

画像認識に基づく和算図形問題への自動タグ付け Automatic tagging to geometric problems in Japanese mathematics based on image recognition

土橋拓馬・脇克志・阿原一志

Takuma Tsuchihashi*, Katsushi Waki** and Kazushi Ahara***

Abstract

In recent years, construction of databases from digitized documents of Japanese mathematics (wasan) has been progressing. We can search documents individually by keywords such as titles and authors in these databases. On the other hand, it is unable to cross-search them from contents such as problems in the documents. To realize this cross-searching based on problems, the authors propose a system to tag images of geometric problems in wasan automatically. In addition, the authors consider generating vector based on tags to evaluate the similarity of geometric problems.

§1. はじめに

近年、デジタル画像化された和算資料のデータベース構築が進み、数学史研究や数学教育における和算の利活用に大きく貢献している。これらのデータベースでは、タイトルや著者名などのキーワードによる資料の個別検索が可能である一方、資料中の問題内容に基づいた横断的な検索は難しい。しかし、資料を参考に和算を有効活用するためには、このような問題の特徴に着目した資料の検索方法も必要であると思われる。本研究では、和算問題の特徴を利用した和算資料データベース内検索の基礎研究として、図形問題を対象とした画像認識に基づく自動タグ付け手法を提案する。この手法に関して、プログラ

Received November 29, 2018. Revised February 15, 2019.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A27, 01A45

Key Words: History of Japanese Mathematics, Geometric problems, Image recognition

Supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP16K12427

*明治大学大学院 先端数理科学研究科, Meiji University, Nakano 164-8525, Japan.

e-mail: cs172020@meiji.ac.jp, taku.tsuchi1110@gmail.com

**山形大学 理学部, Yamagata University, Yamagata 990-8560, Japan.

e-mail: waki@sci.kj.yamagata-u.ac.jp

***明治大学 総合数理学部, Meiji University, Nakano 164-8525, Japan.

e-mail: ahara@meiji.ac.jp

ミングによるシステムのプロトタイプ実装を行ったので、そのシステムの概要と図形問題に対する自動タグ付けの過程を説明する。著者らはこれまでも [1]~[3] の一連の研究で、図形問題への自動タグ付け手法およびシステムを提案してきた。また、図形問題の類似度評価を行うためにタグ付け内容のベクトル化とその形式について検討する。関連研究として挙げた [4] では、NMF(非負値行列因子分解) と呼ばれる数学的手法を用いた問題の類似度評価を試みた。さらに、実際の和算資料にある図形問題に対してシステムによる自動タグ付けを行ったので、実例として紹介する。なお、本研究にいくつかの改善を加え、その詳細を述べたものとして [5] も参考にされたい。

§ 2. 背景と目的

本章では、はじめに研究背景として和算資料データベースを紹介し、その検索の現状について説明する。また、タグ付けと呼ばれるデータベース検索に関わる手法の重要性にも言及し、これに関連して本研究の目的を明らかにする。

§ 2.1. 和算資料データベースについて

近年、数学史研究や数学教育において和算の活用が見られる。例えば、数学史研究では和算資料から当時の数学的思考や現代数学との関係性が考察され、数学教育では生徒の数学的思考を養うことを目的に和算の授業導入や教材活用が検討されている。このような和算の活用に伴い、和算書のデジタル画像化による資料のデータベース構築が進み、利用されている。その例として、図 1 の東北大学附属図書館の和算資料データベース [6] や山形大学附属図書館の佐久間文庫 [7] が挙げられる。

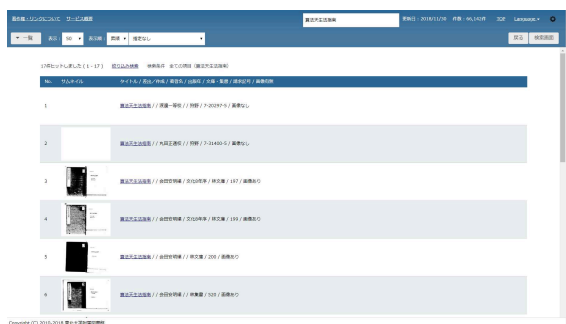


図 1. 和算資料データベース [6]

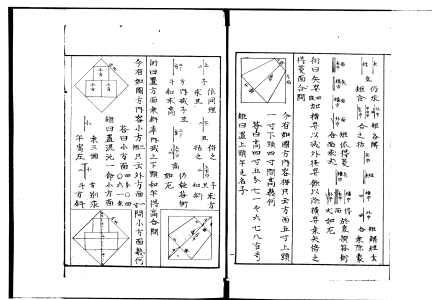


図 2. デジタル画像化された和算資料

これらのデータベースでは、図 2 のようなデジタル画像化された和算資料を検索・閲覧することができる。その資料は、タイトルや著者名などのキーワードから一つ一つ個別に検索される。一方で、掲載されている問題などの資料内容を基に、資料を横断的に検索することはできない。しかし、和算の活用で資料を参考にする場合、キーワードによる検索に加えて和算問題の特徴を考慮した検索も有効であると考えられる。

§ 2.2. データベースにおけるタグ付け

一般的なデータベースでは、検索の便宜を図ることを目的にそれぞれのファイルに対してタグという付随情報を与えることがある。この手法はタグ付けと呼ばれ、データベース内の一つ一つのファイルにその内容を示すタグを付与することで、同様のタグを持つファイル毎に分類・検索することが可能になる。即ち、データベース内の検索を実現する上では、適切なタグ付けが行われることが重要となる。このことから、和算資料データベースでも資料中の問題に対してタグを付与することができれば、和算問題の特徴に基づいた資料検索の実現の一助になると考えられる。しかし、多くの和算資料から問題を取り出し、その一つ一つに手でタグ付けすることは著しく困難である。従って、和算問題に対するタグ付けの自動化が必要である。

§ 2.3. 研究目的

本研究では、和算資料データベースにおける和算問題の特徴を利用した資料検索への寄与を目的とする。その基礎研究として、和算の図形問題を対象に画像認識で特徴を抽出し、自動でタグ付けする手法を提案する。また、和算問題の特徴に基づいた資料検索の利用例として、以下の場合を想定している。

2.3.1. 数学史研究に向けた活用

和算に基づいた数学史研究では、和算資料に掲載されている問題の派生を調査することがある。その際、資料の著者が活動していた時代や場所、さらには他の和算家との繋がりなどを手掛かりとする。しかし、偶然に発見された問題はこれらの情報が少なく、その派生を辿ることも難しい。そこで、和算資料データベースで任意の問題を入力とした資料検索ができれば、問題の類似性を基に派生の調査が可能になる。さらに、その検索結果から以前まで知られていなかった関係性の発見に繋がることも考えられる。

2.3.2. 数学教育に向けた活用

和算を活用した数学教育では、授業内容に関する問題の類題として和算資料中の問題を参考にする場合がある。しかし、目的の類題を探すために和算資料データベース内の資料を一つ一つ検索することは非常に冗長である。そのため、問題の特徴を指定することで資料検索ができる仕組みが必要であると考えられる。これを利用すれば、多くの和算資料を横断的に検索し、複数の類題を効率的に探し出すことが可能になる。基礎問題から応用問題まで幅広く類題を探して活用できれば、和算を導入した学習として有効である。

§ 3. 和算図形問題への自動タグ付けシステム

2.3節で述べたように、本研究では和算の図形問題を対象として画像認識で抽出した特徴に基づく自動タグ付け手法を提案する。また、プログラミングでこの手法に関するシステムのプロトタイプを実装した。以下では、そのシステムの概要およびシステム内の処理過程について説明する。

§ 3.1. システムの概要

和算図形問題への自動タグ付けシステムの概要を図3に示す。図形問題の画像ファイルを入力としてシステムを実行すると、問題に対する画像認識の結果が出力される。このうち、左側には問題から形状を抽出した結果、右側には問題から形状を切り出した結果が表示される。その後、画像認識で得られた情報に基づいて図形問題に自動でタグ付けが行われる。ここで付与されるタグは、図形問題に含まれる多角形や円の要素および要素同士の関係性とした。また、そのタグ内容は和算家の会田安明の著書『算法天生法指南』[8]に掲載されている図形問題を参考に決定した。システム内の一連の処理過程は「図形問題画像への事前処理」「幾何要素の抽出」「図形要素のタグ付け」「図形要素同士の関係性のタグ付け」の四つに分けることができる。以降の節ではこれらの過程について述べる。

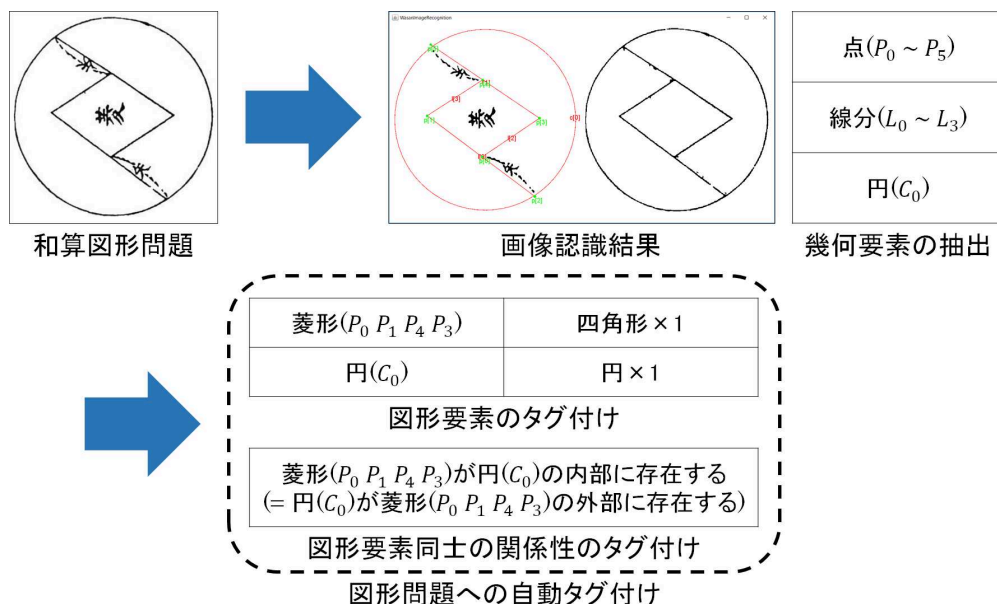


図 3. 自動タグ付けシステムの概要

§ 3.2. 図形問題画像への事前処理

はじめに、図形問題の入力画像に図4のような二値化処理を施す。この画像に対して、黒画素を広げる膨張処理・黒画素を狭める収縮処理を併用したクロージングと呼ばれる処理を行い、図5に示す特徴抽出用の画像を作成する。図形問題の画像にクロージングを施す理由として、和算図形問題には不鮮明な箇所が含まれることが挙げられる。これらの図形問題は和算家の手書きであるため、図形の部分的な欠落が特徴抽出に影響することが考えられる。そこで、図形問題の画像に対してクロージングを行うことで欠落を可能な限り補完し、次節の特徴抽出に利用する。

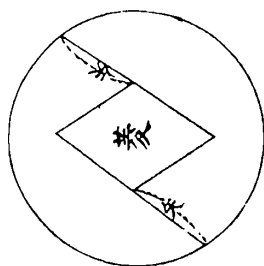


図 4. 図形問題の二値化処理

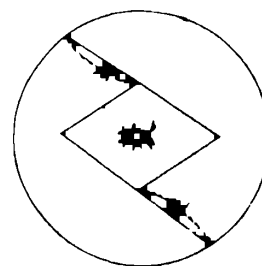


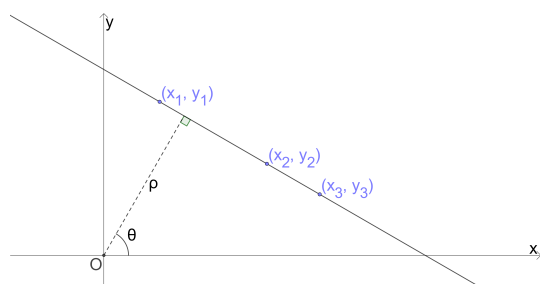
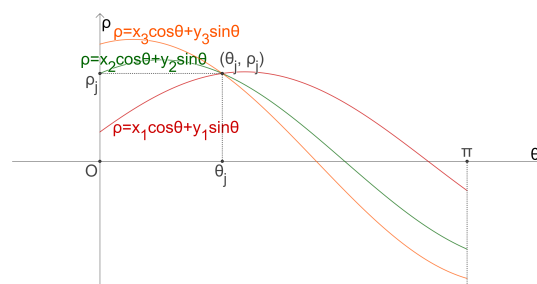
図 5. 特徴抽出用画像

§ 3.3. 幾何要素の抽出

和算図形問題に対するタグ付けの事前処理として、画像認識で図 5 の特徴抽出用画像から幾何要素を抽出する。ここで幾何要素とは、図形問題を構成する点・線分・円の三つを指す。これらの要素について、最初に線分および円の抽出方法を説明し、その後、点の抽出方法について述べる。その際、幾何要素は図形問題の画像において黒画素で表されているものとする。

3.3.1. 線分の抽出

図形問題に含まれる線分の抽出に向けて、はじめに線分に重なる直線を抽出する。その一般的な方法として、Hough 変換と呼ばれる画像処理の特徴抽出法がある。Hough 変換を用いた直線の抽出では、図 6 のように xy 平面上の直線に対して原点から引いた法線の長さを $\rho (\in \mathbb{R})$ 、法線と x 軸がなす角を $\theta (\in [0, \pi])$ と定義する。これにより、点 (x, y) を通る全ての直線の集合を図 7 の $\rho\theta$ 平面上で $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$ と表すことができる。システム内の画像処理では、図形問題の画像にある全ての黒画素 (x_i, y_i) に対してこの式を満たす (θ_j, ρ_j) を数える投票処理を行っている。その投票数が高いほど、 (θ_j, ρ_j) に対応する直線上に黒画素が集中し、直線が存在する可能性が高いことを示す。このような (θ_j, ρ_j) を逆変換し、直線として復元することで抽出としている。

図 6. xy 平面における直線図 7. $\rho\theta$ 平面における直線の集合

Hough 変換で直線を抽出した後、直線に重なる図形問題中の線分について、これを構成する黒画素の配置データを作成する。この配置データを基に黒画素の連結範囲を分析し、端点の位置を決定することで線分が抽出される。このように線分を抽出する理由とし

て、図形問題に含まれる文字が線分の抽出に影響することが挙げられる。和算図形問題にはその図形を示す文字が記されていることがあり、線分の誤検出の原因になると思われる。そこで、黒画素の配置からその連結性を分析することで線分と文字を判別し、誤検出を軽減している。

3.3.2. 円の抽出

図形問題中の円は、直線と同様に Hough 変換を利用して抽出することができる。Hough 変換による円の抽出では、図 8 のように xy 平面上の点 $(a, b) (\in \mathbb{R})$ を中心とした半径 $r (\geq 0)$ の円を円の方程式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ で表現する。これは図 9 の abr 空間において、点 (x, y) を通る全ての円の集合を表す。実際の画像処理では、図形問題の画像にある全ての黒画素 (x_i, y_i) について、この方程式を満たす (a_j, b_j, r_j) に関する投票処理を行っている。その投票数が高ければ点 (a_j, b_j) を中心とした半径 r_j の円上に黒画素が集中し、円が存在していることが分かる。このような (a_j, b_j, r_j) を取り出し、逆変換することで円が抽出される。

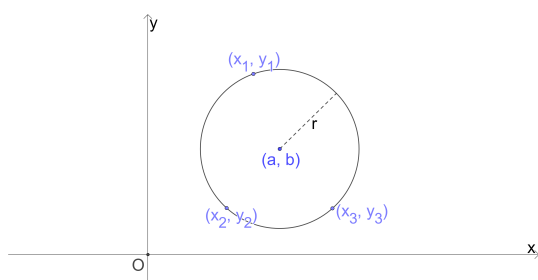


図 8. xy 平面における円

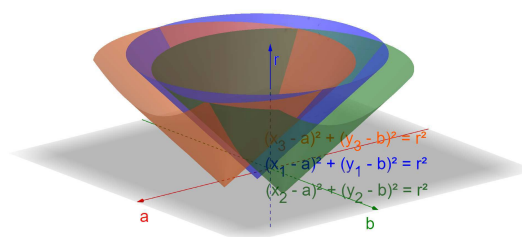


図 9. abr 空間における円の集合

3.3.3. 点の抽出

図形問題に含まれる点は、直線や円のように Hough 変換の手法で抽出することができない。このことから、別の方法として最初に前項で抽出した線分や円から全ての交点を算出する。その中で、通常の交点とは別の役割を持つと判定された点のみを採択し、通常の交点であると判定された点を削除することで点の抽出としている。ここで別の役割を持つ点とは、線分の端点や点同士の中点を指す。

§ 3.4. 図形要素のタグ付け

前節で和算図形問題から抽出した幾何要素に基づいて図形要素を分析し、そのタグ付けを行う。ここで図形要素とは、会田安明の『算法天生法指南』[8]にある図形問題を参考に、頻繁に現れる n 角形 ($3 \leq n \leq 6$)・円のいずれかとした。以下では、 n 角形と円のそれぞれに関する分析およびタグ付け方法を説明する。

3.4.1. n 角形の分析とタグ付け

3.3.3 項で図形問題から k 個の点 ($k \geq 3$) が抽出されたとする。図形問題中の n 角形の分析では、最初にこの k 個の点から任意の n 個の点 ($3 \leq n \leq k$) を取り出す、 ${}_k C_n$ 通りの組み合わせを列挙する。次に、得られた組み合わせの一つに対して $(n-1)!$ 通りの円順列を作成する。この円順列に従って n 個の点が 3.3.1 項で抽出した線分で順に繋がり、単純閉路を構成するかどうかを検証する。その結果、単純閉路が発見された場合にはそれが n 角形であると判定している。

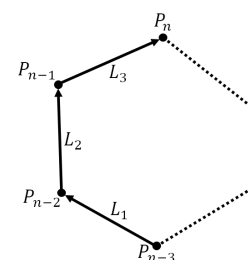


図 10. n 角形の分析

このようにして分析された n 角形について、図形問題にタグ付けするものは特徴的な n 角形に限定している。特徴的な n 角形は n の値によって以下のように定義した。

- $n = 3$ (三角形) : 正三角形・二等辺三角形・直角三角形
- $n = 4$ (四角形) : 正方形・長方形・菱形・等脚台形
- $n = 5$ (五角形) : 正五角形
- $n = 6$ (六角形) : 正六角形

これらの特徴的な n 角形は、 n 角形の辺の長さや内角の大きさを基準に判定され、対応するタグが付与される。また、同時に特徴的な n 角形の個数も数えてタグ付けする。

3.4.2. 円の分析とタグ付け

図形問題に含まれる円は、3.3.2 項で既に抽出されている。そのため、システム内ではここで抽出した円に関して図形問題にタグ付けを行う。さらに、 n 角形と同様に円の個数も数えられ、タグとして付与される。

§ 3.5. 図形要素同士の関係性のタグ付け

前節では和算図形問題における図形要素を分析し、問題にタグ付けを行った。これに加え、図形要素同士の関係性も分析し、タグとして追加する。以下では、図形要素の組ごとに関係性の定義を述べ、その分析およびタグ付け方法を説明する。これらの関係性は会田安明の『算法天生法指南』[8]にある図形問題の特徴を説明できるものとして定義した。

3.5.1. n 角形から見た円との関係性

- 「 n 角形が円に内接する」

図 11 のように n 角形が円の内側に位置し、 n 角形の全ての頂点が円上にある状態を指す。この関係性は「円が n 角形に外接する」と同義である。その分析は、以下の 2 つの条件に基づいて行われる。

- n 角形の重心が円の内側にある。
- n 角形中、 n 個の頂点が円上にある。

これらの条件を満たす場合は「 n 角形が円に内接する」と判定し、図形問題にタグを付与する。

- 「 n 角形が円の内部に存在する」

n 角形が円の内部に位置する点では前述の内接関係と同様だが、図 12 のように n 角形の一部の頂点が円上にある、あるいは全ての頂点が円に接していない場合に該当する。また、これは「円が n 角形の外部に存在する」と同義である。この関係性を分析するための条件は以下の通りである。

- n 角形の重心が円の内部にある。
- n 角形中、 k 個 ($k < n$) の頂点が円上にあり、 $n - k$ 個の頂点が円の内部にある。

この 2 つの条件を満たす場合は「 n 角形が円の内部に存在する」と評価し、図形問題にタグ付けする。

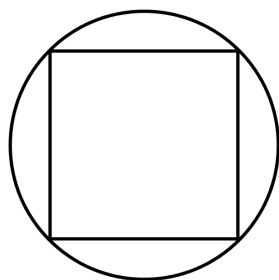


図 11. n 角形が円に内接する

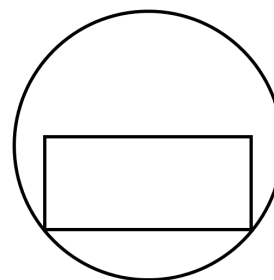


図 12. n 角形が円の内部に存在する

3.5.2. 円から見た n 角形との関係性

- 「円が n 角形に内接する」

図 13 のように円が n 角形の内部に位置し、円周が n 角形の全ての辺に接している状態を表す。この関係性は「 n 角形が円に外接する」と同義であり、以下の 2 つの条件から分析される。

- 円の中心が n 角形の内部にある。
- n 角形中、 n 本の辺が円に接する。

これらの条件に合致する場合は「円が n 角形に内接する」と判定し、図形問題にタグ付けする。

- 「円が n 角形の内部に存在する」

円が n 角形の内部に位置する点では前述の内接関係と同様だが、図 14 のように円周が n 角形の一部の辺に接している、あるいは全ての辺に接していない場合に該当する。また、これは「 n 角形が円の外部に存在する」と同義である。この関係性の分析に必要な条件は以下の通りである。

- 円の中心が n 角形の内部にある。
- n 角形中、 k 本 ($k < n$) の辺が円に接し、 $n - k$ 本の辺が円から離れている。

この 2 つの条件を満たす場合は「円が n 角形の内部に存在する」と評価し、図形問題にタグを付与する。

- 「円と n 角形が互いに隣接する」

図 15 のように円と n 角形が互いに外側に位置して接している状態を指す。この関係性は「 n 角形と円が互いに隣接する」と同義である。その分析は、以下の 2 つの条件に基づいて行われる。

- 円の中心が n 角形の外部にあり、 n 角形の重心が円の外部にある。
- n 角形中、1 個の頂点が円上にある、または 1 本の辺が円に接する。

これらの条件を満たす場合は「円と n 角形が互いに隣接する」と判定し、図形問題にタグ付けする。

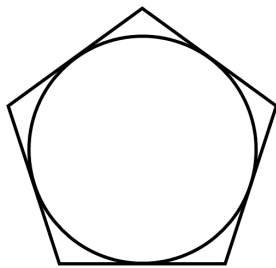


図 13. 円が n 角形に内接する

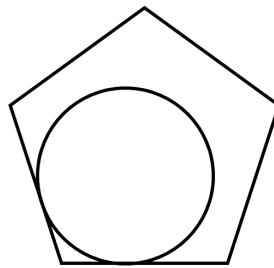


図 14. 円が n 角形の内部に存在する

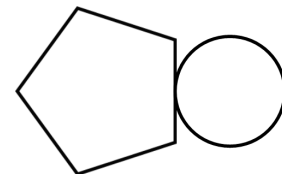


図 15. 円と n 角形が互いに隣接する

3.5.3. 2 つの n 角形同士の関係性

- 「 n_A 角形が n_B 角形に内接する」

図 16 のように n_A 角形が n_B 角形の内部に位置し、 n_A 角形の全ての頂点が n_B 角形に接している状態を指す。この関係性は「 n_B 角形が n_A 角形に外接する」と同義である。これを分析するために、以下の 2 つの条件について検討する。

- n_A 角形の重心が n_B 角形の内側にある。
- n_A 角形中、 n_A 個の頂点が n_B 角形の頂点に一致するか辺上にある。

これらの条件を満たす場合は「 n_A 角形が n_B 角形に内接する」と判定し、図形問題にタグを付与する。

● 「 n_A 角形が n_B 角形の内部に存在する」

n_A 角形が n_B 角形の内部に位置する点では前述の内接関係と同様だが、図 17 のように n_A 角形の一部の頂点が n_B 角形に接している、あるいは全ての頂点が n_B 角形に接していない場合に該当する。また、これは「 n_B 角形が n_A 角形の外部に存在する」と同義である。この関係性を分析するための条件は以下の通りである。

- n_A 角形の重心が n_B 角形の内部にある。
- n_A 角形中、 k 個 ($k < n_A$) の頂点が n_B 角形の頂点に一致するか辺上にあり、 $n_A - k$ 個の頂点が n_B 角形の内部にある。

この 2 つの条件に合致する場合は「 n_A 角形が n_B 角形の内部に存在する」と評価し、図形問題にタグ付けする。

● 「 n_A 角形と n_B 角形が互いに隣接する」

図 18 のように 2 つの n 角形が互いに外側に位置して接している状態を表す。この関係性は「 n_B 角形と n_A 角形が互いに隣接する」と同義であり、以下の 2 つの条件から分析される。

- n_A 角形の重心が n_B 角形の外部にあり、 n_B 角形の重心が n_A 角形の外部にある。
- n_A 角形中、1 個または 2 個の頂点が n_B 角形の頂点に一致するか辺上にある。

これらの条件を満たす場合は「 n_A 角形と n_B 角形が互いに隣接する」と判定し、図形問題にタグを付与する。

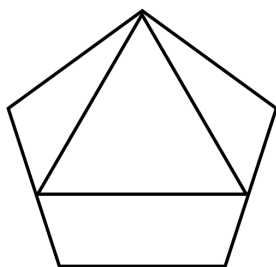


図 16. n_A 角形が n_B 角形に内接する

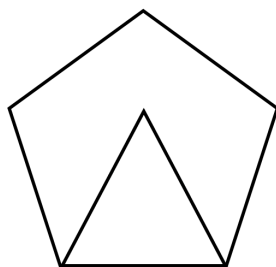


図 17. n_A 角形が n_B 角形の内部に存在する

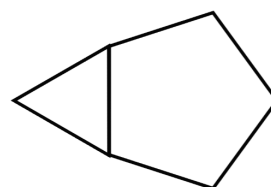


図 18. n_A 角形と n_B 角形が互いに隣接する

3.5.4. 2つの円同士の関係性

- 「円 A が円 B の内側で接する」

図 19 のように円 A が円 B の内側に位置して接している状態を指す。この関係性は「円 B が円 A の外側で接する」と同義である。その分析は、以下の 2 つの条件に基づいて行われる。

- 円 A の中心が円 B の内側にある。
- 円 A と円 B の中心間の距離 = (円 B の半径 - 円 A の半径) が成立する。

これらの条件に合致する場合は「円 A が円 B の内側で接する」と評価し、図形問題にタグ付けする。

- 「円 A が円 B の内部に存在する」

図 20 のように円 A が円 B の内側に位置しているが、接していない状態を表す。この関係性は「円 B が円 A の外部に存在する」と同義である。これを分析するために、以下の 2 つの条件について検討する。

- 円 A の中心が円 B の内側にある。
- 円 A と円 B の中心間の距離 < (円 B の半径 - 円 A の半径) が成立する。

これらの条件を満たす場合は「円 A が円 B の内部に存在する」と判定し、図形問題にタグを付与する。

- 「円 A と円 B が互いに外接する」

図 21 のように 2 つの円が互いに外側に位置して接している状態を指す。この関係性は「円 B と円 A が互いに外接する」と同義であり、以下の 2 つの条件から分析される。

- 円 A の中心が円 B の外側にあり、円 B の中心が円 A の外側にある。
- 円 A と円 B の中心間の距離 = (円 A の半径 + 円 B の半径) が成立する。

これらの条件に合致する場合は「円 A と円 B が互いに外接する」と評価し、図形問題にタグ付けする。

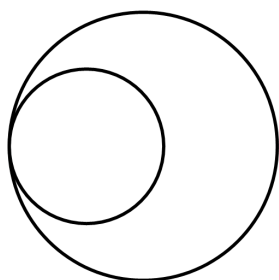


図 19. 円 A が円 B の内側で接する

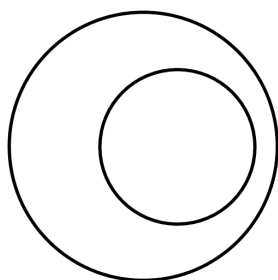


図 20. 円 A が円 B の内部に存在する

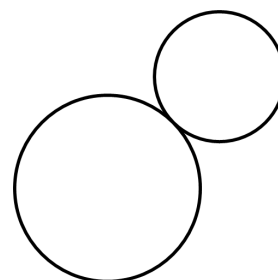


図 21. 円 A と円 B が互いに外接する

§ 4. タグ付け内容のベクトル化とその実例

和算問題の特徴に基づいた資料検索に向けて、付与したタグから問題の類似度を評価するためには、タグの内容をベクトルデータとして扱う必要がある。そこで、前章で説明したシステム内では図形問題へのタグ付け後、その内容を基にしたベクトルデータが作成されるようにした。以下では、そのベクトルデータの構成について述べる。また、このシステムで会田安明の著書『算法天生法指南』[8]に掲載されている図形問題に対して自動タグ付けを試みたので、そのタグ付けおよびベクトルデータの実例を示す。

§ 4.1. ベクトルデータの構成

1つの図形問題に対応するベクトルデータを $\vec{v} = (E_1, E_2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$ と定義する。 E_1 および E_2 はそれぞれ幾何要素の個数、図形要素の個数を表す。特に幾何要素は問題の類似度評価における参考値として、ベクトルデータ作成時にのみ含める情報とする。次に R_1 は 3.5.1 項の「 n 角形から見た円との関係性」の総数、 R_2 は 3.5.2 項の「円から見た n 角形との関係性」の総数を意味する。また、 R_3 は 3.5.3 項の「2つの n 角形同士の関係性」の総数、 R_4 は 3.5.4 項の「2つの円同士の関係性」の総数を示す。 R_5 は幾何要素である線分と円の交差に関する総数を表し、問題の類似度評価を補う情報としてベクトルデータ作成時にのみ含める。次節から E_1 と E_2 、 $R_1 \sim R_5$ に関する詳細を説明する。

§ 4.2. 幾何要素・図形要素の個数

4.2.1. E_1 : 幾何要素の個数

E_1 には 3.3 節で図形問題から抽出した点・線分・円の幾何要素について、それぞれの個数を値として入れる。即ち、 $E_1 = (\text{点の個数}, \text{線分の本数}, \text{円の個数})$ となる。

4.2.2. E_2 : 図形要素の個数

E_2 は 3.4 節で図形問題にタグ付けした図形要素のうち、 n 角形の個数を値に持つ。円の個数は E_1 に含まれるため、ここでは除く。以上より、 E_2 は次のように表される。

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2 = (E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{2,4}) \\ E_{2,1} = (\text{三角形の個数, 正三角形の個数, 直角三角形の個数, 二等辺三角形の個数}) \\ E_{2,2} = (\text{四角形の個数, 正方形の個数, 長方形の個数, 菱形の個数, 等脚台形の個数}) \\ E_{2,3} = (\text{五角形の個数, 正五角形の個数}) \\ E_{2,4} = (\text{六角形の個数, 正六角形の個数}) \end{array} \right.$$

§ 4.3. 幾何要素同士・図形要素同士の関係性

4.3.1. R_1 : 「 n 角形から見た円との関係性」の総数

3.5.1 項では「 n 角形から見た円との関係性」を「 n 角形が円に内接する」「 n 角形が円の内部に存在する」の二つで定義した。 R_1 はこれらに関するそれぞれの総数を値に持ち、以下のように表すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = (R_{1,3}, R_{1,4}, R_{1,5}, R_{1,6}) \\ R_{1,n} = (\text{「}n\text{ 角形が円に内接する」の総数, 「}n\text{ 角形が円の内部に存在する」の総数}) \end{array} \right.$$

4.3.2. R_2 : 「円から見た n 角形との関係性」の総数

3.5.2 項において「円から見た n 角形との関係性」は「円が n 角形に内接する」「円が n 角形の内部に存在する」「円と n 角形が互いに隣接する」の三つとした。 R_2 にはこれらに関するそれぞれの総数が値として入り、その定義は次の通りである。

$$\left\{ \begin{array}{l} R_2 = (R_{2,3}, R_{2,4}, R_{2,5}, R_{2,6}) \\ R_{2,n} = (\text{「円が }n\text{ 角形に内接する」の総数, 「円が }n\text{ 角形の内部に存在する」の総数,} \\ \quad \text{「円と }n\text{ 角形が互いに隣接する」の総数}) \end{array} \right.$$

4.3.3. R_3 : 「2つの n 角形同士の関係性」の総数

3.5.3 項では「2つの n 角形同士の関係性」を「 n_A 角形が n_B 角形に内接する」「 n_A 角形が n_B 角形の内部に存在する」「 n_A 角形と n_B 角形が互いに隣接する」の三つで定義した。 R_3 はこれらに関するそれぞれの総数を値に持ち、以下のように表すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} R_3 = (R_{3,(3,3)}, \dots, R_{3,(3,6)}, R_{3,(4,3)}, \dots, R_{3,(4,6)}, R_{3,(5,3)}, \dots, R_{3,(5,6)}, R_{3,(6,3)}, \dots, R_{3,(6,6)}) \\ R_{3,(n_A, n_B)} = (\text{「}n_A\text{ 角形が }n_B\text{ 角形に内接する」の総数, 「}n_A\text{ 角形が }n_B\text{ 角形の内部に} \\ \quad \text{存在する」の総数, 「}n_A\text{ 角形と }n_B\text{ 角形が互いに隣接する」の総数}) \end{array} \right.$$

また、3.5.3 項より「 n_A 角形と n_B 角形が互いに隣接する」と「 n_B 角形と n_A 角形が互いに隣接する」は同義であるため、その重複を除いた総数を値として入れる。

4.3.4. R_4 : 「2つの円同士の関係性」の総数

3.5.4 項において「2つの円同士の関係性」は「円 A が円 B の内側で接する」「円 A が円 B の内部に存在する」「円 A と円 B が互いに外接する」の三つとした。 R_4 はこれらに関するそれぞれの総数を値に持つ。即ち、 $R_4 =$ (「円 A が円 B の内側で接する」の総数, 「円 A が円 B の内部に存在する」の総数, 「円 A と円 B が互いに外接する」の総数) となる。また、3.5.4 項より「円 A と円 B が互いに外接する」と「円 B と円 A が互いに外接する」は同義であるため、その重複を除いた総数を値として入れる。

4.3.5. R_5 : 線分と円の交差に関する総数

3.3 節で図形問題から抽出した幾何要素のうち、線分と円について「線分と円が接する」「線分と円が1点で交わる」「線分と円が2点で交わる」の三つの交差関係を定義する。 R_5 にはこれらの関係性の総数が値として入る。従って、 $R_5 =$ (「線分と円が接する」総数, 「線分と円が1点で交わる」総数, 「線分と円が2点で交わる」総数) と表される。

§ 4.4. タグ付け・ベクトルデータの実例

前章で述べた和算図形問題への自動タグ付けシステムを用いて、会田安明の『算法天生法指南』[8]にある図形問題に自動タグ付けを行い、ベクトルデータを作成した。以下では、その実例について紹介する。システムに入力する図形問題は、図 22 の「互いに外接する三つの円とそれらに外接する正五角形」とした。図 23 はこの問題に対する画像認識結果である。表 1 および表 2 はそれぞれ、問題から分析された図形要素、図形要素同士の関係性のタグ付け結果を表す。

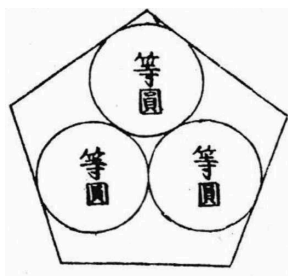


図 22. 和算図形問題

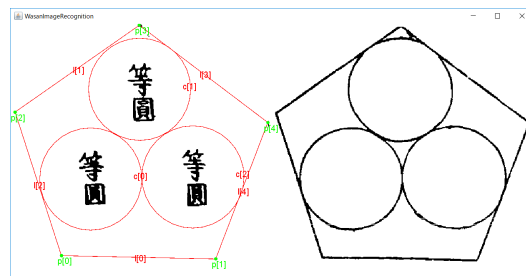


図 23. 画像認識結果

正五角形 ($P_0 P_1 P_2 P_3 P_4$)	五角形 $\times 1$
円 (C_0)	円 $\times 3$
円 (C_1)	
円 (C_2)	

表 1. 図形要素のタグ付け

円 (C_0) が正五角形 $(P_0 P_1 P_4 P_3 P_2)$ の内部に存在する。 (= 正五角形 $(P_0 P_1 P_4 P_3 P_2)$ が円 (C_0) の外部に存在する。)	円 (C_0) と円 (C_1) が互いに外接する。 (= 円 (C_1) と円 (C_0) が互いに外接する。)
円 (C_1) が正五角形 $(P_0 P_1 P_4 P_3 P_2)$ の内部に存在する。 (= 正五角形 $(P_0 P_1 P_4 P_3 P_2)$ が円 (C_1) の外部に存在する。)	円 (C_0) と円 (C_2) が互いに外接する。 (= 円 (C_2) と円 (C_0) が互いに外接する。)
円 (C_2) が正五角形 $(P_0 P_1 P_4 P_3 P_2)$ の内部に存在する。 (= 正五角形 $(P_0 P_1 P_4 P_3 P_2)$ が円 (C_2) の外部に存在する。)	円 (C_1) と円 (C_2) が互いに外接する。 (= 円 (C_2) と円 (C_1) が互いに外接する。)

表 2. 図形要素同士の関係性のタグ付け

また、図形問題へのタグ付け内容に基づいて作成されたベクトルデータは以下の通りとなった。ここでは、4.1 節で述べたように $\vec{v} = (E_1, E_2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5)$ とした場合の $E_1 \sim R_5$ について、それぞれのデータを示す。これらの数値の順に関しては 4.2 節や 4.3 節を参考にされたい。

$$\vec{v}: \begin{cases} E_1 = (5, 5, 3), E_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) \\ R_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), R_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0) \\ R_3 = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), R_4 = (0, 0, 3), R_5 = (4, 0, 0) \end{cases}$$

§ 5. 今後の課題・展望

本研究では、和算問題の特徴に基づいた和算資料データベース内検索に向けて、図形問題を対象とした自動タグ付け手法の提案とシステムのプロトタイプ実装を行った。本章では、これに対する今後の課題や展望について述べる。

§ 5.1. 文字要素のタグ付け

和算図形問題への自動タグ付けでは、図形要素そのものと図形要素同士の関係性をタグとした。これに加え、図形問題の特徴を捉えるための補足情報として、図 24 のような問題中の文字要素をタグに利用したいと考えている。図形問題に含まれる文字要素は既存の文字認識では十分に抽出できず、機械学習の手法が必要となる。特に CNN(畳み込みニューラルネットワーク) と呼ばれる機械学習のモデルはこのような画像認識に対して有効である。このモデルを用いて多数の文字要素の画像を学習し、その学習データに基づいて文字認識を行うことで文字要素のタグを付与したい。

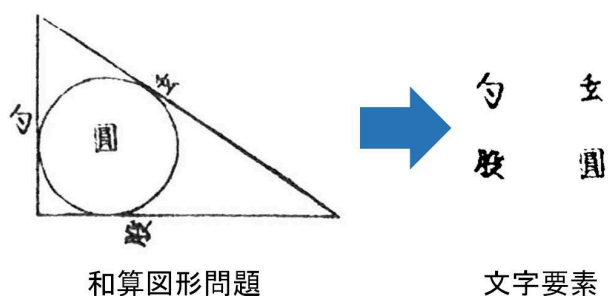


図 24. 和算図形問題中の文字要素

§ 5.2. 幾何要素抽出と図形要素分析の改善

4.4 節では、会田安明の『算法天生法指南』[8]に掲載されている図形問題に対するタグ付け例を示した。これらの図形問題へのタグ付け結果から得られた課題として、Hough 変換を利用した幾何要素の抽出では、短い線分や小さな円などの細かい要素も抽出することができるように認識精度の向上を図りたい。また、幾何要素に基づいた図形要素の分析は、 n 角形や円以外の楕円や半円などの図形に対応していないことから、これらに対する認識の実装が急がれる。

§ 5.3. タグに基づく和算図形問題の類似度評価

3 章では和算図形問題に自動タグ付けを行い、続く 4 章ではその内容を基にベクトルデータを作成した。今後は和算問題の特徴を利用した資料検索に向けて問題の類似度評価、即ちベクトルデータのクラスター分析を行う必要がある。クラスター分析の一般的な手法として、ベクトル間のユークリッド距離の大小を指標とする方法やコサイン類似度と呼ばれるベクトル間の角度を用いる方法が知られている。また、関連研究の [4] では、行列分解の一手法である NMF(非負値行列因子分解) を用いてベクトルデータを解析し、その結果に基づいて図形問題の類似度評価および類別を行った。図形問題への自動タグ付け後に作成されるベクトルデータに対してこれらの手法を試し、問題の類似度評価として適切と思われるものを模索していきたい。

§ 5.4. 和算資料データベースへの導入に関する構想

2.3 節で述べた和算問題の特徴に基づいた資料検索について、これを既存の和算資料データベースに導入し、活用できるような構想を立てたいと考えている。この資料検索は 2.3.1 項や 2.3.2 項にあるように、数学史研究や数学教育に向けて利用されることを想定していた。このようなユーザ視点を踏まえて、和算資料データベース内で検索を可能とするためのインターフェースやそのシステム構造の詳細について考察する必要がある。

参考文献

- [1] 脇克志・土橋拓馬、「図形検索を可能とする和算データベースの構築」、日本数学会 2017 年度年会、2017 年 3 月 24 日～27 日、首都大学東京
- [2] 脇克志・土橋拓馬、「和算の画像データベースにおける幾何要素認識と自動タグ付け」、日本数学会 2017 年度秋季総合分科会、2017 年 9 月 11 日～14 日、山形大学
- [3] 土橋拓馬・脇克志・阿原一志、「画像認識に基づく和算図形問題への自動タグ付け」、日本数学会 2018 年度年会、2018 年 3 月 18 日～21 日、東京大学
- [4] 脇克志・土橋拓馬・阿原一志、「NMF による和算図形問題類似評価」、日本数学会 2018 年度年会、2018 年 3 月 18 日～21 日、東京大学
- [5] 土橋拓馬、「画像認識を用いた和算図形問題に対する自動タグ付けと問題の類似度評価」、明治大学大学院 先端数理科学研究科 修士論文 (未公刊)、2019 年
- [6] 東北大学附属図書館 和算資料データベース (旧：和算ポータル)
https://www.i-repository.net/il/meta_pub/cresult, (参照 2019 年 2 月 12 日)
- [7] 山形大学学術機関リポジトリ 佐久間文庫 (和算)
https://yamagata.repo.nii.ac.jp/index.php?action=pages_view_main&active_action=repository_view_main_item_snippet&index_id=74&pn=1&count=20&order=18&lang=japanese&page_id=13&block_id=29, (参照 2019 年 2 月 12 日)
- [8] 藤井康生、「最上流算法天生法指南 (全五巻) 問題の解説」、大阪教育図書、1997 年