Compactifications of affine homology 3-cells into quadric fibrations

長岡　大 (NAGAOKA, Masaru)

概要

本稿では, 城崎代数幾何学シンポジウム 2019 での著者の講演を元にして, アフィンホモロジー 3-胞体の quadric fibration へのコンパクト化に関する研究結果 [Nag19] を説明する.

1　背景および主結果

本稿では, 複素数体 $\mathbb{C}$ 上定義された代数多様体を扱う. あるアフィン多様体 U に対し, その**コンパクト化**とは, 非特異完備多様体 X とその中の被約有効因子 D のうち, 補集合 $X \setminus D$ が U と代数的同型になる組 (X, D) のことである. 1954 年に Hirzebruch [Hir54] はアフィン空間 $\mathbb{A}^n$ のコンパクト化のうち, 埋め込み先の第 2 Betti 数が 1 であるものの分類問題を提起した. 本稿では, この Hirzebruch の問題を起源に持つ 2 つの問題について考える.

1 つ目の問題は, アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の特徴付けである. 正の整数 n に対し, **アフィンホモロジー n-胞体**とは, $\mathbb{A}^n$ と同型な特異ホモロジー環を持つ非特異アフィン多様体のことである. 様々な研究結果 [Ram71, tDP90, KR97] により, $\mathbb{A}^n$ とは同型でない多くのアフィンホモロジー n-胞体の存在が知られている. すると自然な問いとして, 全てのアフィンホモロジー n-胞体の集合において $\mathbb{A}^n$ はどのように特徴付けられるか, が考えられる. 古島 [Fur00] はこの問いに対し, $\mathbb{A}^3$ はアフィンホモロジー 3-胞体のうち, $B_2 = 1$ を満たす非特異 Fano 多様体に埋め込まれる唯一の多様体であることを示した.

2 つ目の問題は, $\mathbb{A}^n$ の一般のコンパクト化から標準的なコンパクト化への双有理写像の体系的な構成である. 森 [Mor73] は Hirzebruch 曲面の間に 3 種類の具体的な双有理写像を定義し, 任意の $\mathbb{A}^2$ の Hirzebruch 曲面へのコンパクト化に対して, それらの双有理写像を有限回合成すると, 射影平面への標準的なコンパクト化 $(\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^1)$ への双有理写像が構成できることを示した.

本稿では, 以上の 2 つの問題に関わる, 次の問題を設定する.

問題 1.1 ([Nag19, Problem 1.1])**.** X を $B_2(X) = 2$ を満たす n 次元非特異射影多様体, $f\colon X \to C$ を曲線 C への端射線収縮射, $U \subset X$ を開部分多様体とする.

(1) もし U がアフィンホモロジー n-胞体ならば, $\mathbb{A}^n$ と同型か?

(2) もし $U \cong \mathbb{A}^n$ ならば, X から $\mathbb{A}^n$ の標準的なコンパクト化 $(\mathbb{P}^n, \mathbb{P}^{n-1})$ へ, 同型射 $U \cong \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}$

を誘導するような双有理写像 $X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ が具体的に構成できるか?

$n=2$ の場合, 問題 1.1 中の f は $\mathbb{P}^1$ 束となる. 従って先述の森 [Mor73] の結果は, $n=2$ の場合に問題 1.1 (2) の肯定的な解決を与えている. 一方で問題 1.1 (1) は, $n=2$ の場合にすでに反例が知られている. 実際, tom Dieck-Petrie [tDP90] により, $\mathbb{P}^2$ の一点での爆発には可算無限個の互いに異なるアフィンホモロジー 2-胞体が開部分多様体として含まれていることが示された. しかし, 次の条件を加えると, 問題 1.1 (1) は $n=2$ の場合に肯定的な解答を持つ:

定義 1.2 ([Nag19, Definition 1.1])**.** $f\colon X \to C$ と U を問題 1.1 の通りとし, $D \coloneqq X \setminus U$ を境界因子とする. D がある f-ファイバーを含む時, 三つ組 (X, D, f) を f **と両立した** U **のコンパクト化**という. また, $D_f \subset D$ を f-ファイバー, $D_h \coloneqq D - D_f$ を残りの因子とする時, f と両立する U のコンパクト化を三つ組 (X, D_h, D_f) で表すこともある. この時, Poincare 双対や [vdV62, Proposition 2.1] より, D_f や D_h は素因子となる.

もし f が $\mathbb{P}^1$ 束かつ (X, D_h, D_f) が f と両立するアフィンホモロジー 2-胞体 U のコンパクト化ならば, [Fuj82, Corollary 1.20] から D_h が f-切断であると分かる. $f|_U$ は $\mathbb{A}^1$ 上の $\mathbb{A}^1$ 束となる [Miy78, Chap.1, §4] ので, U は $\mathbb{A}^2$ に代数的同型である. 従ってこの場合は, 問題 1.1 (1) に対し肯定的な解決を得る.

次に $n=3$, 即ち f が del Pezzo ファイブレーションの場合を考える. この時 $\deg f$ を f の一般ファイバーである del Pezzo 曲面の次数と定義する. [Mor82, Theorem 3.5] により, $\deg f \leq 9$ が成り立つ. また $\deg f = 9$ の場合は f が $\mathbb{P}^2$ 束になり, $\deg f = 8$ の場合は X が相対的な 2 次曲面として $\mathbb{P}^3$ 束に埋め込まれることが知られている.

f が $\mathbb{P}^1$ 束の場合と同様の議論から, f が $\mathbb{P}^2$ 束かつ (X, D_h, D_f) が f と両立するコンパクト化である場合, 問題 1.1 (1) は肯定的に解決される. 問題 1.1 (2) も肯定的に解決されるが, 詳細は [Nag19, §6] に譲る. [Nag19] では主に, $\deg f = 8$ である場合に問題 1.1 を考えた. 以降, $\deg f = 8$ を満たす del Pezzo ファイブレーションを **quadric fibration** と呼ぶ. 以下が [Nag19] の主定理である.

定理 1.3. ここでは問題 1.1 の記号を用いる. $D \coloneqq X \setminus U$ とおく. もし f が quadric fibration であり, (X, D, f) が f と両立した U のコンパクト化ならば, 問題 1.1 (1), (2) は肯定的な解答を持つ.

定理 1.3 のより詳細な主張は, 後の 3 章, 4 章で述べることにする.

2 Elementary link

定理 1.3 の主張をより正確に述べるために, elementary link を定義する.

定義 2.1 ([Nag19, Definition 1.6])**.** X を 3 次元非特異射影多様体, $\sigma\colon X \to C$ を相対 Picard 数が 1 の端射線収縮射とする. $r \subset X$ を非特異閉部分曲線または点とし, $\varphi\colon \widetilde{X} \to X$ を r に沿った爆発とする. ここで $-K_{\widetilde{X}}$ が $(\sigma \circ \varphi)$-豊富だと仮定する. すると, 森錐 $\overline{\mathrm{NE}}(\widetilde{X}/C)$ の他方の端射線も $K_{\widetilde{X}}$-負であるため, その収縮射 $\psi\colon \widetilde{X} \to Y$ が存在する. $\tau\colon Y \to C$ を誘導された射とすると, 次の可換図式を

得る.

$$\begin{tikzcd}
 & \widetilde{X} \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
X \arrow[d, "\sigma"'] & & Y \arrow[d, "\tau"] \\
C \arrow[rr, equal] & & C.
\end{tikzcd} \tag{1}$$

ψ が双有理である場合に, 図式 (1) を r **を中心とした elementary link** という. 本稿では, φ-例外因子の Y での狭義変換を **elementary link の例外因子**と呼ぶ. [Cor95, Proposition 3.5] より, elementary link の例外因子は実際に因子になる. 底多様体 C が明らかな場合, elementary link を $X \dashrightarrow Y$ と略記する.

次に列挙する状況では, 定義 2.1 の仮定が満たされ, elementary link が構成できることが知られている.

- σ が $\mathbb{P}^2$ 束で r が σ-ファイバー内の直線または点の場合 [Mar73].
- σ が quadric fibration で r が σ-切断の場合 [D'S88].
- σ が quadric fibration で r が σ-ファイバーの母線の場合 [HT12], [Nag19, Lemma 2.6].

出力 $\tau\colon Y \to C$ は, 1, 2 番目の状況では $\mathbb{P}^2$ 束, 3 番目の状況では quadric fibration になる.

3 問題 1.1 (1) について

定理 1.3 の問題 1.1 (1) に対する主張を正確に述べると, 次の通りになる.

定理 3.1 ([Nag19, Theorem 4.2])**.** $q\colon Q \to C$ を quadric fibration, $D_h \subset Q$ を被約有効因子, D_f を q-ファイバーとする.

(A) もし D_h が非正規ならば, 以下は同値.
  (1) 補集合 $Q \setminus (D_h \cup D_f)$ はアフィンホモロジー 3-胞体.
  (2) C は $\mathbb{P}^1$ と同型で, D_h は $(1/2)(-K_Q)$ と C 上線形同値な素因子.
  (3) 補集合 $Q \setminus (D_h \cup D_f)$ は $\mathbb{A}^3$ と同型.

(B) もし D_h が正規なら, 以下は同値.
  (1) 補集合 $Q \setminus (D_h \cup D_f)$ はアフィンホモロジー 3-胞体.
  (2) C は $\mathbb{P}^1$ と同型で, D_h は $(1/2)(-K_Q)$ と C 上線形同値な素因子. D_f は二次曲線錐 $\mathbb{Q}^2_0$ と同型で, Hodge 数 $h^{1,2}(Q)$ は 0 に等しい. 更に, $(q|_{D_h})$-ファイバーは $D_f|_{D_h}$ を除いて非特異.
  (3) 補集合 $Q \setminus (D_h \cup D_f)$ は $\mathbb{A}^3$ に同型である.

本稿では, 講演内容に習って, 定理 3.1 (B) の証明のみ紹介する. よって D_h が正規であると仮定する. (3) $\Rightarrow$ (1) は明らかであるので, (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) を示せば良い.

Step 1 (Hodge diamond): Step 6 まで (1) を仮定する. まずは Q の Hodge diamond を調べよう. 相対的小平消滅定理より, 任意の $i \geq 0$ に対して $H^i(X, \mathcal{O}_X) \cong H^i(C, \mathcal{O}_C)$ が従う. 特に $i = 2, 3$ に対して $H^i(X, \mathcal{O}_X) \cong 0$ である. また, Poincare 双対や [vdV62, Proposition 2.1] より, $H_1(Q, \mathbb{Z}) \cong H^5(Q, \mathbb{Z}) \cong H^5(D, \mathbb{Z}) = 0$ が従う. よって Hodge 分解から $H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong 0$ となる. これと $B_2(Q) = 2$ という仮定を組み合わせると, Q の Hodge diamond が次の通りであると分かる.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 2 & & 0 & \\
0 & & h^{1,2}(Q) & & h^{1,2}(Q) & & 0 \\
 & 0 & & 2 & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 1 & & &
\end{array}
$$

また, $0 = H^1(X, \mathcal{O}_X) \cong H^1(C, \mathcal{O}_C)$ より, $C \cong \mathbb{P}^1$ が従う.

Step 2 (線形同値類): Step 1 から特に $\operatorname{Pic} Q \cong H^2(Q, \mathbb{Z})$ が従う. すると, [Fuj82, Corollary 1.20] から, $\operatorname{Pic} Q = \mathbb{Z}D_h \oplus \mathbb{Z}D_f$ が従う. 一方で, [Mor82, Theorems 3.3, 3.5] より, Q は $\mathbb{P}^3$ 束に埋め込まれ, H を $\mathbb{P}^3$ 束の tautological line bundle とすると, $\operatorname{Pic} Q = \mathbb{Z}H|_Q \oplus \mathbb{Z}D_f$ が分かる. 特に D_h は $H|_Q$ と C 上線形同値である. よって D_h が $(1/2)(-K_Q)$ と C 上線形同値であることは, $\mathbb{P}^3$ 束に対する標準束公式と Q に対する随伴公式から従う.

Step 3 (位相的 Euler 数): 次に, 補集合 $U := Q \setminus (D_h \cup D_f)$ がアフィンホモロジー 3-胞体であることから, 位相的 Euler 数の間に次の関係式がある.

$$
\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{Top}}(Q) &= \chi_{\mathrm{Top}}(U) + \chi_{\mathrm{Top}}(D_h \setminus (D_f|_{D_h})) + \chi_{\mathrm{Top}}(D_f) && (2)\\
&= 1 + \chi_{\mathrm{Top}}(D_h \setminus (D_f|_{D_h})) + \chi_{\mathrm{Top}}(D_f). && (3)
\end{aligned}
$$

D_f は q-ファイバーであることから, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ もしくは $\mathbb{P}^3$ 内の二次曲線錐 $\mathbb{Q}^2_0$ と同型である. よって前者なら $\chi_{\mathrm{Top}}(D_f) = 4$, 後者なら $\chi_{\mathrm{Top}}(D_f) = 3$ である. 一方で, Step 2 より $q|_{D_h}$ は conic 束である. 従って N を $D_f|_{D_h}$ 以外の可約な $q|_{D_h}$-ファイバーの個数とすると, $\chi_{\mathrm{Top}}(D_h \setminus (D_f|_{D_h})) = 2 + N$ が従う. 以上と Q の Hodge diamond の構造を合わせると, 次を得る:

$$
\begin{aligned}
6 - 2h^{1,2}(Q) &= \chi_{\mathrm{Top}}(Q) && (4)\\
&= 1 + \chi_{\mathrm{Top}}(D_h \setminus (D_f|_{D_h})) + \chi_{\mathrm{Top}}(D_f) && (5)\\
&\geq 1 + (2 + N) + 3 = 6 + N. && (6)
\end{aligned}
$$

よって $h^{1,2}(Q) = 0$, $D_f \cong \mathbb{Q}^2_0$. 更に $N = 0$ であり, 可約な $q|_{D_h}$-ファイバーは高々 $D_f|_{D_h}$ のみである.

Step 4 (Elementary links): Conic 束 $q|_{D_h}$ から q-切断 s を取る. すると, [D'S88, (2.7.3)] より, s を中心とする elementary link が構成できる. より詳細には, 次の可換図式を得る:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Bl}_s Q = \widetilde{Q} = \mathrm{Bl}_B P \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
Q \arrow[d, "q"'] & & P \arrow[d, "p"] \\
C \arrow[rr, equal] & & C.
\end{tikzcd}
\qquad (7)
$$

ここで, φ は s に沿った爆発, p は $\mathbb{P}^2$ 束, ψ はある連結かつ非特異な二次切断 B に沿った爆発である. [Fuk18, Proposition 3.1] により, 次が知られている.

- D_h の P での狭義変換は部分 $\mathbb{P}^1$ 束である.
- φ-例外因子 E_φ の P での狭義変換は, B を含む唯一の部分 $\mathbb{P}^1$ 束である.
- $p|_B$ の分岐跡と q の特異ファイバーの跡は一致する.

この図式から $\chi_{\mathrm{Top}}(Q)$ を再び計算すると, $6 = \chi_{\mathrm{Top}}(Q) = 6 - 2p_a(B)$ となる. よって $B \cong \mathbb{P}^1$ であり, $p|_B$ の分岐跡は 2 点からなる. これを $\{0, \infty\} \subset C$ と書き, $D_f = q^*(\infty)$ と置くことにする.

ここで $t \in C \setminus \{0, \infty\}$ を 1 つ取ると, $q^*(t)$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ と同型であり, $(q|_{D_h})^*(t)$ は双次数 $(1, 1)$ の因子である. Step 3 の結果より $(q|_{D_h})^*(t)$ は既約であるため, これは非特異であると分かる. 以上より, (2) を導くためには, $(q|_{D_h})^*(0)$ が特異ファイバーであると仮定して, 矛盾を導けば良い.

Step 5 (アフィン修正): $(q|_{D_h})^*(0)$ が特異ファイバーであると仮定する. すると Step 3 の結果より, $(q|_{D_h})^*(0)$ は被約でない $\mathbb{P}^2$ の二次曲線と同型である.

一方で, E を elementary link (7) の例外因子, D'_h, D'_f をそれぞれ D_h, D_f の P での狭義変換, $U' = P \setminus (D'_h \cup D'_f)$ と置く. すると, D'_h は部分 $\mathbb{P}^1$ 束であり, D'_f は p-ファイバーであるため, $U' \cong \mathbb{A}^3$ である. ここで $B^0 := B \cap U'$, $E^0 := E \cap U'$ と置く. すると図式 (7) より, U は U' の跡 $(B^0 \subset E^0)$ でのアフィン修正 (:= U の B^0 に沿った爆発から E^0 の狭義変換を除いたもの) と同型である. 従って [KZ99, Theorem 3.1] より, 包含写像から誘導されるホモロジー群の準同型 $\tau\colon H_1(B^0, \mathbb{Z}) \to H_1(E^0, \mathbb{Z})$ が同型にならなければいけない.

Step 6 ((1) $\Rightarrow$ (2) の証明の完了): 一方で $t \in C$ に対し, $(q|_{D_h})^*(t)$ の特異点と $D'_h, B, p^*(t)$ の位置関係には次の対応があることが, 図式 (7) を詳しく調べると分かる [Nag19, Lemma 2.5]:

- $t \in C \setminus \{0, \infty\}$ に対して, $(q|_{D_h})^*(t)$ が非特異 $\iff p^*(t) \cap B \cap D'_h = \emptyset$.
- $t \in \{0, \infty\}$ に対して, $(q|_{D_h})^*(t)$ が $\begin{cases} \text{非特異} & \iff p^*(t) \cap B \cap D'_h = \emptyset. \\ \text{被約でない} & \iff E \cap p^*(t) = D'_h \cap p^*(t). \end{cases}$

よって $E^0 \cong \mathbb{A}^1 \times \mathbb{C}^*$ であり, $B \cong \mathbb{C}^*$ は射影 $E^0 \to \mathbb{C}^*$ の不分岐な二次切断である. よって τ は 2 倍写像となり, 矛盾. 以上より (1) $\Rightarrow$ (2) が示された.

Step 7 ((2) $\Rightarrow$ (3) の証明): 最後に, (2) を仮定して, (3) を示そう. この時 Step 5 と同様の記号を用いると, Step 6 と同様の議論により, $E^0 \cong \mathbb{A}^2, B^0 \cong \mathbb{A}^1$ を得る. 有理数体 $\mathbb{Q}$ を含む Noether 環上の Abhyanker-Mor の定理 [BD93, Theorem B] より, $U' \cong \mathbb{A}^3$ の座標 $\{x, y, z\}$ を, $E^0 = \{z = 0\}$, $B^0 = \{y = z = 0\}$ となるように取れる. 従って U は $\mathbb{A}^3_{[x,y,z]}$ の跡 $(\mathbb{A}^1_{[x]} \subset \mathbb{A}^2_{[x,y]})$ でのアフィン修正, 即ち $\mathbb{A}^3$ と同型である. 以上で定理 3.1 (B) の証明が完了した.

4 問題 1.1 (2) について

次に問題 1.1 (2) について, 定理 1.3 をより詳細に説明する. その準備として, 端射線収縮射と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化の例を 2 つ紹介する.

例 4.1 ([Nag19, Example 1.4])**.** $g_3\colon P' \to \mathbb{P}^3$ を直線に沿った爆発とし, $D_{h,2}$ を g_3 の例外因子とする. すると $|g_3^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) - D_{h,2}|$ は $\mathbb{P}^2$ 束 $p'\colon P' \to \mathbb{P}^1$ を定める. p'-ファイバー $D_{f,2}$ を一つ固定すると, $(P', D_{h,2}, D_{f,2})$ は p' と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化である. 確かに, $H := g_{3*}D_{f,2}$ と置けば, $P' \setminus (D_{h,2} \cup D_{f,2}) \cong \mathbb{P}^3 \setminus H \cong \mathbb{A}^3$ を得る. 特に $g_3\colon P' \to \mathbb{P}^3$ は $\mathbb{A}^3$ の同型射を誘導する.

例 4.2 ([Nag19, Example 1.5])**.** $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{P}^4$ を非特異二次超曲面とする. $h_2\colon Q' \to \mathbb{Q}^3$ を非特異二次曲線に沿った爆発とし, D'_h を h_2 の例外因子とする. この時 $|h_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{Q}^3}(1) - D'_h|$ は quadric fibration $q'\colon Q' \to \mathbb{P}^1$ を定める. 特異 q'-ファイバー D'_f を一つ固定すると, $h_{2*}D'_f$ は二次曲線錐 $\mathbb{Q}^2_0 \subset \mathbb{P}^3$ と同型になる. すると h_2 は同型射 $Q' \setminus (D'_h \cup D'_f) \cong \mathbb{Q}^3 \setminus \mathbb{Q}^2_0$ を誘導する. ここで $h_3\colon \mathbb{Q}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ を $\mathbb{Q}^2_0$ の頂点からの射影とし, 二次曲線 $h_3(\mathbb{Q}^2_0) \subset \mathbb{P}^3$ を含む超平面を $H \subset \mathbb{P}^3$ と書く. すると [Fur00, pp.117–119] と同様の議論により, h_3 は同型射 $\mathbb{Q}^3 \setminus \mathbb{Q}^2_0 \cong \mathbb{P}^3 \setminus H \cong \mathbb{A}^3$ を誘導する. 以上より, (Q', D'_h, D'_f) は q' と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化であり, $h_3 \circ h_2\colon Q' \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ は $\mathbb{A}^3$ の同型射を誘導する.

定理 1.3 の問題 1.1 (2) に対する詳細な主張は, これらの例を用いて, 以下の通り述べられる.

定理 4.3 ([Nag19, Theorem 1.7])**.** (Q, D_h, D_f) を quadric fibration $q : Q \to \mathbb{P}^1$ と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化とし, D_h が非正規であると仮定する. この時以下が成り立つ.

(0) D_h の特異点集合 s は f-切断になる.
(1) s を中心とした elementary link $g_1\colon Q \dashrightarrow P$ を取り, 出力である $\mathbb{P}^2$ 束を $p\colon P \to \mathbb{P}^1$ とする. $D_{f,1}$ を D_f の P での狭義変換, $D_{h,1}$ を elementary link の例外因子とする. この時, $(P, D_{h,1}, D_{f,1})$ は p と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化となる.
(2) 以降は例 4.1 の記号を用いる. $p(D_{f,1})$ と $p'(D_{f,2})$ を同一視して $\infty \in \mathbb{P}^1$ と置く. この時, ある ∞ 上のファイバーの直線または点を中心とした elementary link の合成 $g_2\colon P \dashrightarrow P'$ が存在して, $D_{h,2}$ は $D_{h,1}$ の P' での狭義変換となる.

以上をまとめると, $\mathbb{A}^3$ の同型射 $Q \setminus (D_h \cup D_f) \cong \mathbb{P}^3 \setminus H$ を誘導する次の双有理写像を得る:

$$\begin{tikzcd} (Q, D_h, D_f) \arrow[r, dashed, "g_1"] \arrow[d, "q"] & (P, D_{h,1}, D_{f,1}) \arrow[r, dashed, "g_2"] \arrow[d, "p"] & (P', D_{h,2}, D_{f,2}) \arrow[r, "g_3"] \arrow[d, "p'"] & (\mathbb{P}^3, H) \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1. \end{tikzcd} \tag{8}$$

定理 4.4 ([Nag19, Theorem 1.8])**.** (Q, D_h, D_f) を quadric fibration $q : Q \to \mathbb{P}^1$ と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化とし, D_h が正規であると仮定する. また, 例 4.2 の記号を用いて, $q(D_f)$ と $q'(D'_f)$ を同一視し, $\infty \in \mathbb{P}^1$ とおく. この時, ∞ 上のファイバーの母線を中心とした elementary link の合成 $h_1 : Q \dashrightarrow Q'$ が存在して, D'_h は D_h の Q' での狭義変換となる. 特に, $\mathbb{A}^3$ の同型射 $Q \setminus (D_h \cup D_f) \cong \mathbb{P}^3 \setminus H$ を誘導する次の双有理写像を得る:

$$
\begin{tikzcd}
(Q, D_h, D_f) \arrow[r, dashed, "h_1"] \arrow[d, "q"'] & (Q', D'_h, D'_f) \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "q'"'] & (\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}^2_0) \arrow[r, dashed, "h_3"] & (\mathbb{P}^3, H) \\
\mathbb{P}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1.
\end{tikzcd}
\tag{9}
$$

本稿では講演内容に習って, 定理 4.4 の証明の概略を紹介する.

<u>Step 1 (タイプの定義):</u> (Q, D_h, D_f) を定理 4.4 の通りとする. 定理 3.1 (B) より, $q|_{D_h}$ は conic 束であるため, D_h 内からある q-切断 s を取ることが出来る. この s を用いて, 定理 3.1 (B) の証明と同様の elementary link (7) を構成する. また, D'_h を D_h の P での狭義変換とする.

ここで, 交点数 $(D'_h \cdot B)$ を, **コンパクト化** (Q, D_h, D_f) **のタイプ**と定義する. 定理 3.1(B) の証明の Step 4 に書いた通り, D'_h は B を含まないため, $(D'_h \cdot B) \geq 0$ が成り立つ. また, 次の対応から, この定義は s のとり方に依らない:

$$
(D'_h \cdot B) = \begin{cases}
0 & \iff D_h|_{D_f} \text{は非特異二次曲線.} \\
1 & \iff D_h|_{D_f} \text{は可約な二次曲線.} \\
2 & \iff D_h|_{D_f} \text{は被約でなく}, D_h\text{の特異点は 2 つの } A_1\text{型の } DuVal \text{ 特異点.} \\
3 & \iff D_h|_{D_f} \text{は被約でなく}, D_h\text{の特異点は 1 つの } A_3\text{型の } DuVal \text{ 特異点.} \\
m \geq 4 & \iff D_h|_{D_f} \text{は被約でなく}, D_h\text{の特異点は 1 つの } D_m\text{型の } DuVal \text{ 特異点.}
\end{cases}
\tag{10}
$$

<u>Step 2 (タイプ 0 への帰着):</u> ここでは (Q, D_h, D_f) のタイプが $m > 0$ であると仮定する. この時, 対応表 (10) より, $D_h|_{D_f}$ の底は二次曲線錐 $D_f \cong \mathbb{Q}^2_0$ の母線 l を含む. すると, l を中心とした elementary link が構成できる [Nag19, Lemma 2.6]. より詳細には, 次の可換図式を得る:

$$
\begin{tikzcd}
& \mathrm{Bl}_l\, Q = \widetilde{Q} = \mathrm{Bl}_{l'}\, Q' \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
Q \arrow[d, "q"'] & & Q' \arrow[d, "q'"] \\
C \arrow[rr, equal] & & C.
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

ここで, φ は l に沿った爆発, q' は quadric fibration, ψ はある q'-ファイバーの母線 l' に沿った爆発で, ψ-例外因子が D_f の $\widetilde{Q}$ での狭義変換となるものである.

この elementary link の例外因子を E とおき, D'_h を D_h の Q' での狭義変換とする. すると, D'_h が正規であることや, (Q', D'_h, E) が定理 3.1 (B) の条件 (2) を全て満たすことが確認できる. よって (Q', D'_h, E) は q' と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化である. Elementary links (7), (11) のある種の

可換性 [Nag19, Lemma 7.4] を用いれば, (Q', D'_h, E) のタイプが $m-1$ であることが分かる. この elementary link (11) を m 回合成することで, 定理 4.4 の証明はタイプが 0 の場合に帰着される.

Step 3 ($D_h \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合への帰着): 以降, (Q, D_h, D_f) のタイプが 0 であるとして良い. この時, conic 束 $q|_{D_h}$ の任意のファイバーが非特異であるので, D_h はある次数 d の Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_d$ と同型である. ここでは $d > 0$ を仮定する.

$D_h \cong \mathbb{F}_d$ 内の極小切断と交わらない母線 $l \subset D_f$ をとり, l を中心とした elementary link (11) を取る. E, D'_h を Step 2 と同様に定義する. すると, D'_h は D_h の $l \cap D_h$ での爆発となる. 一方, $D_h|_{D_f}$ の Q' での狭義変換を r' とすると, r' は E 内の母線となる. すると, r' を中心とした次の elementary link が構成できる:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathrm{Bl}_{r'} Q' = \widetilde{Q'} = \mathrm{Bl}_{r''} Q'' \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
Q' \arrow[d, "q'"'] & & Q'' \arrow[d, "q''"] \\
C \arrow[rr, equal] & & C.
\end{tikzcd} \tag{12}$$

この elementary link の例外因子を F とし, D_h の Q'' での狭義変換を D''_h とおく. すると D''_h は $\mathbb{F}_{d-1}$ と同型となる. また, (Q'', D''_h, F) は定理 3.1 (B) の条件 (2) を全て満たすことが確認できる. よって (Q'', D''_h, F) は q'' と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化である. この elementary link の合成を d 回繰り返すことで, 定理 4.4 の証明は $D_h \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合に帰着される.

Step 4 ($D_h \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の場合): 最後に, $D_h \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を仮定する. この時は [Nag19, Lemma 7.8] により, Q が二次超曲面 $\mathbb{Q}^3 \subset \mathbb{P}^4$ の非特異二次曲線に沿った爆発で得られる Fano 多様体であると証明できる. 更に, この爆発射の例外因子が D_h となる. 従って, 三つ組 (Q, D_h, D_f) は例 4.2 の通りに構成される. 以上で定理 4.4 の証明が完了した.

5 コンパクト化の例

最後に, 定理 3.1 を用いて構成できる, 新たな $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化の例を紹介する.

例 5.1 ([Nag19, Example 5.3]). 非負整数 d に対して, $p\colon P \to C = \mathbb{P}^1$ をベクトル束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ の射影化として得られる $\mathbb{P}^2$ 束とする. $i = 1, d$ に対して, $S_i \subset P$ を射影 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i)$ に対応する部分 $\mathbb{P}^1$ 束, ξ_P を tautological line bundle, F を p ファイバーとする. この時各 $i = 1, d$ に対して, S_i は i 次の Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_i$ に同型である. また $S_i \sim \xi_P - (d+1-i)F$ であり, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
(S_i|_{S_{(d+1-i)}})^2 &= (\xi_P - (d+1-i)F)^2 \cdot (\xi_P - iF) \\
&= \xi_P^3 - (2d+2-i)\xi_P^2 \cdot F = -(d+1-i).
\end{aligned} \tag{13}$$

従って $S_d|_{S_1}$ と $S_1|_{S_d}$ はそれぞれ $S_1 \cong \mathbb{F}_1, S_d \cong \mathbb{F}_d$ の極小切断 Σ_1, Σ_d である.

ここで f_1 を $\mathbb{P}^1$ 束 $p|_{S_1}$ のファイバーとし, p の連結かつ非特異な二次切断 $B \subset S_1$ を $|2(\Sigma_1 + f_1)|$ の元として取る. $\psi\colon \widetilde{P} \to P$ を B に沿った爆発とすると, $-K_{\widetilde{P}}$ は $(p \circ \psi)$-豊富となる. よって B を中

心とした elementary link が次のように取れる:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \widetilde{P} \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ P \arrow[d, "p"'] & & Q \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[rr, equal] & & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \tag{14}$$

ここで q は quadric fibration であり, φ はある q-切断 s に沿った Q の爆発である. 実際, この elementary link は (7) を逆方向から見たものである.

取り方から $B \cong \mathbb{P}^1$ なので, 定理 3.1 (B) の証明の Step 4 と同様に $h^{1,2}(Q) = 0$ が従う. また特異 q-ファイバーが存在するので, これを D_f とおく. 更に D_h を S_d の Q での狭義変換とする.

D_h を一般の q-ファイバー $\cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に制限すると, 双次数 $(1,1)$ の因子になっていることから, D_h は $(1/2)(-K_Q)$ と C 上線形同値な素因子である. 一方, 取り方から $B \cap S_d = \emptyset$ であり, 定理 3.1 (B) の証明の Step 4 に書かれた通り φ-例外因子は S_1 の $\widetilde{P}$ での狭義変換である. 従って $D_h \cong S_d \cong \mathbb{F}_d$ である. 以上をまとめると, 定理 3.1 (B) から, (Q, D_h, D_f) が quadric fibration q と両立する $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化であることが分かる.

この例では, $D_h|_{D_f}$ はスキーム論的に非特異である. このような, 境界因子の既約成分 2 つが normal crossing に交わる $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化は, Müller-Stach [MS90] により分類されている. しかし例 5.1 は, $d > 0$ の場合, [MS90] で誤って除外されているコンパクト化である. 実際, 分類表 [MS90, Table 1] 内の任意の $\mathbb{A}^3$ の埋め込み先は, $\mathbb{P}^2$ 束や $\mathbb{P}^1$ 束の構造を持つか, 他の多様体の爆発として構成される. 一方で例 5.1 は quadric fibration の構造を持つ. 従って例 5.1 がこの分類表の中に入っているならば端射線収縮射が二つ存在する. 即ち Q は Fano 多様体でなければならない. しかし, $D_h \cong \mathbb{F}_d$ 内の極小切断 Σ_d は $(-K_Q \cdot \Sigma_d) = 1 - 2d < 0$ を満たすため, Q は Fano ではない.

以上より, $d > 0$ に対して, 例 5.1 は新しい $\mathbb{A}^3$ のコンパクト化を与えている.

参考文献

[BD93] S. M. Bhatwadekar and Amartya K. Dutta. On residual variables and stably polynomial algebras. *Comm. Algebra*, 21(2):635–645, 1993.

[Cor95] Alessio Corti. Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov. *J. Algebraic Geom.*, 4(2):223–254, 1995.

[D'S88] Harry D'Souza. Threefolds whose hyperplane sections are elliptic surfaces. *Pacific J. Math.*, 134(1):57–78, 1988.

[Fuj82] Takao Fujita. On the topology of noncomplete algebraic surfaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 29(3):503–566, 1982.

[Fuk18] Takeru Fukuoka. Relative linear extensions of sextic del pezzo fibrations. *arXiv preprint arXiv:1803.01264*, 2018.

[Fur00] Mikio Furushima. A birational construction of projective compactifications of $\mathbf{C}^3$ with second Betti number equal to one. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 178:115–128, 2000.

[Hir54] Friedrich Hirzebruch. Some problems on differentiable and complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 60:213–236, 1954.

[HT12] Brendan Hassett and Yuri Tschinkel. Spaces of sections of quadric surface fibrations over curves. In *Compact moduli spaces and vector bundles*, volume 564 of *Contemp. Math.*, pages 227–249. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.

[KR97] M. Koras and Peter Russell. Contractible threefolds and $\mathbf{C}^*$-actions on $\mathbf{C}^3$. *J. Algebraic Geom.*, 6(4):671–695, 1997.

[KZ99] Sh. Kaliman and M. Zaidenberg. Affine modifications and affine hypersurfaces with a very transitive automorphism group. *Transform. Groups*, 4(1):53–95, 1999.

[Mar73] Masaki Maruyama. On a family of algebraic vector bundles. In *Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Yasuo Akizuki*, pages 95–146. Kinokuniya, Tokyo, 1973.

[Miy78] Masayoshi Miyanishi. *Curves on rational and unirational surfaces*, volume 60 of *Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics*. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by the Narosa Publishing House, New Delhi, 1978.

[Mor73] Shigefumi Mori. $\mathbb{A}^2$ の rational ruled surfaces への埋め込みについて. *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, 183:31–50, 1973.

[Mor82] Shigefumi Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Ann. of Math. (2)*, 116(1):133–176, 1982.

[MS90] Stefan Müller-Stach. Compactifications of $\mathbf{C}^3$ with reducible boundary divisor. *Math. Ann.*, 286(1-3):409–431, 1990.

[Nag19] Masaru Nagaoka. On compactifications of affine homology 3-cells into quadric fibrations. *arXiv preprint arXiv:1906.10626*, 2019.

[Ram71] C. P. Ramanujam. A topological characterisation of the affine plane as an algebraic variety. *Ann. of Math. (2)*, 94:69–88, 1971.

[tDP90] Tammo tom Dieck and Ted Petrie. Contractible affine surfaces of Kodaira dimension one. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 16(1):147–169, 1990.

[vdV62] A. van de Ven. Analytic compactifications of complex homology cells. *Math. Ann.*, 147:189–204, 1962.