の概要である．

代数多様体の Chow 群は数論幾何において大切な不変量のひとつである．例えば有限次代数体 K の整数環のスペクトラムのゼロサイクルのなす Chow 群は K のイデアル類群であるように, Chow 群はイデアル類群の一般化とみなせて数論的に重要である．また, マニンによって導入されたブラウアー・マニンペアリング ([6]) にも登場する対象であり, 同じく重要な不変量のひとつであるブラウアー群の性質の研究にも深く関係している．このような代数多様体のチャウ群に対する基本的な問題意識のひとつとして, 構造や具体的な生成元を求める事が挙げられる．本稿では, 3 進体上の対角的 3 次曲面と呼ばれる代数多様体の族に対してゼロサイクルのなす Chow 群の構造と生成元について得られた結果を紹介する．p 進体上の対角的 3 次曲面のゼロサイクルのなす Chow 群については [3], [8], [10] などで詳しく研究されている．これらの文献では Chow 群の構造を決定する主な計算方法として多様体のヘンゼル局所環のミルナー K 群のシンボル計算を行ってい

Received March 17, 2016. Revised November 20, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): primary 14C15; 14C25; secondary 11S99
Key Words: *zero cycles, diagonal cubic surfaces.*
*DEPARTMENT OF MATHEMATICS, CHUO UNIVERSITY 1-13-27 KASUGA, BUNKYO-KU, TOKYO 112-8551, JAPAN.
e-mail: k-yamamo@gug.math.chuo-u.ac.jp

る. 今回紹介する主結果の証明では, 基礎体のヒルベルト記号を計算する方法を用いた.

§2. 主結果の紹介

以下 k はすべて 3 進体とし, ζ_3 を 1 の原始 3 乗根とする. 本稿の主役である k 上の対角的 3 次曲面 $X(\subset \mathbb{P}^3_k)$ を以下のように定義する:

$$X : T_0^3 + aT_1^3 + bT_2^3 + cT_3^3 = 0, \quad a, b, c \in k^*.$$

$k(X)$ を X の関数体, $\mathrm{Br}(X)$ を X のブラウアー群とする. $\mathrm{CH}_0(X)$ で X 上のゼロサイクルのなす Chow 群を表すものとし, $A_0(X)$ を次数写像 $\deg : \mathrm{CH}_0(X) \to \mathbb{Z}$ の核とする. ここで X の定義方程式において係数 a, b, c がすべて k^* の 3 乗元になっているときは $A_0(X) = 0$ となっているので, 以下 a, b, c のいずれかが k^* の 3 乗元でない場合を考えることにする.

定理 2.1 ([8]). $a = b = 1$, $c \notin (k^*)^3$ とする. $\zeta_3 \in k$ かつ $\mathrm{ord}_k(c) \equiv 1 \pmod 3$ のとき,

$$A_0(X) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}.$$

この構造定理から, 本稿では次の問題を考える.

問題：上の定理 2.1 の仮定の下, $A_0(X)$ の生成元はどのようになっているか?

この問題に関して以下の主結果を得た. まず主結果を述べる為に必要な記号の準備をする. k の素元 π と 1 の原始 3 乗根 ζ_3 を固定し, $\zeta_3 \in k$ と仮定する. e で k の絶対分岐指数を表すとし, $e' = 3e/2$ とする (仮定 $\zeta_3 \in k$ から e' は整数). さらに $\delta = (1-\zeta_3)\pi^{-e/2}$ かつ $\epsilon = 3\pi^{-e}$ とする. これらは単数である. L を k 上 3 次不分岐拡大体とする (これは同型を除いて一意的に定まる). $\mathscr{O}_L$ で L の付値環, $\mathbb{F}_k$, $\mathbb{F}_L$ でそれぞれ k, L の剰余体を表すものとする.

定理 2.2 ([11]). $\zeta_3 \in k$ とする. X を k 上の対角的 3 次曲面 $T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + c\,T_3^3 = 0$, $\mathrm{ord}_k(c) \equiv 1 \pmod 3$ とする. $\phi : X_L \to X$ を自然な写像とする. 以下の X_L 上の L-値点を考える：

$$P_{\zeta_3} = \left(1 : \pi^e u : -\sqrt[3]{1+\pi^{3e}u^3} : 0\right)$$
$$Q_l = \left(1 : \pi^{e/2}\delta\sqrt[3]{1+\pi^{e'}w_l} : -\sqrt[3]{1+\pi^{e'}\delta^3(1+\pi^{e'}w_l)} : 0\right) \quad (l = 1, 2).$$

ここで u は $\mathscr{O}_L$ の元で $\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_L/\mathbb{F}_3}(\overline{(1-\zeta_3)^{-3}\pi^{e'}\delta u}) = 2$, w_l $(l = 1, 2)$ は $\mathscr{O}_k$ の元で, $\mathrm{ord}_k(c)\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_k/\mathbb{F}_3}(\overline{(1-\zeta_3)^{-3}\pi^{e'}w_l}) - [\mathbb{F}_k : \mathbb{F}_3] \equiv l \mod 3$ を満たすものとする.
このとき, $A_0(X)$ は以下の 2 つの線形独立なゼロサイクルによって生成される：

$$C_1 = \phi_*[Q_2] - \phi_*[P_{\zeta_3}], \quad C_2 = \phi_*[Q_1] - \phi_*[P_{\zeta_3}].$$

補足: (1) ϕ_* は ϕ によるサイクルの押し出しを表す.
(2) 上の L-値点に出てくる 3 乗根 $\sqrt[3]{1+\pi^{3e}u^3}$ はヘンゼルの補題から L の元である.
(3) 定理 2.2 は定理 2.1 の別証明にもなっている.

上の結果は k が 1 の原始 3 乗根を含んでいるという仮定があったが、この仮定がない場合には以下の結果が得られた.

定理 2.3 ([11]). k は 1 の原始 3 乗根 ζ_3 を含んでいないとし, $\mathrm{ord}_k(c) \equiv 1 \mod 3$ とする. X は k 上の対角的 3 次曲面

$$T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + c\,T_3^3 = 0$$

とする. $M = k(\zeta_3)$ かつ $q : X_M \to X$ とする. このとき $A_0(X)$ は非自明なゼロサイクル

$$q_* C'$$

で生成される. ここで

$$C' = \phi_*[Q_2] - \phi_*[P_{\zeta_3}]$$

とする. ここで Q_2, P_{ζ_3} は定理 2.2 の点とする. 但し, δ, e, u はそれぞれ M 上定義されたものとする. さらにこのことから, $A_0(X) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ となる.

§3. 証明の概略

この節では, 定理 2.2 の証明の概略と定理 2.3 の証明を紹介する. 証明の基本的方針は, マニンによって導入されたブラウアー・マニンペアリング ([6])

$$\langle\ ,\ \rangle : A_0(X) \times \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

をヒルベルト記号を用いて具体的に計算して非自明なゼロサイクルを明示的に構成することである.
ここで $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Im}(\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X))$ とする.
定理 1.2 の証明の概略: 3 つのステップに分けて説明する.
ステップ 1: ブラウアー・マニンペアリングから誘導される準同型写像

$$\Phi_X : A_0(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

がある. 今考えている対角的3次曲面は幾何学的有理曲面であることから, Φ_X が単射になることが分かる ([1] Prop.5, Prop.7). さらに右辺の群 $\mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ に同型でブラウアー群 $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ の生成元が $e_1 = \{c, f_1\}_{\zeta_3}, e_2 = \{c, f_2\}_{\zeta_3} (\in \mathrm{Br}(X))$ であることが分かっている ([2] Prop.1,[5] Example 45.3). ここで,

$$f_1 := \frac{T_0 + \zeta_3 T_1}{T_0 + T_1}, \quad f_2 := \frac{T_0 + T_2}{T_0 + T_1}$$

と定義し, 記号 $\{a, b\}_{\zeta_3}$ は

$$ {}_3\mathrm{Br}(k(X)) \overset{\cong}{\to} H^2(k(X), \mu_3^{\otimes 2});\ x \mapsto x \otimes \zeta_3. $$

による $\{a, b\} \in H^2(k(X), \mu_3^{\otimes 2})$ の逆像を表すものとする ($\mathrm{Br}(X)$ が $\mathrm{Br}(k(X))$ の部分群とみなせることに注意せよ). このことから $A_0(X)$ のゼロサイクル C_1, C_2 で, $\Phi_X(C_1)$ と $\Phi_X(C_1)$ が線形独立となるようなものが構成できれば Φ_X は全射となり, $A_0(X) \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ で生成元が C_1, C_2 となる.
ステップ 2: ステップ 1 で述べた C_1, C_2 を構成する.
以下の条件 $(*)$ を満たす X_L 上のゼロサイクル C'_1, C'_2 を考える.

$$ (*) \qquad \det M(C'_1, C'_2) \neq 0. $$

ここで $M(C'_1, C'_2)$ は,

$$ M(C'_1, C'_2) := \begin{pmatrix} \langle C'_1,\ e_1\rangle_{X_L} & \langle C'_1,\ e_2\rangle_{X_L} \\ \langle C'_2,\ e_1\rangle_{X_L} & \langle C'_2,\ e_2\rangle_{X_L} \end{pmatrix}. $$

このとき C'_1, C'_2 は線形独立であり, 以下の補題から $C_1 := \phi_* C'_1$, $C_2 := \phi_* C'_2$ が線形独立であることがわかる.

補題 3.1 (ブラウアー・マニンペアリングの射影公式)**.** ϕ: $Y \to X$ を k 上のスキームの固有射とする. このとき $C \in \mathrm{CH}_0(Y)$ と $\omega \in \mathrm{Br}(X)$ に対して, $\langle \phi_* C, \omega\rangle_X = \langle C, \phi^* \omega\rangle_Y$ が成り立つ.

ステップ 3: ステップ 2 で述べた条件 $(*)$ を満たすようなサイクル C'_1 と C'_2 を構成する.

$$ C'_1 := [Q_2] - [P_{\zeta_3}], \quad C'_2 := [Q_1] - [P_{\zeta_3}] $$

とする. ここで P_{ζ_3}, Q_l $(l = 1, 2)$ は, 定理 2.2 で紹介した L-値点である. 全ての点の構成に関する計算は紹介しきれないので, P_{ζ_3} のみ述べる (他の点の構成や詳しい計算は [11] 参照). さらにこの C'_1,C'_2 が条件 $(*)$ を満たしているかを確認する. 計算のために以下の補題が必要になる.

補題 3.2. $f_i(P) \neq 0$ となる X の閉点 P に対して,

$$ \zeta_3^{\langle [P],\ e_i\rangle} = (c, f_i(P))_{k(P)} \quad (i = 1, 2). $$

ここで右辺は $\bmod\ 3$ のヒルベルト記号, $k(P)$ は P での剰余体を表す. さらに $e_i = \{c, f_i\}_{\zeta_3} \in \mathrm{Br}(X)$ $(i = 1, 2)$ とおいた.

P_{ζ_3} の構成: P_{ζ_3} は $X(L)$ の元であることは容易に分かる. また, $f_1(P_{\zeta_3}) = \dfrac{1 + \zeta_3 \pi^e u}{1 + \pi^e u}$ で

あるから, ヒルベルト記号の値は,

$$\begin{aligned}(c, f_1(P_{\zeta_3}))_L &= \left(c, 1 + (\zeta_3 - 1)\frac{\pi^e u}{1+\pi^e u}\right)_L \\ &= \left(c, 1 - \pi^{e/2}\delta\frac{\pi^e u}{1+\pi^e u}\right)_L \\ &= \left(c, 1 - \pi^{e'}\frac{\delta u}{1+\pi^e u}\right)_L \\ &= \zeta_3^{-\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_L/\mathbb{F}_3}(\overline{(1-\zeta_3)^{-3}\pi^{e'}\delta u})} \\ &= \zeta_3.\end{aligned}$$

となる. 4 つ目の等号は明示的相互法則 (詳細は [7] の「ガロアコホモロジー」の稿 p.16–p.17, 及び [9] p.237, Proposition 6, Exercices 3 を参照) を用いた. 5 つ目の等号は u が $\mathscr{O}_L$ の元で,

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_L/\mathbb{F}_3}(\overline{(1-\zeta_3)^{-3}\pi^{e'}\delta u}) = 2$$

となることを用いた. 以下, 整数 $0 \leqq q \leqq 2$ を $(c,\ f_2(P_{\zeta_3}))_L = \zeta_3^q$ を満たすものとする. Q_l $(l = 1, 2)$ は

$$(c, f_1(Q_l))_L = 1, \quad (c, f_2(Q_l))_L = \zeta_3^l \quad (l = 1, 2)$$

を満たす点である.(構成の詳細は [11] 参照)

条件 $(*)$ のチェック：上の C_1',C_2' が条件 $(*)$ を満たすことを確認する. $M(C_1', C_2')$ は補題 3.2 を使って計算すると,

$$M(C_1', C_2') = \begin{pmatrix} 2 & 2-q \\ 2 & 1-q \end{pmatrix}$$

となる. これから q に依らず $\det M(C_1', C_2') = -2 \neq 0$ がわかる. 従って, $C_1 = \phi_*[Q_2] - \phi_*[P_{\zeta_3}]$,$C_2 = \phi_*[Q_1] - \phi_*[P_{\zeta_3}]$ が線形独立であることが示された.

定理 2.3 の証明: 定理 2.2 の証明と同様に, ブラウアー・マニンペアリングから誘導される準同型 $\Phi_X : A_0(X) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の単射性と右辺の群が $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に同型であることから $A_0(X) \subseteq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ が分かる. このときブラウアー群 $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ の生成元は $\mathrm{cor}_{X_M/X}(e_1)$ である ([4] Prop.2.1, [8] Prop.4.2.6). ここで $\mathrm{cor}_{X_M/X}$ は余制限写像 $\mathrm{Br}(X_M) \to \mathrm{Br}(X)$ を表すものとする. よって, $A_0(X)$ の元でこの生成元とのブラウアー・マニンペアリングが非自明なものを構成すればそれが求める生成元となっている. $A_0(X_M)$ の元 C' で $\langle C', e_1\rangle_{X_M} \neq 0$ なるものが定理 2.2 から構成できることが分かっている. このゼロサイクルを使って以下のペアリングが計算ができる.

$$\begin{aligned}\langle q_*C', \mathrm{cor}_{X_M/X}(e_1)\rangle_X &= \langle C', q^*q_*(e_1)\rangle_{X_M} \\ &= \langle C', (1+\sigma)e_1\rangle_{X_M} \\ &= 2\langle C', e_1\rangle_{X_M} \quad (\because \sigma(e_1) = e_1).\end{aligned}$$

ここで σ は $\mathrm{Gal}(M/k)$ の生成元を表す. 最初の等号は射影公式である ($\sigma(e_1) = e_1$ の詳細は [4] Prop.2.1, [8] Prop.4.2.6 を参照せよ). 以上から, q_*C' が求めるゼロサイクルである. よって $C' = \phi_*[Q_2] - \phi_*[P_{\zeta_3}]$ と取れば良い.

謝辞. 今回の研究集会において, 発表の場及びこの原稿を書く機会を与えてくださいました関係者の方々に心より感謝を申し上げます. そして, 注意深くこの原稿を読んで下さった査読者の方に感謝致します.

References

[1] Colliot-Thélène, J.-L.: Hilbert's theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces. Invent. Math. **71**, 1–20 (1983)

[2] Colliot-Thélène, J.-L., Kanevsky, D., Sansuc, J.J.: Arithmétique des surfaces cubiques diagonales. In: Diophantine approximation and transcendence theory (Bonn, 1985), Lecture Notes in Math. vol. 1290, pp. 1–108. Springer, Berlin (1987)

[3] Colliot-Thélène, J.-L., Saito, S.: Zéro-cycles sur les variétés p-adiques et groupe de Brauer. Int. Math. Res. Not. **4**, 151–160 (1996)

[4] Colliot-Thélène, J.-L., Wittenberg, O.: Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines. Amer. J. Math. **134**, no.5, 1303–1327 (2012)

[5] Manin, Y. I.: Cubic Forms. Algebra, Geometry, Arithmetic, vol 4. North-Holland Mathematical Library. North-Holland, Amsterdam. Translated from Russian by Hazewinkel, M. (1986)

[6] Manin, Y. I.: Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne. In: Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 401–411. Gauthier-Villars, Paris (1971)

[7] 落合理, 千田雅隆, 山内卓也 編, 2009 年度 (第 17 回) 整数論サマースクール 『l 進ガロア表現とガロア変形の整数論』 報告集 (2009)

[8] Saito, S., Sato, K.: Zero-cycles on varieties over p-adic fileds and Brauer groups. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **47** (3), 505–537 (2014)

[9] Serre, J.P.: *Corps locaux*. Hermann, Paris (1968)

[10] Uematsu, T.: Zero-cycles on diagonal cubic surfaces over p-adic fields. Math. Z. **279** no.3-4, 1047–1066 (2015)

[11] Yamamoto, K.: On generators of the Chow group of zero-cycles on diagonal cubic surfaces over 3-adic fields, Acta Arith. **181**, 75–84 (2017)