

# Birationally superrigid Fano threefolds of codimension 4

佐賀大学 岡田拓三 \*

## 1 はじめに

3次元ファノ多様体の双有理超剛性に関する最近の結果について紹介する. 3次元の単線織多様体は, 極小モデルプログラムを実行することにより森ファイバー空間と双有理同値になることはよく知られている. 3次元の森ファイバー空間とは, その底空間の次元に応じて, ピカール数1のファノ多様体, (曲線上の) del Pezzo 束, (曲面上の) コニック束の3種類に大別される. 簡潔に説明すれば, 双有理(超)剛性とは双有理同値類における森ファイバー空間の構造の一意性のことである. ファノ多様体の双有理(超)剛性は1970年代初頭に Iskovskikh–Manin [10] により始めて3次元非特異4次超曲面に対して示され, 現在では多くの結果が得られてきている. もともと双有理(超)剛性の研究はファノ多様体の非有理性を導くことを主たる動機として研究されてきた\*1が, 現在では与えられたファノ多様体の双有理同値類における森ファイバー構造の決定それ自体が双有理幾何学的に意義のあることと考えられる.

本稿では, 第2節においてファノ多様体の双有理(超)剛性の定義および特徴付けを紹介し, 第3節において3次元ファノ多様体の双有理(超)剛性に関する既知の紹介を行い, 最終的に第4節において著者による3次元余次元4主ファノ多様体の双有理超剛性に関する結果(= 定理 4.3)を紹介する. 主定理の証明の詳細には一切踏み込まないため, その点に関して興味のある読者は [16] を参照いただきたい.

謝辞. 城崎代数幾何学シンポジウム 2019 での講演の機会をいただきました世話人の方々に感謝させていただきます. 本稿の元になる研究は, JSPS 科研費 18K03216 の助成を受けたものです.

---

\* email: okada@cc.saga-u.ac.jp

\*1 ファノ多様体が双有理(超)剛性を有すれば非有理的である.

## 2 双有理（超）剛性の定義

まずは双有理（超）剛性の定義を正確に与える．本稿では，ファノ多様体は高々末端特異点しか持たないような  $\mathbb{Q}$  分解的正规射影多様体で反標準因子が豊富であるものとする．同様に，森ファイバー空間  $Y/T$  は  $Y$  が高々末端特異点しか持たないようなものとする．ピカール数 1 のファノ多様体  $X$  は構造射  $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$  により森ファイバー空間とみなされるが， $X/\text{Spec } \mathbb{C}$  とは記述せず単に  $X$  と表記する．また森ファイバー空間  $Y/T$  が  $X$  と双有理同値であるという際には  $Y$  と  $X$  が双有理同値であることを意味する．

**定義 2.1.**  $X$  をピカール数 1 のファノ多様体とする． $X$  と双有理同値である森ファイバー空間が（同型を除いて） $X$  のみからなる場合に， $X$  は双有理剛性を有するという． $X$  が双有理剛性を有し，かつ  $\text{Bir}(X) = \text{Aut}(X)$  が成り立つ時に， $X$  は双有理超剛性を有するという．ただし， $\text{Bir}(X)$  は  $X$  の自己双有理写像のことである．

ファノ多様体の双有理超剛性は次のように特徴付けされる．

**定理 2.2** (Cheltsov–Shramov [5, Theorem 1.26]). ピカール数 1 のファノ多様体  $X$  に対して次は同値である．

- (1)  $X$  は双有理超剛性を有する．
- (2)  $X$  上の任意の可動線形系  $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} -nK_X$  に対して，組  $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$  は標準的である．つまり，一般のメンバー  $M \in \mathcal{M}$  に対して組  $(X, \frac{1}{n}M)$  は標準的である．

## 3 3次元主ファノ多様体の双有理（超）剛性

ファノ多様体  $X$  で，その Weil 因子類群  $\text{Cl}(X)$  が  $\mathbb{Z}$  と同型であり反標準因子  $-K_X$  で生成されるときに主ファノ多様体という．本節では，3次元主ファノ多様体の双有理（超）剛性に関して知られている結果を解説する．

3次元主ファノ多様体はその反標準環の  $\mathbb{C}$  代数としての生成系を指定することにより重み付き射影空間に埋め込むことができる．Altınok, Iano-Fletcher, Reid, Prokhorov らにより重み付き射影空間に埋め込まれた 3次元主ファノ多様体の分類が進行している（そのデータベースが [3] に公開されている）．実際に低余次元（具体的には余次元 3 以下）の場合にはその分類はうまく機能していることが確かめられている（例えば [6] 参照）．重み付き射影空間に余次元  $c$  の部分多様体として埋め込まれた主ファノ多様体を余次元  $c$  主ファノ多様体と呼ぶことにする．この際， $X$  の埋め込みの余次元は最小であ

るものと約束する.

**定義 3.1.**  $X$  を重み付き射影空間  $\mathbb{P} := \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$  の部分多様体とする. 自然な射影  $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{o\} \rightarrow \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$  による  $X$  の逆像が非特異であるときに  $X$  は準非特異 (**quasi-smooth**) であるという. また,  $a_0, \dots, a_n$  の任意の  $n$  個の組み合わせの最大公約数が 1 であり, かつ  $\mathbb{P}$  の特異点集合  $\text{Sing}(\mathbb{P})$  の  $X$  への制限  $X \cap \text{Sing}(\mathbb{P})$  の  $X$  における余次元が 2 以上の場合に  $X$  は適正 (**well formed**) であるという.

重み付き完全交叉については, 準非特異性が適正性を導くことを注意しておく ([9, Theorem 6.17] 参照). また準非特異かつ適正な部分多様体  $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_n)$  は高々巡回商特異点しか持たないことに注意しておく. 余次元 1, 2, 3 の 3 次元主ファノ多様体の族の個数はそれぞれ 95, 85, 70 族存在しており, 以下ではそれらの双有理 (超) 剛性に関する既知の結果を列挙する.

**定理 3.2** (Cheltsov–Park [4], Corti–Pukhlikov–Reid [7], Iskovskikh–Manin [10]). 準非特異な 3 次元重み付き主ファノ多様体は双有理剛性を有する. 95 族のうち 50 族についてはその任意のメンバーは双有理超剛性を有し, 残りの 45 族についてはその一般メンバーは双有理剛性を有するが双有理超剛性は有しない\*2.

**定理 3.3** (Ahmadinezhad–Zucconi [2], Iskovskikh–Pukhlikov [11], O [13]). 85 族からなる準非特異な 3 次元余次元 2 主ファノ多様体のうち, その一般メンバーが双有理剛性を有するものは具体的に分類され, それらは 19 族からなる. その 19 族に属する任意のメンバーは双有理剛性を有する. さらに, その 19 族のうち 8 族についてはその任意のメンバーは双有理超剛性を有し, 残りの 11 族についてはその一般メンバーは双有理超剛性を有しない.

3 次元余次元 2 主ファノ多様体の残りの 66 族に関する研究が [14, 15] でなされており, 双有理双剛性 (birationally bi-rigid) などと呼ばれる性質が出現している.

**定理 3.4** (Ahmadinezhad–O [1]). 70 族からなる準非特異かつ適正な 3 次元余次元 3 主ファノ多様体のうち, その一般メンバーが双有理剛性を有するものは具体的に分類され, それらは 3 族からなる. その 3 族のうち 2 族についてはその一般メンバーは双有理超剛性を有し, 残り 1 族の任意のメンバーは双有理超剛性を有しない.

上記の結果を表 1 にまとめておく. 余次元が高くなるほど双有理 (超) 剛性を有する 3 次元主ファノ多様体が減少していることが観察される. 特に余次元 3 での少なさによ

---

\*2 ただし, 特殊なメンバーで双有理超剛性を有する場合がある.

り,さらなる高余次元の場合の双有理(超)剛性を有するものの希少性が示唆される.

表1 双有理(超)剛性を有する3次元主ファノ多様体の族の個数

余次元	1	2	3	...
族の個数	95	85	70	...
一般メンバーが双有理剛性を有する族の個数	95	19	3	...
一般メンバーが双有理超剛性を有する族の個数	50	8	2	...

## 4 3次元余次元4主ファノ多様体の双有理超剛性

前節の状況を受けて, [16] において3次元余次元4主ファノ多様体の双有理剛性に関する研究を行なった. 本節ではその結果を紹介する.

余次元3以下の場合と異なり, 余次元4以上においては主ファノ多様体の分類は困難な状況である. 重み付き射影空間に埋め込まれた主ファノ多様体の数値データの分類は行われておりそのデータベースが [3] にて公開されている. ただし, 実存する主ファノ多様体から得られる数値データはデータベース上に存在する<sup>\*3</sup>, データベース上にある数値データに対応する主ファノ多様体の存在は現状では一般に不明である. ここで, (3次元余次元 $c$ の主ファノ多様体の) 数値データとは, 以下の情報を含む:

- 重み付き射影空間の重み  $a_0, \dots, a_{c+3}$ .
- 定義方程式の個数とそれぞれの次数  $d_1, \dots, d_l$ .
- 反標準次数  $(-K_X)^3$ .
- $X$  の特異点の個数と型.

余次元4で該当する数値データは145組存在し, その数値データに対応する3次元主ファノ多様体の構成も徐々に与えられてきている. 数値データを眺めることで対応する主ファノ多様体が双有理超剛性かどうかを予想することが可能である. その方法を説明する.

**定義 4.1.**  $X \subset \mathbb{P}(a_0, \dots, a_{3+c})$  を準非特異かつ適正な3次元余次元 $c$ 主ファノ多様体(あるいはそのデータ)とし,  $P \in X$  を  $\frac{1}{r}(1, a, r-a)$  型の特異点とする. 不等式

$$(-K_X)^3 - \frac{1}{ra(r-a)} > 0$$

<sup>\*3</sup> さらに補足すると, 数値データと射影空間多様体の族は1対1に対応しない. つまり, 一つの数値データに対応する複数の異なる主ファノ多様体の族が存在する場合がある.

が成立するときに  $P \in X$  は射影中心 (**projection center**) であるという.

上記の定義に現れる不等式の補足をしておく.  $X$  がデータではなく実際の主ファノ多様体であるとき,  $P$  を中心とする唯一の因子収縮射  $\varphi: Y \rightarrow X$  が存在する ([12] 参照).  $\varphi$  は  $\frac{1}{r}(1, a, r - a)$ -重み付き爆発であり,

$$(-K_Y)^3 = (-K_X)^3 - \frac{1}{ra(r-a)}$$

であるので,  $P \in X$  が射影中心であることは  $(-K_Y)^3 > 0$  という条件のことである.  $(-K_Y)^3 > 0$  である場合に,  $Y$  からいわゆる「2-ray game」を実行することで森ファイバー空間への双有理写像が構成されることが経験的に観測されている\*4. 実際に余次元 3 以下の場合に次の事実が観測される:

**事実 4.2.**  $c \in \{1, 2, 3\}$  とし,  $X$  を準非特異かつ適正な 3 次元余次元  $c$  主ファノ多様体とする.

- (1)  $X$  上に射影中心が存在しないならば,  $X$  は双有理超剛性を有する.
- (2)  $c \in \{2, 3\}$  であり, かつ  $X$  が ( $X$  の所属する族の中で) 一般であるとき, (1) の逆も成立する.

[16] において, 余次元 4 で上記 (1) が成立することを調べ, その結果として双有理超剛性を有する 3 次元余次元 4 主ファノ多様体の存在を示した. その具体的な結果を紹介したい.

145 組の 3 次元余次元 4 主ファノ多様体の数値データのうち, 射影中心が存在しないものは 4 組存在する. データベース番号を用いればその 4 組は,

$$\#25, \#166, \#282, \#308$$

である (それぞれのデータの具体的記述については [3] 参照). 最近 Coughlan–Ducat [8] により, #25 および #282 に対応する (準非特異かつ適正な) 主ファノ多様体の族が構成された. より詳細には, #25 に対しては 1 族が, #282 に対しては 2 族が構成された. 便宜上 #282 に対応するこの 2 族を  $\mathcal{F}_{282}^{(1)}, \mathcal{F}_{282}^{(2)}$  と表すことにする.

**定理 4.3** (O [16]). (1) #25, #166, #308 に対応する任意の準非特異かつ適正な主ファノ多様体は双有理超剛性を有する.

- (2)  $i = 1, 2$  に対して,  $\mathcal{F}_{282}^{(i)}$  に属する一般メンバーは双有理超剛性を有する.

---

\*4 証明されている事実ではない.

定理の (1) は数値データのみを用いて証明がなされるのに対して, (2) では数値データのみでの証明は困難であり  $X$  の具体的な情報 (定義方程式など) を利用した. 証明は込み入っているため詳述することは控え, 簡単な方針を説明するにとどめる.  $X$  が双有理超剛性を有しない場合は森ファイバー空間  $Y/T$  への非同型な双有理写像  $f: X \dashrightarrow Y$  が存在する.  $f$  を定める可動線形系を  $\mathcal{M} \sim_{\mathbb{Q}} -nK_X$  とすれば, 組  $(X, \frac{1}{n}\mathcal{M})$  が標準的でないことが知られている (定理 2.2 参照). 特にこれは  $\mathcal{M}$  に属する因子が特定の部分多様体  $\Gamma \subset X$  で高い重複度を持つことを意味する.  $X$  上の因子の交点数などを分析することによりそのような高い重複度を持つ有効因子が存在し得ないことを示すことで矛盾を導く, というのが証明の (一つの) 方針である. 実際には,  $\Gamma$  が曲線, 非特異点あるいは特異点の別に応じて異なる議論を展開することになる.

## 参考文献

- [1] H. Ahmadinezhad and T. Okada, Birationally rigid Pfaffian Fano 3-folds, *Algebr. Geom.* **5** (2018), no. 2, 160–199. [3](#)
- [2] H. Ahmadinezhad and F. Zucconi, Mori dream spaces and birational rigidity of Fano 3-folds, *Adv. Math.* **292** (2016), 410–445. [3](#)
- [3] G. Brown, A. Kasprzyk and others, The graded ring database, Online database, available at [www.grdb.co.uk](http://www.grdb.co.uk). [2](#), [4](#), [5](#)
- [4] I. Cheltsov and J. Park, Birationally rigid Fano threefold hypersurfaces, *Mem. Amer. Math. Soc.* **246** (2017), nn. 1167, v+117 pp. [3](#)
- [5] I. Cheltsov and K. A. Shramov, Log-canonical thresholds for nonsingular Fano threefolds, *Russian Math. Surveys* **63** (2008), no. 5, 859–958. [2](#)
- [6] J.-J. Chen, J. A. Chen and M. Chen, On quasismooth weighted complete intersections, *J. Algebraic Geom.* **20** (2011), no. 2, 239–262. [2](#)
- [7] A. Corti, A. Pukhlikov and M. Reid, Fano 3-fold hypersurfaces. Explicit birational geometry of 3-folds, 175–258, *London Math. Soc. Lecture Note ser.*, **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000. [3](#)
- [8] S. Coughlan and T. Ducat, Constructing Fano 3-folds from cluster varieties of rank 2, preprint, arXiv:1811.10926, 44pp, 2018. [5](#)
- [9] A. R. Iano-Fletcher, Working with weighted complete intersections, *Explicit birational geometry of 3-folds*, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000. [3](#)
- [10] V. A. Iskovskikh and Ju. I. Manin, Three-dimensional quartics and counterex-

- amples to the Lüroth problem (Russian), *Mat. Sb. (N.S.)* **86 (128)** (1971), 140–166; English translation in *Math. USSR Sb.* **15** (1971), 141–166. [1](#), [3](#)
- [11] V. A. Iskovskikh and V. Pukhlikov, Birational automorphisms of multidimensional algebraic manifolds, *Algebraic geometry. 1*, *J. Math. Sci.* **82** (1996), no. 4, 3528–3613. [3](#)
- [12] Y. Kawamata, Divisorial contractions to 3-dimensional terminal quotient singularities, *Higher-dimensional complex varieties (Trento, 1994)*, 241–246, de Gruyter, Berlin, 1996. [5](#)
- [13] T. Okada, Birational Mori fiber structures of  $\mathbb{Q}$ -Fano 3-fold weighted complete intersections, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **109** (2014), no. 6, 1549–1600. [3](#)
- [14] T. Okada, Birational Mori fiber structures of  $\mathbb{Q}$ -Fano 3-fold weighted complete intersections, II, *J. Reine Angew. Math.* **738** (2018), 73–129. [3](#)
- [15] T. Okada, Birational Mori fiber structures of  $\mathbb{Q}$ -Fano 3-fold weighted complete intersections, III, *Kyoto J. Math.*, to appear. [3](#)
- [16] T. Okada, Birationally superrigid Fano 3-folds of codimension 4, *Algebra Number Theory*, to appear. [1](#), [4](#), [5](#)