安定結婚問題に対する最適解付き例題生成の困難性

松山 祐貴 *　　宮崎 修一 †

1　はじめに

男女が n 人ずつおり，各人が異性に対する希望順位をつけたリストを持っている。そのリストを元に男女のペアを作る際、「互いに現在マッチしている相手よりも上位である」ペアが存在しないような組み合わせを安定マッチングという。安定マッチングを求める問題は安定結婚問題 [1] と呼ばれ、盛んに研究されている。また、安定結婚問題は研修医の病院配属や大学の研究室配属等に利用されている。

安定マッチングは一般に複数存在する。希望リストがタイ (同順位) を含まない完全リストの場合 (SM)、タイを含む完全リストの場合 (SMT)、タイを含まない不完全リストの場合 (SMI) は、安定マッチングのペア数 (サイズと呼ぶ) はすべて等しく [2,13,14]、ある一つの安定マッチングを Gale-Shapley アルゴリズム [1] を用いて多項式時間で求めることができる [4]。したがって、この三つの問題において、最大サイズの安定マッチングを求めることは容易である。

しかし、希望リストがタイを含む不完全リストの場合 (SMTI)、複数存在する安定マッチングはサイズが等しいとは限らない。そのため、安定マッチングは多項式時間で求められるものの、そのサイズが最大である保証がない。サイズ最大の安定マッチングを求める問題は NP 困難であり [6,9]、多項式時間アルゴリズムの存在は期待できない。そのため、局所探索法などのヒューリスティックなアプローチや、理論的な精度保証のある近似アルゴリズム [7,10,11] などが考案されている。

アルゴリズムの良さを実験的に評価する研究の中に最適解とアルゴリズムの解を比較する実験もあるが [3,5,12]、サイズの大きな例題の最適解を求めるには指数時間を要する。そのため、サイズの小さな例題に対してしか実験できないといった問題が存在した。よって、あらかじめ最適解のサイズがわかっている例題を用いることができるならば、この問題を解決できる。アルゴリズムの性能を公平かつ正確に評価するためには、より多彩な例題を使用することが望ましい。しかし、文献 [8,15] と同様の手法を用いることにより、任意の例題を最適解付きで生成できるような多項式時間アルゴリズムが存在するならば NP=coNP であることを示すことができる。

そこで本研究では、最適解が既知であり、すべてとは言わないまでも幅広い例題を生成可能なアルゴリズムの構築可能性を検討する。本研究では、実験的性能評価のための入力として広く使われている Gent と Prosser の手法 [3] をベースにした例題生成アルゴリズムを提案する。具体的には、まず SMI 例題 I を作り、その安定マッチング M を求める。SMI 例題ではすべての安定マッチングが同サイズであるため [2]、M は I の最大サイズ安定マッチングである。その後希望リストにタイを次々に追加していくことにより、最終的に SMTI 例題 I' を作る。タイを追加する前の例題の安定マッチングはタイを追加した後の例題でも安定であるため、M は I' の安定マッチングである。我々の目標は、M が I' の最大安定マッチングとなることである。そのためには、タイを追加する際に M より大きな安定マッチングを作ってしまわないことが必要である。

第 1 の手法では、人物 p のリスト上でタイを追加する際、p の M でのパートナーをタイに入れる場合に、ある制約を設けた。これにより、M より大きな安定マッチングを作らないという条件を満たすことができる。しかしその反面、M より小さな安定マッチングも作らないため、安定マッチングのサイズが常に一定であるという問題が判明した。

次に、M より大きな安定マッチングを作らないという条件を保ちつつ、タイの追加方法に関する上記の制約を緩めることによって、サイズの小さな安定マッチングを持つ例題が生成できる可能性を検討した。第 1 の手法よりも詳細な分析を行い、実際に制約を緩めた生成手法を新たに考案したものの、依然として安定マッチングのサイズが一定であることがわかった。

そこで制約を最大まで緩和し、タイを追加する際に M より大きな安定マッチングが出来るか否かを判定し、出来ないならば追加するというアルゴリズムを考えた。この判定を正確に行えるならば、サイズの小さな安定マッチングを持つ例題を生成することができる。

* 京都大学 情報学研究科
† 京都大学 学術情報メディアセンター

しかし、この判定を行う多項式時間アルゴリズムが存在するならば P=NP となることがわかった。

本研究で得られた事実により、所望の例題生成アルゴリズムを得るためには、タイを追加する際の制約として 2 番目のアルゴリズムよりは緩く、3 番目のアルゴリズムよりは厳しいもので、さらに多項式時間で判定できるものを模索する必要があることが分かった。

2 準備

2.1 最大サイズ安定結婚問題

SMTI のサイズ n の例題は、n 人の男性、n 人の女性、および各人のタイを含む不完全希望リストから構成される。人物 p の希望リストに、（異性の）q という人物が含まれている場合、「q は p に**受け入れ可能**」という。ここで、男性 m が女性 w を受け入れ可能な時のみ、w が m を受け入れ可能としても一般性を失わない。

p, q, q' 三人の人物がおり、q, q' が同じ性別であり、p が異性であるとする。p の希望リストにおいて、q を q' より上位に書いてある場合、$q \succ_p q'$ と書き、同順位に書いてある場合、$q =_p q'$ と書く。

ペア (m, w) の集合で、各人は高々一度しか出現しないものを**マッチング**と呼ぶ。マッチング M に含まれるペアの数を M の**サイズ**と呼び、$|M|$ と書く。マッチング M に対して $(m, w) \in M$ ならば、$M(m) = w$ および $M(w) = m$ と書き、m と w は**マッチしている**という。また、このときマッチング M において m を w の**パートナー**、w を m の**パートナー**と呼ぶ。人物 p が M に現れない場合、p は M において**独身**であるという。

マッチング M に対して次の 3 つの条件すべてを満たすペア (m, w) を M の**ブロッキングペア**と呼ぶ。

1. $M(m) \neq w$ で、m, w は互いに受け入れ可能
2. $w \succ_m M(m)$ または m が M において独身
3. $m \succ_w M(w)$ または w は M において独身

このようなブロッキングペアを持たないマッチングを**弱安定マッチング**という。本論文では弱安定マッチングを単に**安定マッチング**と呼ぶこととする。SMTI 例題には一般に異なるサイズの安定マッチングが存在する。SMTI 例題 I の最大サイズ安定マッチングのサイズを $opt(I)$ と書く。そして、サイズ最大の安定マッチングを求める問題を**最大サイズ安定結婚問題** (MAX SMTI) と呼ぶ。

2.2 例題生成アルゴリズム

本稿で言う MAX SMTI の例題生成アルゴリズムとは、自然数 n を入力とし、サイズ n の SMTI 例題 I とその最適解との組 $(I, opt(I))$ を非決定的に出力するものである。例題生成アルゴリズム G が任意の SMTI 例題を生成可能なとき、G は**完全**であると言う。文献 [8,15] と同様の議論で、以下の定理を示すことができる。

定理 1. MAX SMTI に対する完全な多項式時間例題生成アルゴリズムが存在するならば、NP=coNP である。

証明. MAX SMTI の判定問題に対応する以下の言語 $L = \{(I, k) \mid I \text{ は SMTI 例題}, opt(I) \geq k\}$ を考える。L は NP 完全であり [6]、言語 $\{(I, k) \mid I \text{ は SMTI 例題}, k \text{ は整数}\}$ はクラス P に属するため、L の補集合 $\overline{L} = \{(I, k) \mid I \text{ は SMTI 例題}, opt(I) < k\}$ は coNP 完全である。

完全な多項式時間例題生成アルゴリズム H が存在したとし、それを使って入力 (I, k) が $\overline{L}$ に属するか否かを非決定的に判定する以下のアルゴリズム A を考える。A は I のサイズ n を入力として H を実行し、その出力を (I', k') とする。$I' = I$ かつ $k' < k$ ならば (I, k) を受理し、それ以外ならば受理しない。これは多項式時間で動作し、$\overline{L}$ への所属を正しく判定するので、$\overline{L} \in NP$ となる。これより NP=coNP が導かれる。 □

2.3 Gale-Shapley アルゴリズム

Gale と Shapley は、SM において安定マッチングを見つけるための多項式時間アルゴリズム (Gale-Shapley アルゴリズム) [1] を提案した。本論文で提案する例題生成手法は、このアルゴリズムをサブルーチンとして使用する。Gale-Shapley アルゴリズムを以下に記す。

Gale-Shapley アルゴリズム

独身の男性 m が存在する限り、以下の操作を繰り返す。

ステップ 1

男性 m はまだプロポーズしていない女性の中で、希望リストの最高位の女性 w にプロポーズする。

ステップ 2

1. w が独身ならば、m は w と婚約する。
2. w がすでに m' と婚約している場合、
   (a) $m' \succ_w m$ ならば、m からのプロポーズを断る。
   (b) $m \succ_w m'$ ならば、m' との婚約を解消し m と婚約する。

2.4 Gent と Prosser の例題生成アルゴリズム

本研究の提案手法の基となる、[3] で使用されている例題生成アルゴリズムを記す。
入力を以下の三つとする。

- 例題サイズ n
- リストから人物を除く確率 p_1
- リストの一つ上の人物と同順位になる確率 p_2

Gent と Prosser の例題生成アルゴリズム

ステップ 1
すべての男女について、長さ n のランダムなリスト、すなわち n 人の異性の置換を生成する。

ステップ 2
各男女のペア (m, w) に対して、確率 p_1 で m のリストから w を削除し、w のリストから m を削除する。

ステップ 3
いずれかの男女のリストが空になった場合は、例題を破棄してステップ 1 に戻り、やり直す。

ステップ 4
男性 m と m のリスト上の $j (j \geq 2)$ 番目の各女性について、確率 p_2 で $j-1$ 番目の女性と同順位にする。すなわち 2 人の女性をタイに入れる。$j-1$ 番目の女性がすでにタイに入っているなら j 番目の女性を同じタイに入れる。この操作をすべての男性に対して行った後、すべての女性に対しても同様の操作を行い、男性をタイに入れる。

ステップ 1 でタイのない完全リストがまず出来上がる。次にステップ 2 でリストの長さの期待値が $p_1 n$ となる不完全リストとなる。

3 例題生成アルゴリズム 1

Gent と Prosser の例題生成手法 [3] は確率的アルゴリズムであるが、2 節で述べたように本稿では非決定性の例題生成アルゴリズムを考えるため、Gent と Prosser のアルゴリズムの確率的動作部分を非決定性に置き換える。また、ステップ 3 においてリストが空になった場合の対処は本質的ではないため、ここではやり直しはしないことにする。その上で、Gent と Prosser のアルゴリズムのステップ 3 までと同様に進め、SMI 例題 I を得る。I に Gale-Shapley アルゴリズムを用いることにより、安定マッチング M を求める。

以下では、希望リスト上でタイに含まれていない人物は、便宜上サイズ 1 のタイに含まれているものとみなす。タイの**結合**とは、ある人物の希望リスト上で隣り合うタイをまとめて 1 つのタイにすることを指す。ステップ 5 では隣り合う 2 つのタイを非決定的に結合することにより、例題に（長さ 1 ではない実質的な）タイを追加していく。ただし、タイを結合する場所を制限することにより、タイ結合後も M が最適解であり続けるようにする。このアルゴリズムを本論文では**アルゴリズム 1** と呼ぶことにする。アルゴリズム 1 への入力は、生成する例題のサイズ n である。

アルゴリズム 1

ステップ 1
すべての男女について、長さ n のリスト、すなわち n 人の異性の置換を生成する。

ステップ 2
各男女のペア (m, w) に対して、このペアを例題から削除するか否かを決定する。削除すると決定した場合は、m のリストから w を削除し、w のリストから m を削除する。

ステップ 3
作成された SMI 例題を I とする。

ステップ 4
I を Gale-Shapley アルゴリズムを使って解き、得られたマッチングを M とする。

ステップ 5
以下を一定回数繰り返す。任意に人物 p を選び、また p の隣り合う 2 つのタイを選び、これらのタイを結合する。ただし、異性 $M(p)$ が含まれるタイと、その直後のタイとは結合しない。

ステップ 6
作成された SMTI 例題を I' とする。$(I', |M|)$ を出力する。

3.1 出力が正しいことの証明

ここでは、ステップ 6 の出力が例題と最適解のペアになっていることを示す。

定理 2. $opt(I') = |M|$ である。

証明. これを示すためには (1) ステップ 4 で求めた M が I' の安定マッチングであること、および (2) M よりサイズの大きな I' の安定マッチングが存在しないことを言えばよい。

(1) M が I' で安定でないと仮定する。すると、I' において、M のブロッキングペア (m,w) が存在する。しかし、弱安定性におけるブロッキングペアの定義より、(m,w) は I においても M のブロッキングペアとなるため、M が I で安定であることに矛盾する。

(2) M よりサイズの大きい I' の安定マッチング M' が存在すると仮定する。すると、頂点集合 $V=\{m_1,m_2,\ldots,m_n,w_1,w_2,\ldots,w_n\}$、枝集合 $E=\{(m,w)|(m,w)\in(M\cup M')\}$ とする二部グラフ上に、M では独身であるが、M' ではマッチしている男性 m_1 から始まり、M では独身であるが、M' ではマッチしている女性 w_k で終わるパスが存在する。$M'(m_1)=w_1$、$M(w_1)=m_2$、$M'(m_2)=w_2$、$M(w_k)=m_{k-1}$、$M'(w_k)=m_k$ とする。図 1 で、実線が M' のペア、点線が M のペアを表す。

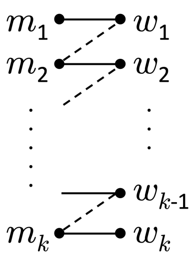

図 1　二部グラフ上のパス

I で $m_1\succ_{w_1}m_2$ ならば、(m_1,w_1) が M のブロッキングペアとなり M の安定性に矛盾するため、I で $m_2\succ_{w_1}m_1$ である。ステップ 5 で $M(w_1)$ はそれより下位の男性とは同じタイにしない条件により、m_2 と m_1 は同じタイに入らないため、I' でも $m_2\succ_{w_1}m_1$ となる。

次に、I で $w_1\succ_{m_2}w_2$ ならば、ステップ 5 で $M(m_2)$ はそれより下位の女性とは同じタイにしない条件により、w_1 と w_2 は同じタイに入らないため、I' でも $w_1\succ_{m_2}w_2$ となる。すると、(m_2,w_1) が I' における M' のブロッキングペアとなり M' の安定性に矛盾するため、I で $w_2\succ_{m_2}w_1$ である。

同様に、このパス上の m_1 以外のすべての男性 m について、I で $M'(m)\succ_m M(m)$ が、パス上の w_k 以外のすべての女性 w について、I で $M(w)\succ_w M'(w)$ が成立する。図 2 は図 1 に希望リストを書き加えたものである。

すると、I で $w_k\succ_{m_k}w_{k-1}$ となり、(m_k,w_k) が M のブロッキングペアとなるため M の安定性に矛盾す

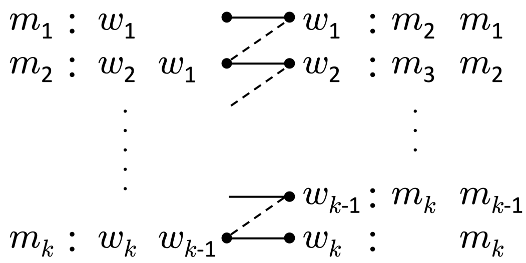

図 2　各人の希望リスト

る。よって、M よりサイズの大きい I' の安定マッチングは存在しない。 □

3.2　安定マッチングサイズが一定であることの証明

定理 3. I' の安定マッチングはすべて同じサイズである。

証明. I' のタイを壊した SMI 例題すべてからなる集合を $S=\{I_1,I_2,\ldots,I_k\}$ とする。ステップ 5 でタイを結合して I から I' を作る際、各人 p のリストにおいて $M(p)$ はそれより下位の異性と同じタイに入らない。そのため、I で $M(p)\succ_p q$ ならば I' でも $M(p)\succ_p q$ であり、その結果任意の $I''(I''\in S)$ において $M(p)\succ_p q$ となる。したがって、M は S のすべての SMI 例題で安定である。

また、I' の任意の安定マッチングを M' とすると、M' は S のうち、少なくとも一つの SMI 例題で安定である [9]。その例題を I_i とする。前述の議論より、I_i において、M も安定である。SMI 例題はすべての安定マッチングのサイズが等しいため [2,13,14]、$|M|=|M'|$ となる。したがって、I' の安定マッチングはすべてサイズが $|M|$ となる。 □

4　例題生成アルゴリズム 2

アルゴリズム 1 で結合してはいけないという制約を加えたタイを結合しても、最適解のサイズが変化しない場合が存在する。この場合の条件を分析し、アルゴリズム 1 の制約を緩めた生成手法を新たに考案した。このアルゴリズムを本論文では**アルゴリズム 2** と呼ぶことにする。

アルゴリズム 2

アルゴリズム 1 のステップ 3 まで同じ方法で SMI 例題 I を作成する。

ステップ 4
I を Gale-Shapley アルゴリズムを使って解き、得られたマッチングを M とする。

ステップ 5
以下を一定回数繰り返す。任意に人物 p を選び、また p の隣り合う二つのタイを選び、これらのタイを結合する。ただし、上位側のタイに $M(p)$ が含まれ、かつ下位側のタイに独身または $p \succeq_r M(r)$ となる r が含まれるなら、これらのタイは結合しない。

ステップ 6
できた SMTI 例題を I' とする。$(I', |M|)$ を出力する。

4.1 出力が正しいことの証明

定理 4. $opt(I') = |M|$ である。

証明. M よりサイズの大きい I' の安定マッチング M' が存在すると仮定する。すると、頂点集合 $V = \{m_1, m_2, \ldots, m_n, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$、枝集合 $E = \{(m,w)|(m,w) \in (M \cup M')\}$ とする二部グラフ上に、M では独身であるが、M' ではマッチしている男性 m_1 から始まり、M では独身であるが、M' ではマッチしている女性 w_k で終わるパスが存在する。$M'(m_1) = w_1$、$M(w_1) = m_2$、$M'(m_2) = w_2$、$M(w_k) = m_{k-1}$、$M'(w_k) = m_k$ とする。図 3 で、実線が M' のペア、点線が M のペアを表す。

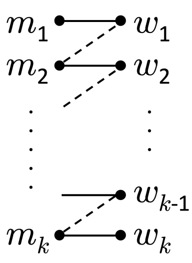

図 3　二部グラフ上のパス

w_1 の希望リストにおいて、I で $m_1 \succ_{w_1} m_2$ ならば、M において (m_1, w_1) がブロッキングペアとなるため、M の安定性に矛盾する。よって、I で $m_2 \succ_{w_1} m_1$ となる。また、m_1 は M において独身であるため、ステップ 5 の条件より I' で $m_2 =_{w_1} m_1$ とはならない。したがって、I' で $m_2 \succ_{w_1} m_1$ となる。

次に m_2 の希望リストにおいて、I' で $w_1 \succ_{m_2} w_2$ ならば、M' において (m_2, w_1) がブロッキングペアとなるため、M' の安定性に矛盾する。したがって、I' で $w_2 \succeq_{m_2} w_1$ となる。I' で $w_2 \succ_{m_2} w_1$ の場合は I でも $w_2 \succ_{m_2} w_1$ となる。I' で $w_1 =_{m_2} w_2$ の場合は I では $w_1 \succ_{m_2} w_2$ および $w_2 \succ_{m_2} w_1$ のどちらも可能性がある。したがって、これらは「(1) I で $w_1 \succ_{m_2} w_2$ かつ I' で $w_1 =_{m_2} w_2$」と「(2) I で $w_2 \succ_{m_2} w_1$」に場合分けできる。

(1) I で $w_1 \succ_{m_2} w_2$ かつ I' で $w_1 =_{m_2} w_2$ の場合

I で $m_2 \succ_{w_2} m_3$ であると仮定する。I で $w_1 \succ_{m_2} w_2$ であり、$M(m_2) = w_1$ であるため、ステップ 5 の条件より、w_1 と w_2 が同じタイに入ることはない。これは $w_1 =_{m_2} w_2$ に矛盾するため、I で $m_3 \succ_{w_2} m_2$ である。また、ステップ 5 の条件により、I' において $w_1 =_{m_2} w_2$ と $m_3 =_{w_2} m_2$ の両方が成り立つことはない。場合分けの条件より I' で $w_1 =_{m_2} w_2$ であるので、I' で $m_3 =_{w_2} m_2$ は成り立たず、I' でも $m_3 \succ_{w_2} m_2$ となる。

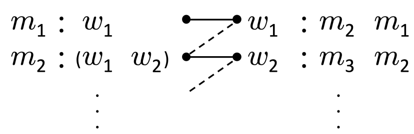

図 4　(1) の場合の二部グラフ

(2) I で $w_2 \succ_{m_2} w_1$ の場合

I で $m_2 \succ_{w_2} m_3$ ならば、(m_2, w_2) が M の I におけるブロッキングペアとなる。よって I で $m_3 \succ_{w_2} m_2$ である。I で $w_2 \succ_{m_2} w_1$ なので、ステップ 5 の条件より m_3 が含まれたタイと m_2 が含まれたタイは結合されない。よって I' でも $m_3 \succ_{w_2} m_2$ となる。

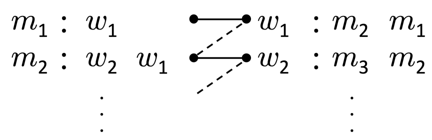

図 5　(2) の場合の二部グラフ

以上により、(1)、(2) のいずれの場合も I' で $m_3 \succ_{w_2} m_2$ である。もし I' で $w_2 \succ_{m_3} w_3$ ならば、(m_3, w_2) が M' のブロッキングペアとなるため、I' で $w_3 \succeq_{m_3} w_2$ である。上記 (1)、(2) と同様の場合分けを経ることに

より、I' で $m_4 \succ_{w_3} m_3$ となることがわかる。以下、同じ議論を繰り返すことにより、I' で $m_k \succ_{w_{k-1}} m_{k-1}$ となる。

ここで、m_k の希望リストにおいて、I で $w_k \succ_{m_k} w_{k-1}$ ならば、M において (m_k, w_k) がブロッキングペアとなるため、M の安定性に矛盾する。よって、I で $w_{k-1} \succ_{m_k} w_k$ となる。また、w_k は M において独身であるため、ステップ 5 の条件より I' で $w_{k-1} =_{m_k} w_k$ とはならない。したがって、I' で $w_{k-1} \succ_{m_k} w_k$ となる。

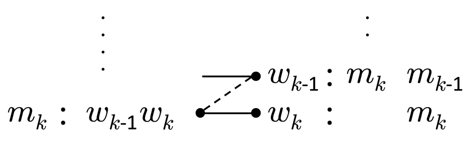

図 6　w_{k-1}, m_k, w_k の希望リスト

すると、(m_k, w_{k-1}) が M' のブロッキングペアとなり、M' の安定性に矛盾する。したがって、M よりサイズの大きい I' の安定マッチングは存在しない。 □

4.2　安定マッチングサイズが一定であることの証明

定理 5. ステップ 4 で求めた安定マッチング M よりサイズの小さい I' の安定マッチングは存在しない。

証明. M よりサイズの小さい I' の安定マッチング M' が存在すると仮定する。すると、頂点集合 $V = \{m_1, m_2, \ldots, m_n, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$、枝集合 $E = \{(m,w) | (m,w) \in (M \cup M')\}$ とする二部グラフを考えた時に、M でマッチしているが、M' では独身の女性 w_1 から始まり、M ではマッチしているが、M' では独身の男性 m_k で終わるパスが存在する。$M(w_1) = m_1$、$M'(m_1) = w_2$、$M(w_2) = m_2$、$M'(m_{k-1}) = w_k$、$M(w_k) = m_k$ とする。

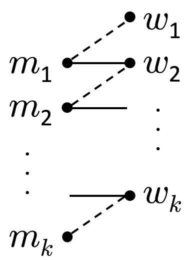

図 7　二部グラフ上のパス

図 7 で、実線が M' のペア、点線が M のペアを表す。

定理 4 と同様の議論により、I' で $m_k \succ_{w_k} m_{k-1}$ となる。すると、(m_k, w_k) が M' のブロッキングペアとなり、M' の安定性に矛盾する。したがって、M よりサイズの小さい I' の安定マッチングは存在しない。 □

5　例題生成アルゴリズム 3

まず、SMTI 例題の隣接する二つのタイを結合した結果、安定マッチングの最大サイズが増えるか否かを判定する以下の問題を考える。

サイズ増加判定問題

入力： SMTI 例題 I と $\tilde{I}$。ただし $\tilde{I}$ は、I に対して、ある人物 p の希望リスト上の隣接する二つのタイを結合した結果。

答： $opt(\tilde{I}) = opt(I)$ ならば YES。そうでなければ NO。

本節で提案する**アルゴリズム 3** では、これまでのアルゴリズムと同様隣接するタイを結合していくが、結合する前にサイズ増加判定問題を解き、その結果が YES であれば結合する、NO であれば結合しないといった動作をする。

アルゴリズム 3

アルゴリズム 1 のステップ 3 までと同じ方法で SMI 例題 I を作成する。

ステップ 4
I を Gale-Shapley アルゴリズムを使って解き、得られたマッチングを M とする。

ステップ 5
以下を一定回数繰り返す。任意に人物 p を選び、また p の隣り合う二つのタイを選ぶ。これらを入力としてサイズ増加判定問題を解き、答が YES であれば結合し、NO であれば結合しない。

ステップ 6
作成された SMTI 例題を I' とする。$(I', |M|)$ を出力する。

5.1　困難性の証明

サイズ増加判定問題を多項式時間で解くことが出来れば、アルゴリズム 3 は多項式時間で動作する。しかし定理 6 が示すように、サイズ増加判定問題は NP 困難である。

まず、以下の補題 1 を示す。サイズ増加判定問題の入力 I と $\tilde{I}$ は必ず $opt(\tilde{I}) \geq opt(I)$ の関係にあるため、答が NO であることは $opt(\tilde{I}) > opt(I)$ を意味する。補題 1 は、$opt(\tilde{I})$ は $opt(I)$ より高々 1 しか大きくならな

いことを保証している。

補題 1. I と $\tilde{I}$ をサイズ増加判定問題の入力の SMTI 例題とする。このとき、$opt(\tilde{I}) \leq opt(I) + 1$ が成り立つ。

証明. 一般性を失うことなく、タイを結合される人物を男性とし m とする。I の最大サイズ安定マッチングの一つを M、$\tilde{I}$ の最大サイズ安定マッチングの一つを $\tilde{M}$ とする。すなわち $opt(I) = |M|$、$opt(\tilde{I}) = |\tilde{M}|$ である。

文献 [9] より $\tilde{M}$ を安定マッチングとする $\tilde{I}$ のタイの壊し方が存在する。そのようにして得られた SMI 例題を $\tilde{I_1}$ とする。次に、I において男性 m を除くすべての人物のタイを $\tilde{I_1}$ と同じように壊して得られた SMTI 例題を I_1 とし、I_1 の最大サイズ安定マッチングの一つを M_1 とする。M_1 は I の安定マッチングでもあるため、$|M_1| \leq |M|$ である。

ここで、定理 2 の証明と同様に M_1 と $\tilde{M}$ を重ね合わせた二部グラフを考えると、連結成分は孤立頂点、パス、またはサイクルとなる。M_1 は I_1 で、$\tilde{M}$ は $\tilde{I_1}$ で安定であり、I_1 と $\tilde{I_1}$ は m 以外は同じ希望リストを持つため、定理 2 の証明と類似の議論を行うことにより、パスが存在するならばそのパスは男性 m を含んでいることが言える。すなわパスは高々一つしか存在しないため、M_1 と $\tilde{M}$ のサイズは高々 1 しか違わず、$|\tilde{M}| \leq |M_1| + 1 \leq |M| + 1$ となり、証明が完結する。 □

定理 6. サイズ増加判定問題を解く決定性多項式時間アルゴリズムが存在するなら P=NP である。

証明. サイズ増加判定問題を解く決定性多項式時間アルゴリズム A が存在すると仮定する。MAX SMTI 例題 I が与えられた際、それを解くアルゴリズム B を以下のように構築する。変数 x を用意し、初期値を 0 にする。また $I_1 = I$ とする。

I_i に長さ 2 以上のタイが存在するならば、それを適当に 2 つに分割した SMTI 例題 I_{i+1} を作り、I_i と I_{i+1} を A に与える。$opt(I_{i+1}) \neq opt(I_i)$ ならば x を 1 増加させ、$opt(I_{i+1}) = opt(I_i)$ ならば x の値を変更しない。これを、例題がタイを含む限り繰り返し、最終的に得られた SMI 例題を I_k とする。

補題 1 より $opt(I_{i+1}) \neq opt(I_i)$ ならば $opt(I_{i+1}) = opt(I_i) - 1$ なので、$opt(I_k) = opt(I) - x$ となる。I_k は SMI 例題であるため、$opt(I_k)$ は多項式時間で計算可能である。従って $opt(I)$ を多項式時間で計算できることになり、B は MAX SMTI の最適解を求める多項式時間アルゴリズムである。以上から P=NP となる。 □

6 おわりに

本研究ではアルゴリズム 1、2 でタイの結合条件に制限を加えて最適解付き例題を生成する手法を提案したが、生成された任意の SMTI 例題で安定マッチングのサイズが一定であるとう問題が生じた。そこで、制限を最大限に緩和した結果、その制限を満たすことの判定が多項式時間では行えないという問題が生じた。

今後の方針として、まずはサイズの異なる安定マッチングを持つ例題を生成できるようなタイの結合条件を調査したい。また、その条件を使ったアルゴリズムが出力する SMTI 例題の特徴づけも行っていきたい。

謝辞. 本研究は JSPS 科研費 JP16K00017 の助成を受けたものです。

参考文献

[1] Gale, D. and Shapley, L. S.: College admissions and the stability of marriage., *The American Mathematical Monthly*, Vol. 120, No. 5, pp. 386–391 (2013).

[2] Gale, D. and Sotomayor, M.: Some remarks on the stable matching problem, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 11, pp. 223–232 (1985).

[3] Gent, I. and Prosser, P.: An empirical study of the stable marriage problem with ties and incomplete lists, *Proc. ECAI'02, IOS Press*, pp. 141–145 (2002).

[4] Gusfield, D. and Irving, R. W.: *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, USA (1989).

[5] Irving, R. W. and Manlove, D. F.: Finding large stable matchings, *J. Exp. Algorithmics*, Vol. 14, pp. 2:1.2–2:1.30 (2010).

[6] Iwama, K., Manlove, D., Miyazaki, S. and Morita, Y.: Stable marriage with incomplete lists and ties, *Proc. ICALP'99*, pp. 443–452 (1999).

[7] Király, Z.: Linear time local approximation algorithm for maximum stable marriage, *Algorithms*, Vol. 6, No. 3, pp. 471–484 (2013).

[8] Leggett, E. W. Jr. and Moore, D. J.: Optimization problems and the polynomial hierarchy, *Theoretical Computer Science*, Vol. 15, pp. 279–289 (1981).

[9] Manlove, D. F., Irving, R. W., Iwama, K., Miyazaki, S. and Morita, Y.: Hard variants of

stable marriage, *Theor. Comput. Sci.*, Vol. 276, No. 1-2, pp. 261–279 (2002).

[10] McDermid, E.: A 3/2-approximation algorithm for general stable marriage, *Automata, Languages and Programming* (Albers, S., Marchetti-Spaccamela, A., Matias, Y., Nikoletseas, S. and Thomas, W.(eds.)), Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, pp. 689–700 (2009).

[11] Paluch, K.: Faster and simpler approximation of stable matchings, *Algorithms*, Vol. 7, No. 2, pp. 189–202 (2014).

[12] Podhradský, A.: Stable marriage problem algorithms, Faculty of informatics, Masaryk University (2010). `https://is.muni.cz/th/172646/fi_m`.

[13] Roth, A.: The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory, *Journal of Political Economy*, Vol. 92, No. 6, pp. 991–1016 (1984).

[14] Roth, A.: On the allocation of residents to rural hospitals: a general property of two-sided matching markets, *Econometrica*, Vol. 54, No. 2, pp. 425–27 (1986).

[15] Sanchis, L. A.: On the complexity of test case generation for NP-hard problems., *Inf. Process. Lett.*, Vol. 36, pp. 135–140 (1990).