RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B72 (2018), 331–342

分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆の岩澤不変量（概説）
(On the Iwasawa invariants of branched $\mathbb{Z}_p$-covers, a survey)

By

植木 潤 (Jun Ueki)*

Abstract

In this article, we present several results in papers [Uek16] and [Uek17] relating to [NU18], [Uek14], [Uek18a], and [Uek18b]. First, we state an analogue of the genus formula for branched Galois covers of 3-manifolds branched over links. Secondly, we define branched $\mathbb{Z}_p$-covers as inverse systems of branched covers, and state the Iwasawa type formula. Thirdly, we state analogues of Iwasawa's theorems on the μ and λ-invariants for equivariant Galois morphisms of $\mathbb{Z}_p$-covers. Finally, we study an analogue of the Galois cohomology of unit groups of number fields.

§1. Introduction

本稿では「数論的位相幾何学」における代数体の整数環と 3 次元多様体，素イデアルと結び目の類似（M^2KR 辞書, [Mor12]）に基づき，古典的な「種の理論」，岩澤類数公式，岩澤 μ 不変量に関する 2 つの定理，岩澤 λ 不変量に関する「木田の公式」の類似を述べる．また単数群の類似として 2 サイクル群を考え，ガロア分岐被覆においてテイトコホモロジーを計算し，類似について新しい示唆を試みる．これは論文 [Uek16], [Uek17] の概説であるが，[NU18], [Uek14], [Uek18a], [Uek18b] との関係についても触れる．

以下では代数体と言ったら $\mathbb{Q}$ の有限次拡大で $\mathbb{C}$ 内に固定されたものとする．また 3 次元多様体には有向連結閉を仮定し，分岐被覆は絡み目で分岐するものとする．結び目や絡み目は断りが無い限り S^1 たちの埋め込みとし，アンビエントイソトピーで割らない．絡み目 K と L に対し $K \cap L = \phi$ なるとき，$\mathrm{lk}(K, L)$ で K と L の絡み数を表す．代数体 k

Received April 20, 2016. Revised August 12, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 57M12, 57M25, 57M27, 57M60, 11R23
Key Words: *branched cover, link, Iwasawa theory, arithmetic topology.*
*Department of Mathematics, School of System Design and Technology, Tokyo Denki University, 5 Senju Asahi-cho, Adachi-ku, Tokyo, 120-8551, Japan
e-mail: uekijun46@gmail.com

のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(k)$ の類似は 3 次元多様体 M の $H_1(M) := H_1(M, \mathbb{Z})$ である．精密な類似を考える際には M に有理ホモロジー 3 球面（$\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$）であるという条件を課す．これは $\#H_1(M) < \infty$ という条件と同値である．

§2. 種の理論

ガウスに端を発する代数体の「種の理論」が知られる．その 3 次元多様体への類似は，S^3 上のアーベル分岐被覆に対し，森下（[Mor01]）によって最初に与えられた．岩澤理論の類似を記述するには，底が一般の $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ である場合が必要である．ここでは代数体と 3 次元多様体に対し十分一般的と思われる結果を述べ，比較を行う．

§2.1. 代数体の種の理論

代数体のガロア拡大に対する「種の理論」は以下のように述べられる．

定義 2.1. 代数体の有限次ガロア拡大 F/k に対し，k のアーベル拡大と F の合成である最大の不分岐拡大 F^{g}/F を F/k の種拡大，拡大次数 $g_{F/k} = (F^{\mathrm{g}} : F)$ を F/k の種数という．

定理 2.2 ([Fur67])**.** F/k の最大アーベル部分拡大 F_0/k，イデアル類群 $\mathrm{Cl}(k)$，k の素点 $\mathfrak{p}$ と F の $\mathfrak{p}$ 上の素点 $\mathfrak{P}$，$F_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}$ の最大アーベル部分拡大の分岐指数 $e'_{\mathfrak{p}}$，単数群 $\mathcal{O}_k^\times$，至るところ局所ノルムな k の単数の群 η について次が成り立つ:

$$g_{F/k} = \frac{\#\,\mathrm{Cl}(k) \prod_{\mathfrak{p}} e'_{\mathfrak{p}}}{(F_0 : k)(\mathcal{O}_k^\times : \eta).}$$

定理 2.3 ([Yok67])**.** F/k が巡回拡大のとき，$G = \mathrm{Gal}(F/k) = \langle \sigma \rangle$ と置くと，$g_{F/k} = \#\,\mathrm{Cl}(F)^G = \#\,\mathrm{Cl}(F)_G = \#\,\mathrm{Cl}(F)/\,\mathrm{Cl}(F)^{1-\sigma}$ である．

§2.2. 3 次元多様体の種の理論

3 次元多様体のガロア分岐被覆に対し「種の理論」は以下のように述べられる．

定義 2.4 ([Uek16])**.** 3 次元多様体の有限次ガロア（正規）分岐被覆 $h : N \to M$ に対し，M の分岐アーベル被覆と h の（ガロア理論の意味での）合成によって得られる最大の不分岐被覆 $h^{\mathrm{g}} : N^{\mathrm{g}} \to N$ を h の種被覆，$g_h = \deg(h^{\mathrm{g}}) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ を h の種数という．

定理 2.5 ([Uek16])**.** 分岐絡み目を $L = \cup K_i$ とすると，h における各 K_i の分岐指数 e_i と h の最大アーベル部分被覆 h_0 について次が成り立つ:

$$g_h = \frac{\#H_1(M) \prod_i e_i}{\deg(h_0)}.$$

特に M が $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ であることは $g_h < \infty$ と同値である．

定理 2.6 ([Uek16]). h が巡回被覆のとき，$G = \mathrm{Gal}(h) = \langle\sigma\rangle$ とおくと $g_h = \#H_1(N)^G = \#H_1(N)_G = \#H_1(N)/(1-\sigma)H_1(N)$.

定理 2.5 は，直接示すことができるが，新甫のイデール理論（[Nii14], [NU18]）を用いると [Fur67] と並行な議論を行うことができ，原証明を視覚的に理解できる．定理 2.6 は Hochschild–Serre スペクトル系列などによる．

3 次元多様体 M 内の絡み目 $L = \cup_i K_i$ に対して「各連結成分 K_i が M において可縮である」ということと，$H_1(M-L)_{\mathrm{free}} := H_1(M-L)/(\mathrm{torsion})$ が K_i のメリディアンたちを含む $\mathbb{Z}$ 基底を持つこととは同値である（[Uek17] Theorem 4.4）.[1]この条件は次節で TLN 被覆を定める時に現れる．

3 次元多様体の側では分解群がいつでもアーベルなので，数論側の $e'_{\mathfrak{p}}$ に対応する項は，$e_{\mathfrak{p}}$ の対応物 e_i となっている．また，種数公式の右下の単数に関わる項が消えている．これは M が $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ の場合に単イデールと主イデールの交わりが自明であることによる．（[Uek14] による $\mathrm{M}^2\mathrm{KR}$ 辞書の variation の提案によれば，h と整合的な CW 構造を固定したとき，$\mathcal{O}_k^\times$ と $F^\times$ の対応物は $Z_2(M)$ と $C_2(N)$ である．項の消滅は $h_* : C_2(N) \to C_2(M)$ の全射性に整合する.）

系 2.7. [Uek14] の結果と比べると，$\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ 上の有限次巡回分岐被覆 $h : N \to M$ 上に h と両立する CW 構造または PL 構造を固定した時，$G = \mathrm{Gal}(h)$ と 2 サイクル群のテイトコホモロジーの Herbrand 商について $\#\widehat{H}^0(G, Z_2(N))/\#\widehat{H}^1(G, Z_2(N)) = 1/\deg(h)$ が従う．これは [Uek17] における $\widehat{H}^i(G, Z_2(N))$ の直接計算の結果と整合する.（§6 も参照.）

定義 2.8. 定理 2.5 の設定で，K_i たちが可縮と仮定する．$B = \mathrm{Ker}(H_1(N - h^{-1}(L)) \to H_1(N))$ とおくと準同型 $\Phi : H_1(N) \to H_1(M-L)/h_*(B) \overset{\cong}{\to} H_1(M) \oplus \prod_i \mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z}; [c] \mapsto ([h(c)], (\mathrm{lk}(c, K_i) \bmod e_i)_i)$ が定まる．$a, b \in H_1(N)$ の像が一致するとき同種であると呼ぶことにすると，S^3 上の同種の概念（[Mor12]）の拡張を与える．

§ 3. 虚 2 次体の $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大とその類似

以後，p は固定された素数とし，$\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環 $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を表す．$\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k に関する岩澤理論と $\mathbb{Z}$ 被覆に関する Alexander–Fox 理論の類似は古典的によく知られている（[Maz64]）．その中で特に「絡み方」に関わる現象を観察したい．この節の内容は水澤靖氏・門上晃久の 2 氏らとの議論による．

§ 3.1. 虚 2 次体の $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大

まず虚 2 次体の $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大を考える．素数 p, q に対し $p \neq 2$ とし，Legendre 記号 $\left(\dfrac{-q}{p}\right) = 1$ を仮定する．これは虚 2 次体 $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-q})$ の整数環において，イデアル (p) が 2 つの

[1]以前この条件を定理の仮定に置いていたが，不要であることが分かった．

相異なる素イデアルの積に分解するための必要十分条件である．k の最大自由アーベル p 拡大は，円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 $k_\infty^{\mathrm{c}}=k\mathbb{Q}_\infty$ と反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞^{ac} と呼ばれる二つの特徴的な $\mathbb{Z}_p$ 拡大の合併であるような $\mathbb{Z}_p^2$ 拡大である．前者において q は有限分解（$q\not\equiv 1 \bmod p^2$ なら完全惰性）であり，後者において q は完全分解である．

§3.2. S^3 の 2 次被覆の $\mathbb{Z}^2$ 被覆

次に M を 3 次元多様体，$L=\cup K_i$ を M 内の有向絡み目とし，K_i たちは可縮とする．$\mu_i\in H_1(M-L)$ を K_i の向きに対応するメリディアンとする．準同型 $\tau: H_1(M_L)\twoheadrightarrow\mathbb{Z}$ であって任意の i に対し $\tau(\mu_i)=1$ なるものに対応する $M-L$ 上の $\mathbb{Z}$ 被覆を (M,L) 上の total linking number 被覆（TLN 被覆）と呼ぶ．またその部分 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆から Fox 完備化によって得られる分岐被覆を $h_n: M_n\to M$ と書く．(M,L) 上の TLN 被覆は，M が $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ ならば一意である．絡み数について，次が成り立つ．

命題 3.1. 結び目 $K\subset M-L$ は，$\mathrm{lk}(K,L)>0 \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ 各 h_n において $\gcd(n,\mathrm{lk}(K,L))$ 個に分解（有限分解），$\mathrm{lk}(K,L)=0 \underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の h_n で完全分解である．

さて，2 成分絡み目 $K\cup K'\subset S^3$ を考え，$\mathrm{lk}(K,K')=2e$, $e\in\mathbb{N}_{>0}$ とし，K' で分岐する 2 次分岐被覆 $h: M\to S^3$ を考える．すると $h^{-1}(K)=K_1\cup K_2$ は 2 成分絡み目となる．M が $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ と仮定する．K_i のメリディアンを μ_i とし，二つの準同型 $H_1(M-K_1\cup K_2)\to\mathbb{Z}; \tau_{\mathrm{c}}:(\mu_1,\mu_2)\mapsto(1,1), \tau_{\mathrm{ac}}:(\mu_1,\mu_2)\mapsto(1,-1)$ を考える．前者は $(M,K_1\cup K_2)$ 上の TLN 被覆 $\widetilde{M}^{\mathrm{c}}$, 後者は K_2 の向きを逆にしたもの $(M,K_1\cup\overline{K_2})$ 上の TLN 被覆 $\widetilde{M}^{\mathrm{ac}}$ を定める．$\mathrm{lk}(h^{-1}(K'),K_1\cup K_2)=2e>0$, $\mathrm{lk}(h^{-1}(K'),K_1\cup\overline{K_2})=0$ ゆえ，$h^{-1}(K')$ は $\widetilde{M}^{\mathrm{c}}$ で有限分解，$\widetilde{M}^{\mathrm{ac}}$ で完全分解となる．

こうした現象が岩澤不変量に関する定理の仮定を説明する．

§4. 岩澤 μ 不変量に関する定理

絡み目の岩澤不変量は初め S^3 上の分岐 $\mathbb{Z}$ 被覆の部分列として得られる $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 被覆の逆系に対して定義され（[HMM06]），後に $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ 上の場合に拡張された（[KM08], [KM13]）．ここでは $\mathbb{Z}$ 被覆の部分列として得られないような対象にまで拡張した結果を述べる．また $\mathbb{Z}_p$ 体の拡大の類似として「$\mathbb{Z}_p$ 被覆の射」を考え，岩澤 μ 不変量に関する 2 つの定理の類似を与える．

§4.1. $\mathbb{Z}_p$ 体とその拡大

ここでは $\mathbb{Z}_p$ 体とその拡大に関する結果を復習する．代数体 k の $\mathbb{Z}_p$ 拡大として得られる体 k_∞ を $\mathbb{Z}_p$ 体と呼ぶ．k_∞/k に対し $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 拡大 k_n/k の列が決まり，次が成り立つ:

定理 4.1 (岩澤類数公式, [Iwa59]). 岩澤不変量と呼ばれる定数 $\lambda,\mu\in\mathbb{N},\nu\in\mathbb{Z}$ があって次の等式を満たす:

$$|\#\,\mathrm{Cl}(k_n)|_p^{-1}=p^{\lambda n+\mu p^n+\nu}\ (n\gg 0).$$

ここに $|\ |_p$ は正規化された p 進ノルムを表す．$\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞/k の岩澤不変量を $\lambda_{k_\infty/k}$, $\mu_{k_\infty/k}$, $\nu_{k_\infty/k}$ などと書くことがある．λ の値と $\mu=0$ か否かという性質は底 k の取り方によらず $\mathbb{Z}_p$ 体 k_∞ のみから決まるので，底を固定せずに λ_{k_∞} や $\mu_{k_\infty}=0$ などとも書く．代数体の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞^{c} に対し $\mu=0$ が岩澤により予想され，k が $\mathbb{Q}$ 上アーベルなときは [FW79] により真である．次の二つの結果は，$\mathbb{Z}_p$ 体のガロア拡大に対するものであり，いずれも種の理論の公式を用いて示される．

定理 4.2 ([Iwa73]).　$k/\mathbb{Q}$ を 1 の原始 p 乗根を含む d 次拡大，k_∞/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大とし，k の素イデアル $p_1,\dots,p_t$ が k_∞/k で完全分解とする．$F=k(\sqrt[p]{p_1\cdots p_t})$, $F_\infty=Fk_\infty$ とおくと $\mu_{F_\infty/F}\geq t-d$ である．

k を $p>2$ のとき p 番目，$p=2$ のとき 4 番目の円分体とすると，k のある $\mathbb{Z}_p$ 拡大（反円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大 k_∞^{ac}/k）は完全分解な素イデアルを無数に持ち，任意の $N\in\mathbb{N}$ に対し $\mu_{F_\infty/F}\geq N$ なる p 次拡大 F/k と $\mathbb{Z}_p$ 拡大 F_∞/F が存在する．

定理 4.3 ([Iwa73]).　k を代数体（$p=2$ なら総虚），k_∞/k を $\mathbb{Z}_p$ 拡大，F/k を有限次ガロア拡大とし，$F_\infty=k_\infty F$ と置く．もし F/k の分岐素イデアルがすべて k_∞/k で有限分解ならば，$\mu_{k_\infty/k}=0$ と $\mu_{F_\infty/F}=0$ は同値である．

§4.2.　分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆とその射

まず代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の精密な類似物として，次の概念を導入する:

定義 4.4 ([Uek17]).　3 次元多様体 M 内の絡み目 L に対し，L で分岐する $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 被覆のなす逆系 $\widetilde{M}=\{h_n:M_{p^n}\to M\}_n$ を (M,L) 上の分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆という．

分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆は，副 p 完備化からの全射を導くような準同型 $\tau:\pi_1(M-L)\to\mathbb{Z}_p$ に，同型を除き対応する．

定理 4.5 (岩澤型公式, [Uek17]).　M_{p^n} たちが $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ のとき，ある $\lambda,\mu\in\mathbb{N},\nu\in\mathbb{Z}$ があり次の等式を満たす:

$$|\#H_1(M_{p^n})|_p^{-1}=p^{\lambda n+\mu p^n+\nu}\ (n\gg 0).$$

分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆 $\widetilde{M}$ の岩澤不変量を $\lambda_{\widetilde{M}},\mu_{\widetilde{M}},\nu_{\widetilde{M}}$ などと書くことがある．この定理は [HMM06], [KM08] の拡張である．[KM08] では Mayberry–Murasugi の公式 [MM82] の帰結として公式が得られた．上に述べた拡張は [KM08] で扱われた場合に帰着することが出来る．[Uek17] では，Sakuma の完全列の p 進版を示すことで，岩澤加群 $\varprojlim H_1(M_{p^n},\mathbb{Z}_p)$ に対して有限生成捻れ $\mathbb{Z}_p[[T]]$ 加群の構造定理を用いて，数論の場合と平行な別証明も与えた．併せて，木田の公式の岩澤による第二証明の類似を述べるために必要となる，トランスファー写像についての順極限 $\varinjlim H_1(M_{p^n},\mathbb{Z}_p)$ の構造定理を得た．

なお [Uek18b] では実 $\log_p$ と Shnirel'man 積分を用いた p 進 Mahler 測度を独自に導入し，被約 Alexander 多項式 $A_L(t)$ の Mahler 測度を用いた $H_1(M_n)$ の位数の漸近公式

の p 進ノルム版を示した．岩澤型公式はそれを p 冪次部分に制限したものの精密化に当たり，岩澤 μ 不変量と p 進 Mahler 測度 $\mathrm{m}_p(A_L(t))$ は同じ情報を持っている．また [Nog07] の拡張に当たる，絡み目の $\mathbb{Z}$ 被覆における岩澤 μ 不変量，$\mathrm{m}_p(A_L(t))$，メリディアン力学系の p 進エントロピー h_p のバランス公式も与えた．

次に $\mathbb{Z}_p$ 体のガロア拡大の類似物を考える:

定義 4.6 ([Uek16]). $\widetilde{M} = \{h_n : M_{p^n} \to M\}_n$ と $\widetilde{N} = \{h_n : N_{p^n} \to N\}_n$ をそれぞれ (M, L) と (N, L') 上の分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆とする．分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆の射 $\widetilde{f} : \widetilde{N} \to \widetilde{M}$ とは，分岐被覆の族 $\{f_n : N_{p^n} \to M_{p^n}\}_n$ であって逆系の射たちと可換であるものをいう．f_n たちが全てガロアであるとき $\widetilde{f}$ をガロアな射といい，さらに $\mathrm{Gal}(f_n)$ たちが自然な射について同型であるとき $\widetilde{f}$ を同変ガロアな射という．

分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆の射 $\widetilde{f} : \widetilde{N} \to \widetilde{M}$ を考え，上の記号を用いる．L, L' が $\widetilde{M}, \widetilde{N}$ で真に分岐ならば $L' = h^{-1}(L)$ である．$\widetilde{f}$ が同変ガロアであると仮定すると，f_n の分岐絡み目 $\overline{S}_n$ は $\overline{S}_n \subset h_n^{-1}(\overline{S}_0)$ を満たす．$X = M - (L \cup \overline{S}_0), Y = N - (L' \cup f_0^{-1}(\overline{S}_0))$ とおく．$\widetilde{M}$ と $\widetilde{N}$ の定義射 τ, τ' について次の可換図式がある．

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, hook, "f_{0*}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{Z}_p \arrow[d, "\iota"', "\cong"] \\
\pi_1(X) \arrow[r, "\tau'"] & \mathbb{Z}_p
\end{tikzcd}$$

逆に，ガロア分岐被覆 $f_0 : N \to M$ とこのような図式を与えると同変ガロア射 $\widetilde{f}$ が定まる．このとき $\overline{S}_0$ が $\widetilde{M}$ で不分岐ならば $\overline{S}_n = h_n^{-1}(\overline{S}_0)$ かつ $L \cap \overline{S}_0 = \phi$ である．

次は岩澤の定理（定理 4.2, 4.3）の類似である．いずれも種の理論の公式（定理 2.5, 2.6）を用いて示される．

定理 4.7 ([Uek16]). $\widetilde{f} : \widetilde{N} \to \widetilde{M}$ を $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ からなる分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆の p 次同変ガロア射とし，$f_0 : N \to M$ は t 成分絡み目 $\overline{S}_0$ で分岐とする．$\overline{S}_0$ が $\widetilde{M}$ で完全分解ならば $\mu_{\widetilde{N}} \geq t$ である．

定理 4.8 ([Uek16]). 加えて，$\widetilde{f}$ を p 冪次同変ガロア射とする．f_0 の分岐絡み目 $\overline{S}_0$ が $\widetilde{M}$ で有限分解ならば，$\mu_{\widetilde{M}} = 0$ と $\mu_{\widetilde{N}} = 0$ は同値である．

なお [Uek18a] では，ここで考えたのと同じように 2 つの副有限巡回被覆（分岐 $\widehat{\mathbb{Z}}$ 被覆）の間の射を考察することで，結び目群の副有限完備化の同型類が Alexander 多項式を決定するという結果を得た．

§5. 岩澤 λ 不変量に関する定理

リーマン面の分岐被覆 $f: R' \to R$ に対して Riemann–Hurwitz の公式が有名である:

$$2g' - 2 = \deg(f)(2g-2) + \sum_{P' \in R'} (e(P') - 1).$$

ここに g, g' は R, R' の種数，$e(P')$ は $P' \in R'$ の分岐指数とする．

$\mathbb{Z}_p$ 体の拡大は $\mu = 0$ のとき関数体と似ており λ 不変量がリーマン面の種数の類似と見られることが知られる．各 $k \subset \mathbb{C}$ に対し $k_+ = k \cap \mathbb{R}$ と書く．

定理 5.1 (木田の公式, [Kid80]). $p > 2$，F/k を CM 体の p 冪次数拡大，k_∞/k と F_∞/F を円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大とする．k が 1 の p 冪根を含む時，次が成り立つ:

$$\lambda^-_{F_\infty/F} - 1 = (F:k)(\lambda^-_{k_\infty/k} - 1) + \sum_w (e_w - 1) - \sum_{w_+} (e_{w_+} - 1).$$

ここに λ^- は負部分の λ 不変量と呼ばれるものであり，w と w_+ はそれぞれ F_∞ と $F_{\infty,+}$ の非 p 素点を走り，e_w と e_{w_+} はそれぞれ F_∞/k_∞ と $F_{\infty,+}/k_{\infty,+}$ における w と w_+ の分岐指数を表す.

木田による最初の証明は，種の理論を用いて与えられた．後に岩澤が別証明を 2 通り与えた（[Iwa81]）．それは有限群の p 進表現を用いて Chevalley–Weil の方法を真似ることで，関数体との類似を際立たせるものであった．そのうち第二の証明は，より一般の p 次拡大において，単数群のテイトコホモロジーを用いた次の表示を示すことによった:

補題 5.2 ([Iwa81], a corollary of Theorem 6). F_∞/k_∞ を円分 $\mathbb{Z}_p$ 体の p 次拡大とし無限素点で不分岐とする．$\mu_{k_\infty} = 0$ を仮定すると $\mu_{F_\infty} = 0$ であり，

$$\lambda_{F_\infty} = p\lambda_{k_\infty} + \sum_w (e_w - 1) + (p-1)(\hbar_2 - \hbar_1)$$

が成り立つ．ここに w は F_∞ の非 p 素点を走り，e_w は w の F_∞/k_∞ における分岐指数を表し，$\hbar_i$ は $H^i(\mathrm{Gal}(F_\infty/k_\infty), \mathcal{O}^*_{F_\infty})$ の p ランクを表す.

木田の公式の分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆への類似は次のように述べられる:

定理 5.3 ([Uek17]). $\widetilde{f}: \widetilde{N} \to \widetilde{M}$ を $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ からなる分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆の p 冪次同変ガロア射し，前節と同じ記号を使う．f_0 の分岐絡み目 $\overline{S}_0$ が $\widetilde{M}$ で無限惰性とすると，$\overline{S}_0$ は $\widetilde{N}$ でも無限惰性である．また $\mu_{\widetilde{M}} = 0$ を仮定すると $\mu_{\widetilde{N}} = 0$ となる．さらに $\overline{S}_0$ が f_0 で非惰性（つまり任意の部分被覆で非惰性）とする．$\overline{S}_0$ の N_{p^n} における逆像 S_n について，e_w が $\mathcal{S} := \varprojlim_n S_n$（または $n \gg 0$ に対する S_n）の連結成分の分岐指数を走る時，次が成り立つ:

$$\lambda_{\widetilde{N}} - 1 = \deg(f)(\lambda_{\widetilde{M}} - 1) + \sum_{w \subset \mathcal{S}} (e_w - 1).$$

[Uek17] では，2-サイクル群を単数群の類似と見做す立場から，逆系の射と両立するPL/CW 構造のトランスファー写像に関する順極限を考えることで，[Iwa81] の第二証明と並行な議論を与えた．

他に「木田の公式」の別証明として，Gras と Sinnott による L 関数を用いた手法が有名である（[Gra79], [Sin84]）．3 次元多様体の側において L 関数の類似物は幾つかの候補が知られているが，彼らの証明の類似を考察することで，我々の文脈における「正しい L 関数」を特定できるのではないかと期待する．

§6. 単数群と 2 サイクル群のテイトコホモロジー

代数体の整数環のイデアル類群の類似物は一次ホモロジー群であるが，単数群の類似物については諸説あり，役割ごとに対応物が異なるという見方もある．[Mor12] には 2 次ホモロジー群であると書かれているが，ここでは 3 次元多様体の分岐被覆に対し被覆写像と整合する PL/CW 構造を固定し，2 サイクル群を考える．この態度には幾つかの利点がある．まず，次の平行な完全列がある．

$1 \to P(k) \to I(k) \to \mathrm{Cl}(k) \to 1$	$0 \to B_1(M) \to C_1(M) \to H_1(M) \to 0$
$1 \to \mathcal{O}_k^\times \to k^\times \to P(k) \to 1$	$0 \to Z_2(M) \to C_2(M) \to B_1(M) \to 0$

ただし代数体 k に対し，$P(k)$ を k の主イデアル群，$I(k)$ をイデアル群とする．3 次元多様体 M に対しては PL/CW 構造を固定している．さらに，次の定理がある．

定理 6.1 ([Uek14])**.** $f: N \to M$ を 3 次元多様体のガロア分岐被覆とし，$G = \mathrm{Gal}(f)$ とおき，f と整合する PL/CW 構造を固定する．この時 2 サイクル群のテイトコホモロジー $\widehat{H}^i(G, Z_2(N))$ $(i \in \mathbb{Z})$ は分岐被覆の位相不変量である．

なお $\widehat{H}^i(G, Z_2(N))$ は $\widehat{H}^i(G, H_2(N))$ よりも多くの情報を持ちうる．例えば N が $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ ならば後者は自明となるが前者は一般には自明とならない．

この立場から得られた結果として，横井による種の理論の定式化（[Yok67]）と，木田の公式の岩澤による第二の証明（[Iwa81]）の類似の記述がある（[Uek14], [Uek17]）．以下では，後者において用いられる数論側の計算結果とそれに対応する 3 次元多様体側の詳しい結果を交互に述べることで，平行な証明を回すためのレシピが揃っていることを確認する．（以下の記述が，辞書の育成に資することを期待する．）

§6.1. 単数群と 2 サイクル群

命題 6.2. F/k を代数体の有限次ガロア拡大とし，$G = \mathrm{Gal}(F/k)$ とおくとき，
(1) [Hilbert's Satz 90] $\widehat{H}^1(G, F^\times) = 0$.
(2) [Iwa56] もし $\mathrm{Cl}(F) = 1$ ならば，各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\widehat{H}^i(G, \mathcal{O}_F^\times) \overset{\cong}{\to} \widehat{H}^{i-1}(G, C_F) \overset{\cong}{\to} \widehat{H}^{i-3}(G, \mathbb{Z})$. ここに C_F はイデール類群を表す.（円分拡大なども計算可能と述べられている.）

命題 6.3 ([Uek17]). $f : N \to M$ を 3 次元多様体の有限次ガロア分岐被覆とし，$G = \mathrm{Gal}(f)$ とおく．被覆と整合的な PL/CW 構造を固定すると，各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して，
(1) $\widehat{H}^i(G, C_2(N)) = 0$.
(2) 完全列 $\cdots \to \widehat{H}^{i+1}(G, H_3(N)) \to \widehat{H}^i(G, Z_2(N)) \to \widehat{H}^i(G, H_2(N)) \to \widehat{H}^{i+2}(G, H_3(N)) \to \cdots$ がある．特に N が $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ ならば，$\widehat{H}^i(G, Z_2(N)) \cong \widehat{H}^{i+1}(G, H_3(N)) \cong \widehat{H}^{i+1}(G, \mathbb{Z})$ という同型がある．

§6.2. S イデアルと S サイクル

F/k を代数体または $\mathbb{Z}_p$ 体の有限次ガロア拡大，$\overline{S}$ を k の素イデアルの有限集合とし，$\overline{S}$ 上の F の素イデアル集合を S と書く．このとき S イデアル群 $I_{F,S}$，主 S イデアル群 $P_{F,S}$，S イデアル類群 $\mathrm{Cl}_{F,S}$，S 単数群 $\mathcal{O}_{F,S}^{\times}$ が定まり，$G = \mathrm{Gal}(F/k)$ 加群の完全列をなす:

$$0 \to P_{F,S} \to I_{F,S} \to \mathrm{Cl}_{F,S} \to 0$$
$$0 \to \mathcal{O}_{F,S}^{\times} \to F^{\times} \to P_{F,S} \to 0$$

k の素イデアル $\mathfrak{p}$ 上の F のイデアルが成す群を $I_{F,\mathfrak{p}}$，$\mathfrak{p}$ の分解群を $Z_{\mathfrak{p}}$ と書くと，$I(F) = \oplus_{\mathfrak{p}} I_{F,\mathfrak{p}}$, $\widehat{H}^i(G, I(F)) = \oplus_{\mathfrak{p}} \widehat{H}^i(G, I_{F,\mathfrak{p}}) \cong \oplus_{\mathfrak{p}} \widehat{H}^i(Z_{\mathfrak{p}}, \mathbb{Z})$ なる同型がある．

命題 6.4 ([Iwa81]). F/k を無限素点で不分岐な p 次ガロア拡大，$G = \mathrm{Gal}(F/k)$ とし，S を非 p 分岐素イデアルの集合とする．S は有限集合である．
(1) 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $\widehat{H}^i(G, I_{F,S}) = \oplus_{\mathfrak{p} \notin S} \widehat{H}^i(G, I_{\mathfrak{p}})$ であり，これが消える条件は S 外のイデアルが惰性しないことである．(k が代数体の時には消えない．)
(2) S の元が生成する $I(F)$ の部分群 $I_S \cong \mathbb{Z}^{\#S}$ のある指数有限部分群 $P(F) \cap I_S$ に対し，$\mathcal{O}_{F,S}^{*}/\mathcal{O}_F^{*} \cong P(F) \cap I_S$ なる同型があり，$\widehat{H}^1(G, \mathcal{O}_{F,S}^{*}/\mathcal{O}_F^{*}) = 0, \widehat{H}^2(G, \mathcal{O}_{F,S}^{*}/\mathcal{O}_F^{*}) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\#S}$ である．

次に $f : N \to M$ を有限次ガロア分岐被覆，$\overline{S}$ を M 内の絡み目とし，S の各成分は f の分岐絡み目に含まれるか交わらないかであると仮定し，$S = f^{-1}(\overline{S})$ と書く． S イデアルの類似は，空間対の鎖群から得られるものではなく，以下のように定義する．$0 \to B_1(S) = 0 \to Z_1(S) \overset{\cong}{\to} H_1(S) \to 0$ と $\iota : S \hookrightarrow N$ から導かれる射を考え，$Z_1(S)$ と $\iota_*(Z_1(S)$ を同一視する．$Z_1(N)_S = Z_1(N)/Z_1(S)$，$H_1(N)_S := H_1(N)/\iota_*(H_1(S))$，$B_1(N)_S = B_1(N)/B_1(N) \cap Z_1(S)$ とおく．さらに $\partial : C_2(N) \to C_1(N)$ による $Z_1(S)$ の逆像を $Z_2(N)_S$ とおく．すると $Z_2(N)_S \cong Z_2(N, S)$ である．次の $G = \mathrm{Gal}(f)$ 加群の完全列を得る．

$$0 \to B_1(N)_S \to Z_1(N)_S \to H_1(N)_S \to 0$$
$$0 \to Z_2(N)_S \to C_2(N) \to B_1(N)_S \to 0$$

命題 6.5 ([Uek17]). $f : N \to M$ を有限次ガロア分岐被覆とし $G = \mathrm{Gal}(f)$ とする．$\overline{S}$ を分岐絡み目とし $S = f^{-1}(\overline{S})$ とおく．
(i) $S \neq \phi$ ならば，各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し $\widehat{H}^i(G, Z_1(N)_S) \cong \widehat{H}^{i-1}(G, \mathrm{Ker}(\iota_* : H_0(S) \to H_0(N)))$ という同型がある．特に $\deg(f) = p$ のとき，$\overline{S}$ の成分数を s とすると，$\widehat{H}^0(G, Z_1(N)_S) = 0$，$\widehat{H}^1(G, Z_1(N)_S) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{s-1}$ である．

(ii) $S=\phi$ ならば，f は不分岐で，各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して $\widehat{H}^i(G,Z_1(N))\cong\widehat{H}^i(G,H_0(N)))\cong\widehat{H}^i(G,\mathbb{Z})$ である．特に $\deg(f)=p$ のとき，$\widehat{H}^0(G,Z_1(N))\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$，$\widehat{H}^1(G,Z_1(N))=0$ である．

命題 6.6 ([Uek17])**.** $f:N\to M$ を p 次の有限次ガロア分岐被覆とし $G=\mathrm{Gal}(f)$ とする．$\overline{S}$ を分岐絡み目とし $S=f^{-1}(\overline{S})$ とおく．S の各成分が $\mathbb{Q}$ 上可縮と仮定する.（この仮定は N が $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ のとき満たされる.）このとき，ある指数有限部分群 $B_1(N)\cap Z_1(S)<Z_1(S)\cong\mathbb{Z}^s$ に対し $Z_2(N)_S/Z_2(N)\cong B_1(N)\cap Z_1(S)$ であり，$\widehat{H}^1(G,Z_2(N)_S/Z_2(N))=0$，$\widehat{H}^2(G,Z_2(N)_S/Z_2(N))\cong(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^s$ である．

§6.3. $\mathbb{Z}_p$ 体の拡大と $\mathbb{Z}_p$ 被覆の射の場合

巡回群 G と G 加群 A に対し $\#\widehat{H}^i(G,A)<\infty$ のとき，$q(A)=\#\widehat{H}^2(G,A)/\#\widehat{H}^1(G,A)$ を Herbrand 商と呼ぶ．岩澤の議論で用いられた事実と対応する計算結果を以下に述べる．最後の s に対応して，木田の公式における分岐指数の項が得られる．

命題 6.7 ([Iwa81])**.** F_∞/k_∞ を円分 $\mathbb{Z}_p$ 体の p 次拡大，S を分岐素イデアル（の上の素イデアル）の集合とし，$s=\#S$ とおく．このとき以下が成り立つ．
(1) [Lemma 5] 各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して $\widehat{H}^i(G,F_\infty^\times)=0$.
(2)[2] k_∞ が 1 の p 冪根を持つとき, 単数群の負部分 $\mathcal{O}_F^{\times-}$ を考えると，$\hbar_i^-:=\mathrm{rank}\widehat{H}^i(G,\mathcal{O}_F^{\times-})$ に対し $\hbar_2^--\hbar_1^-=-1$.
(3) [Lemma 1] 各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して $\widehat{H}^i(G,I_{F_\infty,S})=0$.
(4) $q(\mathcal{O}_{F_\infty,S}^\times)=q(\mathcal{O}_{F_\infty}^\times)p^s$.

命題 6.8 ([Uek17])**.** 分岐 $\mathbb{Z}_p$ 被覆の同変ガロア射 $f:\widetilde{N}\to\widetilde{M}$ に対し，$G=\mathrm{Gal}(f)$ とおき，系内の全ての射と整合する PL/CW 構造を取る．$\overline{S}_0\subset M$ を絡み目とし，その成分は f_0 の分岐成分の逆像に交わらないか含まれるかであるとする．$\overline{S}_0$ の N_{p^n} における逆像を S_n とし，逆系 $\widetilde{S}=\{S_n\}_n$ を考える．$\mathbb{Z}_p$ 被覆の鎖群等を各階の鎖群等のトランスファーによる順極限によって定義すると，各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して次が成り立つ．
(1) $\widehat{H}^i(G,C_2(\widetilde{N}))=0$.
(2) $\widetilde{M}$ と $\widetilde{N}$ が $\mathbb{Q}\mathrm{HS}^3$ からなるとき，$\widehat{H}^i(G,Z_2(\widetilde{N}))\cong\widehat{H}^{i+1}(G,\mathbb{Z})$ である．とくに $\deg(f)=p$ のとき，$\hbar_i:=\mathrm{rank}\,\widehat{H}^i(G,Z_2(N))$ は $\hbar_1=1,\hbar_2=0$ である．
(3) $\deg(f)=p$ のとき，$\widehat{H}^i(G,Z_1(\widetilde{N})_{\widetilde{S}})=0$ である．
(4) $\deg(f)=p$ とし，$\overline{S}_0$ が f_0 の分岐絡み目であり $\widetilde{M}$ で無限惰性とする．このとき S_0 も $\widetilde{N}$ で無限惰性である．さらに S_n たちが $\mathbb{Q}$ 上可縮とする．s を $\mathcal{S}=\varprojlim S_n$（または $n\gg0$ に対する S_n）の成分数とする．するとある指数有限部分群 $B_1(\widetilde{N})\cap Z_1(\widetilde{S})<Z_1(\widetilde{S})\cong\mathbb{Z}^s$ に対し $Z_2(\widetilde{N})_{\widetilde{S}}/Z_2(\widetilde{N})\cong B_1(\widetilde{N})\cap Z_1(\widetilde{S})$ なる同型があり，$\widehat{H}^1(G,Z_2(\widetilde{N})_{\widetilde{S}}/Z_2(\widetilde{N}))=0$，$\widehat{H}^2(G,Z_2(\widetilde{N})_{\widetilde{S}}/Z_2(\widetilde{N}))\cong(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^s$ である．特に $q(Z_2(\widetilde{N})_{\widetilde{S}})=q(Z_2(\widetilde{N})p^s$.

[2]文献中に明示されてはいない．

これらは，各階のトランスファー写像 $h^!_{n,n+1}$ が $H_0(N_{p^n}) \cong \mathbb{Z}$ の上では p 倍，$H_3(N_{p^n}) \cong \mathbb{Z}$ の上では恒等写像であることに気をつけると，前小節までの有限次被覆の場合の計算から得られる．

謝辞

発表の機会を下さった研究集会の組織委員の先生方，また有用なコメントを下さった査読者の方に感謝します．本研究は JSPS 科研費（課題番号 25-2241）の助成を受けたものです．

References

[Fur67] Yoshiomi Furuta, *The genus field and genus number in algebraic number fields*, Nagoya Math. J. **29** (1967), 281–285. MR 0209260 (35 #162)

[FW79] Bruce Ferrero and Lawrence C. Washington, *The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields*, Ann. of Math. (2) **109** (1979), no. 2, 377–395. MR 528968 (81a:12005)

[Gra79] Georges Gras, *Sur les invariants “lambda” d’Iwasawa des corps abéliens*, Number theory, 1978–1979, Publ. Math. Fac. Sci. Besançon, Univ. Franche-Comté, Besançon, 1979, pp. Exp. No. 5, 37. MR 747996 (85i:11093)

[HMM06] Jonathan Hillman, Daniel Matei, and Masanori Morishita, *Pro-p link groups and p-homology groups*, Primes and knots, Contemp. Math., vol. 416, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, pp. 121–136. MR 2276139 (2008m:57010)

[Iwa56] Kenkichi Iwasawa, *A note on the group of units of an algebraic number field*, J. Math. Pures Appl. (9) **35** (1956), 189–192. MR 0076803 (17,946h)

[Iwa59] ———, *On Γ-extensions of algebraic number fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 183–226. MR 0124316 (23 #A1630)

[Iwa73] ———, *On the μ-invariants of Z_ℓ-extensions*, Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Yasuo Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp. 1–11. MR 0357371 (50 #9839)

[Iwa81] ———, *Riemann-Hurwitz formula and p-adic Galois representations for number fields*, Tôhoku Math. J. (2) **33** (1981), no. 2, 263–288. MR 624610 (83b:12003)

[Kid80] Yûji Kida, *l-extensions of CM-fields and cyclotomic invariants*, J. Number Theory **12** (1980), no. 4, 519–528. MR 599821 (82c:12006)

[KM08] Teruhisa Kadokami and Yasushi Mizusawa, *Iwasawa type formula for covers of a link in a rational homology sphere*, J. Knot Theory Ramifications **17** (2008), no. 10, 1199–1221. MR 2460171 (2009g:57023)

[KM13] ———, *On the Iwasawa invariants of a link in the 3-sphere*, Kyushu J. Math. **67** (2013), no. 1, 215–226. MR 3089003

[Maz64] Barry Mazur, *Remarks on the Alexander polynomial*, unpublished note, http://www.math.harvard.edu/~mazur/papers/alexander_polynomial.pdf, 1963–64.

[MM82] John P. Mayberry and Kunio Murasugi, *Torsion-groups of abelian coverings of links*, Trans. Amer. Math. Soc. **271** (1982), no. 1, 143–173. MR 648083 (84d:57004)

[Mor01] Masanori Morishita, *A theory of genera for cyclic coverings of links*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **77** (2001), no. 7, 115–118. MR 1857286 (2002f:57005)

[Mor12] ———, *Knots and primes*, Universitext, Springer, London, 2012, An introduction to arithmetic topology. MR 2905431

[Nii14] Hirofumi Niibo, *Idèlic class field theory for 3-manifolds*, Kyushu J. Math **68** (2014), no. 2, 421–436.

[Nog07] Akio Noguchi, *Zeros of the Alexander polynomial of knot*, Osaka J. Math. **44** (2007), no. 3, 567–577. MR 2360941 (2009f:57020)

[NU18] Hirofumi Niibo and Jun Ueki, *Idelic class field theory for 3-manifolds and very admissible links*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc. (2018), 22pages. arXiv:1501.03890.

[Sin84] Warren M. Sinnott, *On p-adic L-functions and the Riemann-Hurwitz genus formula*, Compositio Math. **53** (1984), no. 1, 3–17. MR 762305 (86e:11103)

[Uek14] Jun Ueki, *On the homology of branched coverings of 3-manifolds*, Nagoya Math. J. **213** (2014), 21–39.

[Uek16] ———, *On the Iwasawa μ-invariants of branched $\mathbb{Z}_p$-covers*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **92** (2016), no. 6, 67–72.

[Uek17] ———, *On the Iwasawa invariants for links and Kida's formula*, Internat. J. Math. **28** (2017), no.6, 1750035, 30pages.

[Uek18a] ———, *The profinite completions of knot groups determine the Alexander polynomials*, Alg. Geom. Topol. **18** (2018), 3013–3030.

[Uek18b] ———, *p-adic Mahler measure and $\mathbb{Z}$-covers of links*, Ergodic Theory Dynam. Systems, (First published online 2018), 18pages.

[Yok67] Hideo Yokoi, *On the class number of a relatively cyclic number field*, Nagoya Math. J. **29** (1967), 31–44. MR 0207681 (34 #7496)