RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B73 (2019), 51–64

幾何学基礎論 — ヒルベルトからタルスキへ
The Foundations of Geometry: From Hilbert to Tarski

足立恒雄
Norio Adachi *

Abstract

We describe the history of the foundations of geometry, beginning from D. Hilbert and was completed by the school of A. Tarski. Though Hilbert began the axiomatization of geometry in the modern sense, it was Tarski who gave a strictly logical representation to geometry to draw an explicit distinction between the naive geometry of Euclid's and the early-modern geometry.

§1. ヒルベルト以降の幾何学基礎論の系統図

§1.1. 第一世代

解析的連続性を仮定しない幾何学の研究は主として次の研究者によって開始された：

ヒルベルト（D. Hilbert: 1862-1943) ([10]：1899)
シューア (F. Schur: 1856-1932)（[8]：1909)
デーン（M. Dehn：1878-1952） (1900: ([5]))

たとえば

$$\text{三角形の内角和} = 2\angle R \Leftrightarrow \text{平行線公準が成り立つ}$$

Received November 25, 2018, Revised March 26, 2019
2010 Mathematics Subject Classification(s): 51G05, 51-03, 01A60
Key Words: Hilbert, Tarski, the foundations of geometry
*早稲田大学 Waseda University, Tokyo, 166-8050 JAPAN
e-mail: q.n.adachi@gmail.com

は解析的連続性を仮定しないと成り立たない．こうした事実があるため，公理の独立性を示すために特異なモデルを作ったのが，連続性公理を制限した幾何学の研究の始まりであろう．

§1.2. 計量幾何の系譜

続いて起こったのが，鏡映 (reflection) を基礎に据える幾何学の研究である．直線 a に関する鏡映を R_a と記す．$R_b \circ R_a$ が対合的，すなわち 2 乗すると恒等変換になるとき，a, b は直交する．その交点を A とすれば，点は原初的な概念ではなくなる．この考え方から鏡映理論が起こった．主たる研究者は次の通りである．このうちイェルムスレウはデンマーク人だが，その他はすべてドイツ人である：

イェルムスレウ (J. Hjelmslev：1873-1950)（[7]）
ヘッセンベルク (G. Hessenberg :1874-1925) ([6],[12])
バッハマン（F. Bachmann：1909-1982)([13]:1959)
ペヤス（W. Pejas)（[16]:1961）

鏡映理論はヒルベルトの（ユークリッド幾何，双曲幾何の）公理系より広く，楕円幾何も射程に捉えた理論の研究である．イェルムスレウ，ヘッセンベルクの研究を受けて，バッハマンによって大成され，弟子のペヤスによってヒルベルト平面（ヒルベルト=タルスキによる 1 階初等幾何の公理系のモデル）の完全分類が得られた．結論の一部だけだが述べるならば，アルキメデスの公理を仮定するとき，ヒルベルト平面は双曲平面かユークリッド平面に限る．しかし，アルキメデスの公理を仮定しないなら，ヒルベルト平面はユークリッド平面の部分構造としても，また半双曲平面は双曲平面の部分構造としても，あるいは楕円平面の部分構造としても，たとえば原点から無限小距離の領域として現れることができる．

§1.3. 1 階幾何

もう一方の系列は，タルスキ学派に依る基礎論的研究である．モデルで成り立ったならば，その命題は公理系から証明できるのか？ たとえば解析幾何というデカルト座標平面での研究結果は，ユークリッド幾何の公理系から証明できるのであろうか？ これは公理系の完全性という性質に関する問題である．こうした問題を扱えるようにするには，ヒルベルトの公理系をさらに形式化して，1 階述語論理で表現できるか，高階述語論理が必要かという検討をせねばならない．主たる研究者は次の通りで，いずれもポーランド人である：

タルスキ（A. Tarski：1901 − 1983）
W. Schwabhäuser
W. Szmielew

幾何学の形式化を巡る研究の経緯は Tarski=Givan の [14] に詳しい．Schwabhäuser, Szielew, Tarski の共著 [17] はその集大成である．

§1.4. 現在

現在の研究の発展については V. Pambuccian[23]，V. Pambuccian[24] 参照．[24] には，幾何学基礎論に無関心な国として，ロシア，フランスと並んで日本が挙げられている．そういう人たちの特徴として，

1. ヒルベルト [10] が公理化に関する無上の最終的な業績だと思っている．
2. 公理的体系を提示することに対する態度として，「《ドン・キホーテ》は子供の文学だと勘違いしていて，その割には長すぎる」と考えている人たちに似ている．

などと書いている．

本稿では，古典幾何を 1 階述語論理で記述することを可能にしたタルスキ学派の業績を述べる．鏡映理論については，別の機会に論じる予定である．

§2. ヒルベルトの公理系

ヒルベルト [10] の公理系を記号化して記述する．この結果を見ればわかるように，変数は種々の領域を動くので，1 階論理ではない．ヒルベルトが [10] を表した当時，述語論理は形式化されていなかったどころか，1 階か高階か，あるいはすべてを記号化して表現するという意味での形式化といった区別もなかった．

$A, B, \ldots$ は点を，$\alpha, \beta, \ldots$ は直線を，n は自然数を，$\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ は直線の部分集合を表す．

無定義述語として

$$\mathrm{I},\ \mathrm{B},\ \equiv$$

を準備する．

$A\mathbf{I}\alpha$ 点 A は直線 α と結合している（A is incident with α）．

$\mathbf{B}(A, B, C)$ 点 B は点 A と点 C の間にある (B is between A and C).

$AB \equiv CD$ 線分 AB は線分 CD と合同である (AB is congruent with CD).

その他の概念はこれらから定義される．たとえば，A, B, C が共線的 (collinear) という関係は

$$\mathrm{Col}(A, B, C) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{B}(A, B, C) \vee \mathrm{B}(B, C, A) \vee \mathrm{B}(C, A, B)$$

と定義される．また簡単のため A, B, C が相異なる 3 点であるということを $\neq (A, B, C)$ と表す：

$$\neq (A, B, C) \;\Leftrightarrow\; A \neq B \wedge B \neq C \wedge C \neq A$$

§ 2.1.　結合の公理群

I$_1$ 2 点 A, B に対して，A, B のそれぞれと結合する直線が存在する：

$$\forall A \forall B \exists \alpha \ (A \mathrm{I} \alpha \wedge B \mathrm{I} \alpha)$$

I$_2$ 2 点 A, B に対して，A, B のそれぞれと結合する直線は一つより多くない：

$$\forall A \forall B \forall \alpha \forall \beta \ [(A \mathrm{I} \alpha \wedge B \mathrm{I} \alpha) \wedge (A \mathrm{I} \beta \wedge B \mathrm{I} \beta) \to \alpha = \beta]$$

I$_3$ 各直線上には，少なくとも 2 点が存在する．また 1 直線上にはないような，少なくとも三つの点が存在する：

$$\forall \alpha \exists A \exists B \ (A \neq B \wedge A \mathrm{I} \alpha \wedge B \mathrm{I} \alpha)$$

$$\exists A \exists B \exists C \ [\neq (A, B, C) \wedge \neg \mathrm{Col}(A, B, C)]$$

§ 2.2.　順序の公理群

II$_1$ 点 B が点 A と点 C の間にあるならば，A, B, C は 1 直線上の異なる 3 点であって，このとき B は C と A の間にもある：

$$\mathrm{B}(A, B, C) \ \to \neq (A, B, C) \wedge \mathrm{B}(C, B, A) \wedge \exists \alpha \ (A \mathrm{I} \alpha \wedge B \mathrm{I} \alpha \wedge C \mathrm{I} \alpha)$$

II$_2$ 2 点 A と点 B に対し，直線 AB 上に少なくとも 1 点 C が存在して，B が A と C の間にある：

$$\forall A \forall B \exists C \ \mathrm{B}(A, B, C)$$

II$_3$ 1 直線上の任意の 3 点の中で，他の二つの間にある点は一つより多くはない：

$$\forall A \forall B \forall C \ [\mathrm{B}(A, B, C) \wedge \mathrm{B}(A, C, B) \to B = C]$$

II$_4$ **（パッシュの公理）** A, B, C は 1 直線上にない 3 点とし，直線 α は A, B, C のどれも通らないとする．このときもし α が線分 AB の 1 点を通るならば，α はまた線分 BC の 1 点か，または線分 AC の 1 点を通る：

$$\neq (A, B, C) \wedge \neg \mathrm{Col}(A, B, C) \wedge \neg (A \mathrm{I} \alpha \vee B \mathrm{I} \alpha \vee C \mathrm{I} \alpha)$$

$$\to [\exists D \ (\mathrm{B}(A, D, B) \wedge D \mathrm{I} \alpha \to \exists \ (\mathrm{B}(B, E, C) \vee \mathrm{B}(A, E, C))]$$

§ 2.3.　合同の公理群

III$_1$ **（線分の複写）** A, B が直線 α 上の 2 点であって，さらに A' が直線 α' 上の点であるならば，直線 α' の A' によって決まる半直線の上には 1 点 B' が見出せて，

$$A \neq B \wedge C \neq D \to \exists E \ (CE \equiv AB \wedge E \mathrm{I} \overrightarrow{CD})$$

III$_2$ 線分 $A'B'$ と線分 $A''B''$ が同じ線分 AB と合同ならば，線分 $A'B'$ は線分 $A''B''$ と合同である:

$$A'B' \equiv AB \wedge A''B'' \equiv AB \to A'B' \equiv A''B''$$

III$_3$ **（線分の和）** AB, BC を直線 α 上の共通点のない 2 線分とし，さらに $A'B', B'C'$ を直線 α' 上の共通点のない 2 線分とする．このとき $AB \equiv A'B'$ かつ, $BC \equiv B'C'$ ならば，$AC \equiv A'C'$ である:

$$\mathrm{B}(A,B,C) \wedge \mathrm{B}(A',B',C') \to (AB \equiv A'B' \wedge BC \equiv B'C' \to AC \equiv A'C')$$

定義 2.1 (**角**)　1 点 A から出る 1 対の半直線 h, k が直線とならないとき，この 1 対を角と名付け,

$$\angle(h,k) \text{ または } \angle(k,h)$$

で表す．同様に，角の内点，領域などの概念も定義される．

III$_4$ 角 $\angle(h,k)$，直線 a' および a' の一つの決まった側が与えられているとする．また h' を O' から出る直線 a' の半直線とする．このとき一つの，かつただ一つの半直線 k' が存在して $\angle(h,k)$ が $\angle(h',k')$ と合同である．記号で

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$$

であり，また同時に角 $\angle(h',k')$ のすべての内点は a' の与えられた側にある．またどの角もそれ自身と合同である：$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k)$

注　「角の合同」は新しい概念であるから，無定義述語であることを明示しなければならないが，ヒルベルト [10] ではこれがあまり意識されていない．実は角の合同は（後述のように）定義できる概念であるが，Hartshorne[21], Greenberg[25] では無定義述語としている．

III$_5$ **（SAS の合同）** 二つの三角形 ABC, $A'B'C'$ で，$AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle A'B'C'$ ならば，$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$, $BC \equiv B'C'$ が成り立つ．

§ 2.4.　連続の公理

A を始点とする半直線上 h の点 B に対して $n \cdot AB$ という線分を h 上の A を始点とする線分として回帰的に定義する．

IV$_1$　**アルキメデスの公理** $\mathrm{B}(A,B,C)$ のとき，$AC < n \cdot AB$ となる自然数 n を取ることができる：

$$\forall A \forall B \forall C \exists n[\mathrm{B}(A,B,C) \ \to \ AC < n \cdot AB]$$

IV$_2$　解析的連続性公理 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ を直線 α のいずれも空ではない部分集合とする．$\mathcal{X}$ の任意の点 X と $\mathcal{Y}$ の任意の点 Y に対して，$\mathrm{B}(X,Y,Z)$ なる $\mathcal{Y}$ の点 Z が存在するならば，$\mathcal{X}$ の X の任意の X と $\mathcal{Y}$ の任意の Y に対して $\mathrm{B}(X,A,Y)$ なる α 上の点 A が存在する：

$$\forall\mathcal{X}\forall\mathcal{Y}[\forall X\forall Y(X\in\mathcal{X}\wedge Y\in\mathcal{Y}\to\exists Z\in\mathcal{Y}\mathrm{B}(X,Y,Z))$$
$$\to\exists A\forall X\in\mathcal{X}\forall Y\in\mathcal{Y}\mathrm{B}(X,A,Y)]$$

§ 2.5.　平行線の公理

２直線 α と β が交わらない（平行である）という概念を定義する：

$$\alpha \mid\mid \beta \Leftrightarrow \neg\exists P\ (P\ \mathrm{I}\ \alpha\wedge P\ \mathrm{I}\ \beta)$$

(E)　ユークリッドの平行線公理　α を任意の直線とし，A を α 外の１点とすれば，A を通って α と交わらない直線が一つだけ存在する：

$$\forall A\forall\alpha\exists_!\beta\ (A\ \mathrm{I}\ \alpha\vee\alpha\mid\mid\beta)$$

(¬E)　ユークリッドの平行線公理の否定命題　ある直線 α と α 外の点 A があって，A を通り α と交わらない直線が２本以上存在する：

$$\exists A\exists\alpha\exists\beta\exists\gamma\ [(A\ \ \not\mathrm{I}\ \alpha)\wedge A\ \mathrm{I}\beta\wedge A\mathrm{I}\gamma\wedge\alpha||\beta\wedge\alpha||\gamma\wedge\beta\neq\gamma]$$

(H)　双曲幾何の平行線公理　b が任意の直線，A がその上にない点ならば，A から出て，同一直線を作らず，また直線 b も切らない二つの半直線 a_1, a_2 が存在して，a_1, a_2 が作る角領域内にある，A から出る半直線はいずれも直線 b と交わる．

考察１　ヒルベルトの公理系を述語論理で記述してみて，次のことがわかった．まず，言語としては，次が必要である：

I	「結合している」(incident) 関係を表す
B	「間にある」(between) 関係を表す
$\equiv_1$	「線分の合同」関係を表す
$\equiv_2$	「角の合同」関係を表す

また，変数としては，次が必要である：

$A, B, ..., X, Y, ...$	点を表す変数
$\alpha, \beta, ...$	直線を表す変数
n	自然数を表す変数
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, ...$	直線の部分集合を表す変数

一方,「線分の大小関係」$<$ は線分の複写と間の関係で表せる.

考察 2 ユークリッドの平行線公理の否定命題から双曲幾何の平行線公理まではかなりのギャップがあることも注意すべきである.

§ 3. タルスキによる初等幾何

われわれは, a, b を 2 点とするとき,「直線 ab」とか「線分 ab」とかいう言い方をする. つまり 2 点でもって直線も, 線分も表しているのである. また共線的ではない 3 点があれば, これは三角形をも表していると考えられる. これが基本のアイデアである.「角の合同関係」を線分の合同関係に還元できること,「直線」という概念を点と間の関係に還元すること, を実際に示すことによって, アルキメデスの公理と解析的連続性の公理以外は言語 $\{\mathrm{B}, \equiv\}$ の 1 階論理式で表せることを示したのがタルスキであった.

タルスキの幾何学基礎論への貢献の経緯は書簡等を集めた [20] 参照. また Tarski[14] はタルスキ自身が解説した論文である. さらに Tarski et al, *"Metamathematische Methoden in der Geometrie"*（[20]）はタルスキ学派のこの分野における集大成である. これにより, 幾何の理論は極めて明快な形で「形式化」され, 理論とモデルの関係, 完全性といった概念を論じることができるようになった（[26] 参照）.

言語（すなわち, 基本となる原始的関係記号の集合）は

$$\{\mathrm{B},\ \mathrm{D}\}$$

である. $\mathrm{B}(a,b,c)$ は「点 b は点 a と点 c の間にある」と読む. $\mathrm{D}(a,b,c,d)$ は「線分 ab は線分 cd と合同である」と読む. これはしばしば, $ab \equiv cd$ と記される.

なお, 以下に述べる公理系はタルスキの極端に簡潔な記述（§7 参照）を, ヒルベルトの公理系に近づけて直観的に理解しやすいように改めたものである.

§ 3.1. 結合の公理群

まず**共線的** (colinear) という概念を定義する：

$$\mathrm{Col}(a,b,c) \ \Leftrightarrow \mathrm{B}(a,b,c) \vee \mathrm{B}(b,c,a) \vee \mathrm{B}(c,a,b)$$

A1 共線的でない 3 点が存在する:

$$\exists a \exists b \exists c\ (\neq (a,b,c) \wedge \neg \mathrm{Col}(a,b,c))$$

A2 与えられた 2 点を通る直線が一つだけ存在する：

$$\forall a \forall b \forall c \forall d (\mathrm{Col}(a,b,c) \wedge \mathrm{Col}(a,b,d) \rightarrow\ \mathrm{Col}(a,c,d) \wedge \mathrm{Col}(b,c,d))$$

注　結合の第 3 公理「与えられた直線上に少なくとも 2 点が存在する」は直線を 2 点で定義しているので不要になる．

§3.2.　間の公理群

B1　点 b が点 a と点 c の間にあるならば，a, b, c は異なる 3 点である：

$$\forall a \forall b \forall c \ (\mathrm{B}(a,b,c) \to \neq (a,b,c))$$

B2　点 b が点 a と点 c の間にあるならば，b は c と a の間にある：

$$\forall a \forall b \forall c \ (\mathrm{B}(a,b,c) \to \mathrm{B}(c,b,a))$$

B3　2 点 a, b に対し，少なくとも 1 点 c が a と b の間にある：

$$\forall a \forall b \ \exists c \mathrm{B}(a,c,b)$$

B4　異なる 3 点 a, b, c が共線的ならば，その中の 1 点だけが他の 2 点の間にある：

$$\forall a \forall b \forall c \ (\mathrm{B}(a,b,c) \to \neg \mathrm{B}(b,a,c) \wedge \neg \mathrm{B}(a,c,b))$$

B5(パッシュの公理)　直線 α は三角形 abc の頂点を通らないとする．もし α が辺 ab と交わるならば，α はまた辺 bc または辺 ca と交わる：

$$\forall a \forall b \forall c \forall p \forall q \ [\mathrm{B}(a,q,b) \wedge \neg \mathrm{Col}(a,b,c) \wedge \neg \mathrm{Col}(p,q,a) \wedge \neg \mathrm{Col}(p,q,b) \wedge \neg \mathrm{Col}(p,q,c)$$

$$\to \exists x (\mathrm{B}(p,q,x) \wedge (\mathrm{B}(a,x,c) \vee \mathrm{B}(b,x,c))]$$

§3.3.　合同の公理群

$\mathrm{D}(a,b,c,d)$ を見慣れた形の $ab \equiv cd$ と表す．

C1（同値関係）　$aa \equiv pq$ ならば $p = q$ であり，また $\equiv$ は同値律を満たす．
C2（線分の複写）　与えられた点 c を始点とする半直線上に，与えられた線分 ab と線分 cd が合同となるような点 d がただ一つ存在する：

$$\forall a \forall b \forall c \forall p \exists ! d \ (\mathrm{B}(p,c,d) \wedge cd \equiv ab)$$

ここに，

$$\exists ! x \varphi \ \Leftrightarrow \ \exists x \varphi(x) \wedge \forall x \forall x' (\varphi(x) \wedge \varphi(x') \to x = x')$$

C3（線分の加法）　$\mathrm{B}(a_1, b_1, c_1)$ かつ $\mathrm{B}(a_2, b_2, c_2)$ とする．$a_1 b_1 \equiv a_2 b_2$ かつ $b_1 c_1 \equiv b_2 c_2$ ならば $a_1 c_1 \equiv a_2 c_2$ である．

相異なる 3 点 a, b, c が共線的ではないなら，a, b, c は**三角形**をなすと言う．三角形の合同を次のように定義する：

定義 3.1（**三角形の合同**） 三角形$a_1b_1c_1$が三角形$a_2b_2c_2$に合同である（記号:$a_1b_1c_1 \equiv a_2b_2c_2$）とは，対応する 3 辺が相等しいことである．すなわち

$$a_1b_1c_1 \equiv a_2b_2c_2 \;\Leftrightarrow\; a_1b_1 \equiv a_2b_2,\; b_1c_1 \equiv b_2c_2,\; c_1a_1 \equiv c_2a_2$$

C6（5 辺公理） 三角形 $a_1b_1c_1$ が三角形 $a_2b_2c_2$ に合同で，$\mathrm{B}(a_1, b_1, d_1)$ なる点 d_1 と $\mathrm{B}(a_2, b_2, d_2)$ なる点 d_2 に対して $b_1d_1 \equiv b_2d_2$ が成り立つならば $c_1d_1 \equiv c_2d_2$ が成り立つ：
$\forall a_1 \forall b_1 \forall c_1 \forall d_1 \forall a_2 \forall b_2 \forall c_2 \forall d_2$
$[\mathrm{B}(a_1, b_1, d_1) \wedge \mathrm{B}(a_2, b_2, d_2) \wedge a_1b_1c_1 \equiv a_2b_2c_2 \wedge c_1d_1 \equiv c_2d_2 \;\rightarrow c_1d_1 \equiv c_2d_2]$

5 辺公理は二つの角が等しいとそれらの補角もたがいに等しいことや，二辺夾角の合同定理を保証している．この公理はヒルベルト [10] にはない．

§3.4. 角の合同の定義

ヒルベルト [10] 以降現代に至るまで諸本では，「角が等しい」ことに対する無定義述語を導入しているが，線分の合同を使って角の合同を定義すれば，角に対する無定義述語の導入は避けられる．すなわち合同な三角形の対応する頂角は等しいと定義すればよいのである．このことはすでに 1904 年に J. Mollerup によって指摘されていたが，以後あまり顧みられることもなかったようである：

定義 3.2（**角の合同**） 3 点 a_i, b_i, c_i は三角形を成すとする $(i = 1, 2)$．半直線 $\overrightarrow{a_ib_i}$ 上に点 p_i，半直線 $\overrightarrow{a_ic_i}$ 上に点 q_i を取って，$a_1p_1q_1 \equiv a_2p_2q_2$ とできるとき，$\angle b_1a_1c_1$ は $\angle b_2a_2c_2$ に合同であると言って，

$$\angle b_1a_1c_1 \cong \angle b_2a_2c_2$$

と表す．

角が等しいことの定義が，補助に取った p_i, q_i の取り方に依らないことは 5 辺公理によって保証される．

角が任意の位置に，そして任意の向きに移動できることは，線分の移動を使って三角形の移動が導けることから証明できる．ヒルベルト [10] 等では角の移動が公理とされているが，5 辺公理があれば，これは不要である．

§4. 連続の公理

『原論』([2]) では，解析的な連続性はほとんど意識されていないし，使われてもいない．近代に近付くにつれ，連続性は意識されていないが，無意識な形では使われるようになる．たとえば「ルジャンドルによる直観的な証明」[1]というように評されているのは，実

[1]他に無限小を使う証明も直観的と称される．

は解析的連続性を使う証明のことである．この辺を厳密に考えるために，連続の公理に段階を設けることになる．

CL（円直線交叉） もし直線 α が円 Γ の内側の点を含むならば，α と Γ は交点を持つ：

$$\mathrm{B}(c,q,p) \land \mathrm{B}(c,p,r) \land ca \equiv cq \land cb \equiv cr \to \exists x\ (cx \equiv cp \land \mathrm{B}(a,x,b))$$

CC（円円交叉） 与えられた 2 円 Γ, Γ' において，もし Γ' が Γ の内側の点を含み，また外側の点をも含むならば，Γ と Γ' は交点を持つ:

たとえば,「点 a は中心 c，半径 cp の円の内部にある」は $\mathrm{B}(c,q,p) \land ca \equiv cq$ と表せる．このように考えれば CC も容易に 1 階論理で表せる．

注 $CL \Leftrightarrow CC$ は解析幾何を使えばほとんど自明であるが，公理系から直接に証明するのはほぼ不可能である．

§5. 平行線の公理

2 直線 ab および cd が**平行**である（交わらない：記号 $ab||cd$）ということを次で定義する[2]：

$$ab \parallel cd \ \Leftrightarrow\ \neg\exists x\ [\mathrm{Col}(a,b,x) \land \mathrm{Col}(c,d,x)]$$

(E)：ユークリッド幾何の平行線公理 与えられた直線 α とその上にない点 a に対し，a を通り，α に交わらない直線は高々1 本である：

$$\forall a \forall b \forall b' \forall c \forall d\ (ab \parallel cd\ \land\ ab' \parallel cd\ \to\ \mathrm{Col}(a,b,b'))$$

(H)：双曲幾何の平行線公理 与えられた直線 α とその上にない点 a に対し，a を通る次のような 2 直線 β, γ（**限界平行線**と呼ばれる：記号 $ab|||cd$）が存在する；a を通り，かつ α と β と γ で囲まれた領域を通る直線はすべて α と交わる：

$$\begin{aligned}
&\forall a \forall c \forall d\\
&\neg\mathrm{Col}(a,c,d) \to \exists b_1 \exists b_2 [\neg\mathrm{Col}(a,b_1,b_2)\\
&\land \forall u \{\mathrm{B}(b_1,u,b_2) \to \exists x (\mathrm{B}(a,u,x) \land \mathrm{Col}(c,d,x)\}\\
&\land \neg\exists x \{(\mathrm{B}(a,b_1,x) \lor \mathrm{B}(a,b_2,x)) \land \mathrm{Col}(c,d,x)\}]
\end{aligned}$$

§6. 諸幾何の定義

定義 6.1（**初等絶対幾何**）　結合の公理群 A1-A2，間の公理群 B1-B5，合同の公理群 C1-C6 の和集合を**初等絶対幾何**と呼び $\mathbb{A}_0$ と表す．$\mathbb{A}_0$ のモデルを**ヒルベルト平面**と言う．

[2]非ユークリッド幾何で平行というと限界平行のことを指す．交わらず，限界平行でもない場合は超平行という本もある．

これまでの検討によって，初等絶対幾何 $\mathbb{A}_0$ は言語 $\{B, D\}$ の 1 階述語論理の理論である．したがって，完全性定理が適用できる．また，$\mathbb{A}_0$ は有限公理系であるので，Ziegler の定理（1982) によって，決定可能ではないこと，したがって完全でもないことがわかる．

定義 6.2 (**初等古典幾何**)

1. 初等絶対幾何 $\mathbb{A}_0$ に CC と E を加えた理論を**初等ユークリッド幾何**と呼び，$\mathbb{E}_0$ と記す．
2. 初等絶対幾何 $\mathbb{A}_0$ に H を加えた理論を**初等双曲幾何**と呼び，$\mathbb{H}_0$ と記す．
3. 初等ユークリッド幾何と初等双曲幾何を併せて初等（古典）幾何と言う．

たとえば次のようなことが証明できる：

定理 6.3 (**ユークリッド幾何の基本定理**)　ユークリッド平面（$\mathbb{E}_0$ のモデル）はあるユークリッド的順序体 K 上のデカルト座標平面 $\mathcal{C}_2(K)$ に同型である．

系 6.4　言語 $\{B,\ D\}$ の命題 φ があるユークリッド平面で，成り立つことが基礎体 K の特殊性に依存することなく示されたならば，φ は $\mathbb{E}_0$ の定理である．

普段ほとんど気に留めずに，幾何の問題を解析幾何で証明して済ませているが，実はそれは一つのモデルで証明したのである．基本定理は自明そうに見えるが，証明は極めて難しい．どういうものか，ヒルベルト [10] ではこの定理，また次の双曲幾何の基本定理についても，何の言及もない．おそらくその重要性に気が付いていなかったのであろう．系 6.4 はゲーデルの完全性定理によって明らかである．

定理 6.5 (**双曲幾何の基本定理**)　双曲平面（$\mathbb{H}_0$ のモデル）はあるユークリッド的順序体 K 上のベルトラーミ=ポアンカレの上半平面モデル $\mathcal{H}_2(K)$ に同型である．

系 6.6　言語 $\{B,\ D\}$ の命題 φ がある双曲平面で成り立つことが基礎体 K の特殊性に依存することなく示されたならば，φ は $\mathbb{H}_0$ の定理である．

定理 6.7 (**初等幾何の基本定理**)　アルキメデスの公理を前提とすれば，初等絶対幾何 $\mathbb{A}_0$ においては，ユークリッドの平行線公理を否定すれば，双曲幾何の平行線公理が成り立つ*:*

$$\mathbb{A}_0 \ \vdash \ E \vee H$$

定義 6.8 (**2 階古典幾何**)

1. 初等ユークリッド幾何から CC の代わりに解析的連続性を加えた理論を **2 階ユークリッド幾何**と呼び，$\mathbb{E}_2$ と記す．

2. 初等双曲幾何に解析的連続性を加えた理論を **2 階双曲幾何**と呼び，$\mathbb{H}_2$ と記す．

3. 2 階ユークリッド幾何と 2 階双曲幾何を併せて 2 階（古典）幾何と言う．

定理 6.9

1. $\mathbb{E}_2$ のモデルはすべて $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ に同型である．

2. $\mathbb{H}_2$ のモデルはすべて $\mathcal{H}_2(\mathbb{R})$ に同型である．

3. *2* 階絶対幾何 $\mathbb{A}_2$ のモデルは $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ あるいは $\mathcal{H}_2(\mathbb{R})$ に同型である．

§ 7. Tarski の初等幾何

タルスキの幾何の公理系は次のようである．$\mathrm{B}(A, B, C)$ では必ずしも A, B, C が相異ならないとすることによって，公理の数を減らすことができるが，直観性を犠牲にすることになる．以下では Babc が間の関係を表す．

タルスキによる初等絶対幾何 $\mathbb{A}_0$

A1 $ab \equiv ba$

A2 $ab \equiv pq \wedge ab \equiv rs \ \rightarrow \ pq \equiv rs$

A3 $ab \equiv cc \ \rightarrow \ a = b$

A4 $\exists x\ (\mathrm{B}qax \wedge ax \equiv bc)$

A5 (5 辺公理) $a \neq b \wedge \mathrm{B}abc \wedge \mathrm{B}a'b'c' \wedge ab \equiv a'b' \wedge bc \equiv b'c'$
$\wedge ad \equiv a'd' \wedge bd \equiv b'd' \ \rightarrow \ cd \equiv c'd'$

A6 $\mathrm{B}aba \ \rightarrow \ a = b$

A7 (パッシュの公理) $\forall a \forall b \forall c \forall p \forall q[\mathrm{B}apc \wedge \mathrm{B}bqc \ \rightarrow \ \exists(\mathrm{B}pxb \wedge \mathrm{B}qxa)]$

A8 (次元 ≥ 2) $\exists a \exists b \exists c\ (\neg\mathrm{B}abc \wedge \neg\mathrm{B}bca \wedge \neg\mathrm{B}cab)$

A9 (次元 ≤ 2) $p \neq q \wedge ap \equiv aq \wedge bp \equiv bq \wedge cp \equiv cq \ \rightarrow \ \mathrm{B}abc \vee \mathrm{B}bca \vee \mathrm{B}cab$

定義 7.1（タルスキの 1 階幾何） $\mathbb{A}_0$ に次の**代数的連続性公理図式**を加えた理論をタルスキの 1 階絶対幾何と言い，$\mathbb{A}_1$ と記す：

$$\exists a \forall x \forall y[\alpha(x) \wedge \beta(y) \to \mathrm{B}axy] \to \exists b \forall x \forall y[\alpha(x) \wedge \beta(y) \to \mathrm{B}xby]$$

ここに α, β は言語 $\{\mathrm{D},\ \mathrm{B}\}$ の次の性質を満たす任意の 1 階論理式である：

a, b, y は α には自由変数としては現れず，また a, b, x は β には自由変数としては現れない．

この代数的連続性を平たく言えば，代数的な不等式で定義されるようなデデキント切断は境界点を持つということである．たとえば $\sqrt[3]{2}$ は $x^3 > 2$ と $x^3 < 2$ の 2 領域の境界点として定義されるので，座標直線上に存在することになる．歴史上現れた幾何学的な連続性に関する問題はすべて代数的であるから，1 階幾何の範囲ですべて解決できるのである．従って，完全性定理に依って，$\mathbb{A}_1$ のモデルで成り立つ命題はすべて $\mathbb{A}_1$ の命題である．

タルスキの 1 階ユークリッド幾何 $\mathbb{E}_1$，1 階双曲幾何 $\mathbb{H}_1$ は $\mathbb{A}_1$ にユークリッドの平行線公理，双曲幾何の平行線公理を加えた理論として定義される．

たとえば，先に述べた初等幾何の基本定理はアルキメデスの公理を前提としなくても成り立つ：

定理 7.2（初等幾何の基本定理） *タルスキの 1 階絶対幾何 $\mathbb{A}_1$ においては，ユークリッドの平行線公理を否定すれば，双曲幾何の平行線公理が成り立つ:*

$$\mathbb{A}_0 \ \vdash \ E \vee H$$

定理 7.2 の証明を見ればわかることだが，アルキメデスの公理は代数的連続性の中に吸収されてしまっている（足立 [26] 参照）．かくして，ヒルベルトによって開始された古典幾何の厳密化のプロジェクトはタルスキ学派によって完成されたと評価できるであろう．しかし，楕円幾何まで包含する古典幾何の基礎論はバッハマンに代表される鏡映理論を待たねばならない．

参考文献

[1] T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*（1908：Dover から第 2 版が復刊されている）
[2] エウクレイデス『原論』（邦訳：池田美恵他訳『ユークリッド原論』（共立出版）：斎藤憲・三浦伸夫訳『エウクレイデス全集』（東大出版会）
[3] Saccheri, G., *Euclides Vindicatus* (1733), translated by G. B. Halsted (Open Court；1920)
[4] Legendre, A. M., *Eléments de Geéometrie* (1794-1823:諸版あり)
[5] Dehn, M., *Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreiecke* (1900: Math. Ann. Bd.53)

[6] Hessenberg, G., *Beweis des Desargues'schen Satzes aus dem Pascal'schen*, Math. Anal. 61, 161-172 (1905)
[7] Hjelmslew, J., *Neue Begründung der ebenen Geometrie*, Mathematische Annalen 64, 449-474 (1907)
[8] Schur, F., *Grudlagen der Geometrie* (1909)
[9] Bonola, R., *Non-Euclidean Geometry* (1912: イタリア語版（1906) の英訳；現在 Dover 版がある）
[10] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie* (1899：7th ed. 1930) ：ヒルベルト『幾何学の基礎』(共立出版：第 VII 版の翻訳)
[11] Freudenthal, H., *Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie . Zugleich eine Besprechung der 8. Aufl. von Hiberts 'Grudlagen der Geometrie"'*, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) **5**, 105-142 (1957)：[10] の邦訳に収録されている.
[12] Hessenberg, G., Diller, J., *Grundlagen der Geometrie* (2. Auflage: 1967)
[13] Bachmann, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* (1959; 2nd ed. 1973)
[14] Tarski, A., *What is Elementary Geometry?* (Symposium on the Axiomatic Method)
[15] Bachmann, F., Behnke, H., Kunle, H., eds., *Fundamentals of Mathematics :Vol. II Geometry*(1974:ドイツ語版からの英訳)
[16] Pejas, W., *Die Modelle des Hilbertschen Axiomensystems der absoluten Geometrie*, Math. Ann. 143, 215-235 (1961)
[17] A. Tarski, et al., *Metamathematische Methoden in der Geometrie* (1983), Springer
[18] 近藤洋逸『幾何学思想史』(1966)：『近藤洋逸数学史著作集』(日本評論社) 第 1 巻として復刊：『新幾何学思想史』(1966：ちくま学芸文庫)
[19] Greenberg, M. J., *Aristotle's Axiom in the Foundations of Hyperbolic Geometry*, J. of Geometry 33, 53-57 (1988)
[20] Tarski, A.=Givant, S., *Tarski's System of Geometry* (1999; The Bulletin of Symbolic Logic, Vol 3)
[21] Hartshorne, R., *Geometry : Euclid and Beyond* (2000) 邦訳『幾何学』I，II(丸善出版)
[22] Hallett, M=Majer, U. eds., *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891-1902*, (2000 : Springer)
[23] Pambuccian, V., *Axiomatizations of hyperbolic and absolute geometries*, in *Non-Euclidean Geometries : János Bolyai Memorial Volume* ed. by Prékopa=Molnár (2005)
[24] Pambuccian, V., Philosophia Mathematika (III) 21 (2013),255-277 : [22] の書評
[25] Greenberg, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries* (4th ed. : 2007)
[26] 足立恒雄『よみがえる非ユークリッド幾何』（2017 年 4 月号から 2018 年 3 月号まで《数学セミナー》誌に連載．2019 年，単行書として刊行予定）