Gluing construction of K3 surfaces and complex analysis on a neighborhood of a complex submanifold

小池 貴之 (大阪市立大学)

1. 概容

岡山大学の上原崇人氏との共同研究 [8] に基づき, K3 曲面の貼り合わせ構成について, その概要を述べる. この "貼り合わせ構成" では, ある二つの開複素曲面 M^+ と M^- とを, それらの境界近傍同士の双正則写像を用いることで正則に貼り合わせ, K3 曲面を構成する. その素材となる開曲面 $M^\pm$ は, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ から適切に選んだ 9 点を中心として, $\mathbb{P}^2$ を爆発することによって得られる多様体の開部分集合として得られる. ここでは, この $\mathbb{P}^2$ の 9 点爆発自体の研究に関して, 本研究の動機から最新の進展 [9] までについても概説する.

2. 射影平面の 9 点爆発とその反標準因子の半正値性

まず, 爆発の中心となる 9 点配置 $Z := \{p_1, p_2, \dots, p_9\} \subset \mathbb{P}^2$ が互いに相異なる点たちから成る場合, $\mathbb{P}^2$ の三次曲線のパラメータ空間の次元が 9 次元であることから, 次が分かる: ある $\mathbb{P}^2$ の三次曲線 C_0 として, $Z \subset C_0$ なるものが存在する. この場合, $\mathbb{P}^2$ の Z に於ける爆発 $\mathrm{Bl}_Z\mathbb{P}^2$ を S, C_0 の強変換を C と書くこととして, C は S の反標準因子となっていることが分かる. また, Z の中に無限に近い二点を許容する場合 (つまり 9 点爆発が相異なる 9 点を中心としたものとは限らず, いずれかの点を爆発した例外因子上の点に於いて再び爆発するような手順を含んでいるかもしれない場合) にも, 同様の考察から次が分かる: $\mathbb{P}^2$ の三次曲線 C_0 として, その強変換 $C \subset S := \mathrm{Bl}_Z\mathbb{P}^2$ が反標準因子であるようなものが存在する.

本研究の動機は, 反標準直線束 K_S^{-1} の**半正値性** (即ち, K_S^{-1} の C^∞ エルミート計量であって, その曲率テンソルがいたるところ半正定値であるようなものが存在するか否か) と, C の十分小さい (管状) 近傍の複素構造との関係の研究にある. 自分の知る限り初めにこのような関係についての結果を得たのは Brunella である [2]. 爆発の中心である Z が十分一般的である場合については, C は楕円曲線でありかつ S の任意の代数曲線は C と交わるが, このような状況下で Brunella は次を示した ([2, Theorem 1 (i)]): 反標準直線束 K_S^{-1} が半正なる (即ち, K_S^{-1} の C^∞ エルミート計量であって, その曲率テンソルがいたるところ半正定値であるようなものが存在する) ことと, C が pseudoflat な近傍を持つこととは同値である. 後者の条件 (pseudoflat 性) についてここではその詳細には立ち入らないが, 後者の条件の十分条件として, 次の意味で "C が S 中に於いて正則管状近傍を持つ" という条件が挙げられることを注意する:

定義 2.1. 滑らかな複素多様体 X に正則に埋め込まれた滑らかな部分複素多様体 Y が (X 中に於いて) **正則管状近傍を持つ**とは, Y のある開近傍 $V \subset X$ 及び, Y の法束 $N_{Y/X}$ 内のゼロ切断 $\widehat{Y}$ のある開近傍 $\widehat{V} \subset N_{Y/X}$ の間に, 双正則写像 $\varphi\colon V \cong \widehat{V}$ として, $\varphi(Y) = \widehat{Y}$ なるものが存在することをいう. □

では, C が滑らかな楕円曲線である場合について, いつ C は S 中に於いて正則管状近傍を持つのであろうか. これについては, 次の Arnol'd の定理が非常に強力な十分条件を与えている:

定理 2.2 ([1]). 滑らかな複素曲面 S (上記の様な S を本稿では専ら扱うがこの定理の主張は任意の滑らかな複素曲面 S について成立する) に正則に埋め込まれた滑らかな楕円曲線 C を考える. 法線束 $N_{C/S}$ が $\mathrm{Pic}^0(C)$ の元であり, かつディオファントス的であるとき, 即ち

> ある $A, \alpha > 0$ として, 各 $n \geq 0$ に対して $\mathrm{dist}(\mathcal{O}_C, N_{C/S}^n) \geq A \cdot n^{-\alpha}$ なるものが存在する

とき, C は S 中に於いて正則管状近傍を持つ. ここで $N_{C/S}^n$ は直線束 $N_{C/S}$ 自身の n 回のテンソル積を表わし, dist は $\mathrm{Pic}^0(C)$ をトーラスと見做して入れたユークリッド距離である. □

尚, この Arnol'd の定理のバージョンとして, C が有理曲線のサイクル (ここでは, C が有理曲線のサイクルであるとは, C が被約なコンパクト一次元部分多様体であり, その特異点としてはノード型のもののみを持ち, その正規化は射影直線 $\mathbb{P}^1$ たちいくつかの無縁和となっており, さらにその双対グラフがサイクルグラフであるようなもののことをいっている. 特に特異点としてノードをただ一つのみ持つ有理曲線もここでは有理曲線のサイクルの一例と見ている) である場合についての類似を [7] で得ている.

また, C が楕円曲線でない場合については, Arnol'd の定理の結論部分を「正則管状近傍の存在」から「pseudoflat な基本近傍系の存在」へと弱めた上でその十分条件の記述が上田によって行われている [11]. さらにそのバージョンとして, C が有理曲線のサイクルである場合についての類似を [6] で得ている.

さて, 以上を踏まえた上で, 改めて, $\mathbb{P}^2$ の 9 点爆発 S の反標準直線束 K_S^{-1} の半正値性の話題へと戻そう. まず, K_S^{-1} がもし半正であるならば, その定義から K_S^{-1} には C^∞ エルミート計量としてその曲率テンソル $\sqrt{-1}\Theta_h$ が各点上半正定値であるようなものが存在する. これを用いれば, S の任意の (被約) 代数曲線 D に対して,

$$(K_S^{-1}.D) = \int_{D \setminus D_{\mathrm{Sing}}} \sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$$

と計算できる (ここで D_{Sing} は D の特異部分). 従って, 次を得る: K_S^{-1} がもしネフでないならば, K_S^{-1} は半正でない.

[6, §7] の考察によれば, K_S^{-1} がネフであるとすると, 少なくとも爆発の中心 Z の 9 点が全て互いに相異なるときには, 次の 7 つの場合のいずれかであることが分かっている:

Case (i) C_0 が滑らかな楕円曲線である場合.

Case (ii) C_0 が, 特異点としてはノードのみをただ一つ持つ有理曲線である場合. このとき $Z \cap C_{\mathrm{Sing}} = \emptyset$ である.

Case (iii) C_0 が, 特異点としてはカスプのみをただ一つ持つ有理曲線である場合. このとき $Z \cap C_{\mathrm{Sing}} = \emptyset$ である.

Case (iv) C_0 が二つの既約成分 C_1, C_2 からなり ($j = 1, 2$ について C_j は次数 j の曲線), C_1 と C_2 は相異なる二点で横断的に交わる場合. このとき $Z \cap C_{\mathrm{Sing}} = \emptyset$ であり, かつ Z の 9 点の内 3 点が C_1 に, 6 点が C_2 に乗っている.

Case (v) C_0 が二つの既約成分 C_1, C_2 からなり ($j = 1, 2$ について C_j は次数 j の曲線), C_1 と C_2 は一点で二重に交わる場合．このとき $Z \cap C_{\mathrm{Sing}} = \emptyset$ であり, かつ Z の 9 点の内 3 点が C_1 に, 6 点が C_2 に乗っている．

Case (vi) C_0 が三つの既約成分 C_j からなり ($j = 1, 2, 3$, これらは全て $\mathbb{P}^2$ の直線), それらは共点でない場合．このとき $Z \cap C_{\mathrm{Sing}} = \emptyset$ であり, かつ各 C_j 上には, Z の 9 点の内 3 点ずつが乗っている ($j = 1, 2, 3$).

Case (vii) C_0 が三つの既約成分 C_j からなり ($j = 1, 2, 3$, これらは全て $\mathbb{P}^2$ の直線), それらは共点である場合．このとき $Z \cap C_{\mathrm{Sing}} = \emptyset$ であり, かつ各 C_j 上には, Z の 9 点の内 3 点ずつが乗っている ($j = 1, 2, 3$).

以上の各ケースについて, K_S^{-1} の半正値性についての考察を行おう．

Case (i) は最も難しい場合であるといえるので, この場合は後に残す．Case $(ii), (iv)$, 及び (vi) は, C が楕円曲線のサイクルであり, かつその "法束" $N_{C/S} := j^*\mathcal{O}_S(C)$ が位相的に自明である (つまり $N_{C/S} \in \mathrm{Pic}^0(C)$) 場合である (ここで閉埋め込み $C \to S$ を j で表している). 今の場合 $\mathrm{Pic}^0(C)$ は $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と群として同一視できる (同一視の方法には, 対合 $\times(-1)\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ 分だけの自由度がある). この同一視により $N_{C/S}$ に対応する複素数を $\alpha(C, S)$ と書くことにしよう．まず絶対値 $|\alpha(C, S)|$ が 1 でない場合には, [6, Theorem 1.1 (ii)] より次が分かる: K_S^{-1} の最小特異エルミート計量は, C に沿ってのみルロン数 1 の特異性をもつ．特にこの場合, K_S^{-1} は半正でない．次に $|\alpha(C, S)| = 1$ なる場合には, 最近の研究により K_S^{-1} は半正であることが判明した [9, Theorem 1.2]. Case $(iii), (v)$, 及び (vii) については, 組 (S, C) の最小ログ特異点解消を $(\widetilde{S}, \widetilde{C})$ として, $\widetilde{C}$ の十分小さい (変位レトラクトとなっているような) 近傍の適切な有限被覆の爆縮を考えることで, 問題を次のケースへと帰着できる: $\widehat{S}$ を非特異曲面, $\widehat{C}$ を $\widehat{S}$ に正則に埋め込まれた非特異曲線とする．$\widehat{C}$ の法線束が正則に自明である場合に, いつ直線束 $\mathcal{O}_{\widehat{S}}(\widehat{C})$ は半正か? この問いについては, [5] などから次のようにその答えが判明している: 上田の意味で組 $(\widehat{C}, \widehat{S})$ が無限型であるときには $\mathcal{O}_{\widehat{S}}(\widehat{C})$ は半正であり, そうでないときには $\mathcal{O}_{\widehat{S}}(\widehat{C})$ はの最小特異エルミート計量は, $\widehat{C}$ に沿ってのみルロン数 1 の特異性をもつ (特にこの場合, $\mathcal{O}_{\widehat{S}}(\widehat{C})$ は半正でない).

以上から分かる通り, 現時点で未だ K_S^{-1} の半正値性の判定が完了していないケースは, Case (i) を残すのみとなっている．Case (i) の内, 特に法線束 $N_{C/S}$ が torsion である場合 (つまり, ある正整数 n として $N_{C/S}^n$ が正則に自明になる場合．この場合にはある楕円ファイブレーション $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$ が存在し, C はその一つのファイバーとなっている) には, K_S^{-1} は半豊富であり, 特にこの場合には K_S^{-1} は半正であることが簡単な代数的考察から分かる．また, 法線束 $N_{C/S}$ が (今の場合自動的に $N_{C/S}$ は位相的に自明であるが, さらに) ディオファントス的である場合については, 先述の Arnol'd の定理及び Brunella の定理により, K_S^{-1} は半正であることが分かる．さらに最近の研究によって K_S^{-1} が半正であるための十分条件は多少一般化されたが [9, Theorem 1.3], 未だ不明な場合が残っている．

初等的な考察から分かる通り, $\mathrm{Pic}^0(C)$ 中でディオファントス的な直線束全体が成す部分集合はルベーグ全測度を占める．このことを念頭に置くと, Case (i) で, K_S^{-1} の半正値性を一般の 9 点配置 $Z = \{p_1, p_2, \ldots, p_9\}$ に対して考察する際, 次のような発想は自然であろう: つまり, まず $p_1, p_2, \ldots, p_8$ の 8 点を固定したうえで, p_9 のみを C_0 上の点 q

へと動かすことを考えて得られるSの一次元変形族$\{S_q\}_{q\in C_0}$を考える．その上で，p_9を近似する点列$\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$を適切に選ぶことで，任意のnに対して$K_{S_{q_n}}^{-1}$は半正となる．つまり，各$K_{S_{q_n}}^{-1}$にはC^∞エルミート計量h_nとして半正曲率をもつものが存在する．これらh_nの$n\to\infty$での極限を適切な正規化の元で考察する，という発想である．

この方針で考察を行うためには，各h_nの構成をBrunellaの定理の証明に立ち返って考えるに，次の問題についてまず考察することが不可欠のように思われる:

問題 2.3. 上記の族$\{S_q\}_{q\in C_0}$を考える．楕円曲線C_0のS_qに於ける強変換をC_qで表す．集合Aを$A:=\{q\in C_0\mid N_{C_q/S_q}$はディオファントス的$\}$によって定める．このとき，$C_q$の正則管状近傍の内で (適当な意味で) 最大のものの大きさ[1]は，$q\in A$に応じてどのように変化するか?

この問に答えを与えるために，(C_qの正則管状近傍それ自身に着目する代わりに) C_qの正則管状近傍の補集合について知見を広げたいと考えたのが，後述するK3曲面の貼り合わせ構成の動機である．

3. K3曲面の貼り合わせ構成

本節で，表題のK3曲面の貼り合わせ構成について述べる．

射影平面$\mathbb{P}^2$から二つの滑らかな三次曲線$C_0^\pm$を，それらが (簡単のため) 互いに同型となるようにとる． さらにそのそれぞれから 9 点ずつを固定し，これらを$Z^\pm=\{p_1^\pm,p_2^\pm,\dots,p_9^\pm\}$とする． 有理曲面$S^\pm$を，$\mathbb{P}^2$をそれぞれ$Z^\pm$に於いて爆発することで得られるものとする．部分多様体$C^\pm\subset S^\pm$を$C_0^\pm$の強変換とする．するとそれらの法束$N_\pm:=N_{C^\pm/S^\pm}$は$\mathrm{Pic}^0(C^\pm)$の元となっているのであった．二つの楕円曲線$C_0^\pm$の間の同型射$g\colon C_0^+\to C_0^-$を固定した上で，次の二条件を仮定する: gにより誘導される$C^\pm$間の同型も同じ記号gで書くこととした上で$g^*N_-\cong N_+$なること，N_+はディオファントス的であること (このときには自動的にN_-もディオファントス的になる)．

このとき，先述のArnol'dの定理を用いることで次が分かる: $C^\pm$は，それぞれ$S^\pm$内に於いて，ある管状近傍$W^\pm$及び$W_0^\pm$として，$\overline{W_0^\pm}\subset W^\pm$であり，また$V^+:=W^+\setminus\overline{W_0^+}$と$V^-:=W^-\setminus\overline{W_0^-}$との間には適切な双正則写像$f\colon V^+\to V^-$が存在するようなものを持つ．そこで$M^\pm:=W^\pm\setminus\overline{W_0^\pm}$を，この$f$によってそれらの境界近傍を同一視することで貼り合わせることでコンパクト複素曲面Xを得る．これは実は大域的な正則2形式σとして，X上どの点に於いても消えないものを許容する．このことと位相的な考察から，XはK3曲面であることが分かる．さらにσは$V^+=f^{-1}(V^-)\subset X$上に於いて非常に具体的に (局所座標を用いて) 記述することができる．このことと[4]などにあるような標準的なXの“マーキング” $(A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3,C_1^\pm,C_2^\pm,\dots,C_8^\pm)$の構成とを組み合わせることで次を得る: 適切なスケーリングにより，双対を介して，ある$x,y\in\mathbb{C}$を用いて

$$\begin{aligned}\sigma = \quad & (2(r_\beta-r_\alpha\tau)+s(g))A_1+xA_2+yA_3+(r_\beta-r_\alpha\tau)B_1+\tau B_2+B_3\\ + \quad & \sum_{j=1}^{8}c_j^+(p_1^+,p_2^+,\dots,p_8^+)\cdot C_j^+ +\sum_{j=1}^{8}c_j^-(p_1^-,p_2^-,\dots,p_8^-)\cdot C_j^-\end{aligned}$$

[1] C_qの正則管状近傍の内で適当な意味で“最大のもの”やその“大きさ”については，例えば[8]のLemma 2.7前後のような議論によって定式化できる．

2-cycle	$\int\sigma$ の値に現れるパラメータ
A_3	なし (σ の正規化条件と見做す)
B_3	“のりしろ”の幅や位置及び回転に関するパラメータ
A_2	$C_0^{\pm}$ の選び方
B_2	“のりしろ”の幅や位置及び回転に関するパラメータ
C_1^+	p_1^+ から見た p_2^+ の相対的位置
C_2^+	p_2^+ から見た p_3^+ の相対的位置
$\vdots$	$\vdots$
C_7^+	p_7^+ から見た p_8^+ の相対的位置
C_8^+	C_0 の点 “$p_6^+ + p_7^+ + p_8^+$” の位置
C_1^-	p_1^- から見た p_2^- の相対的位置
C_2^-	p_2^- から見た p_3^- の相対的位置
$\vdots$	$\vdots$
C_7^-	p_7^- から見た p_8^- の相対的位置
C_8^-	C_0^- の点 “$p_6^- + p_7^- + p_8^-$” の位置
A_1	p_9^+ の取り方 ($N_{\pm}$ の複素構造)
B_1	同型 $g\colon C^+ \cong C^-$ の選び方

表 1: 2-cycle に沿っての積分値と対応するパラメータ

となる (これらマーキングの満たす交点数行列については次節参照). ここで τ は $C_0^{\pm}$ の複素構造に対して定まる上半平面 $\mathbb{H}$ の元である. また r_α 及び r_β は, 平坦束 N_+ のモノドロミーが $\alpha \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}r_\alpha)$, $\beta \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}r_\beta)$ となるような実数である (ここで α 及び β は, X のマーキングに応じて定まる, C^+ の基本群の生成元). また, $C_0^{\pm}$ を固定した後に於いては, $(p_1^{\pm}, p_2^{\pm}, \dots, p_8^{\pm})$ 及び g はそれぞれ複素 8 次元, 複素 1 次元の自由度を以て定まる. 上で $s(g)$ や $c_j^{\pm}(p_1^{\pm}, p_2^{\pm}, \dots, p_8^{\pm})$ と記したのは, それぞれこれらパラメータに正則に依存する形で定まる値である (表 1 を参照).

3.1. 構成した K3 曲面の性質と主結果

楕円曲線 $C^{\pm}$ の正則管状近傍の構造に着目すると, 構成から X の開部分複素多様体 $V \subset X$ として, 以下のようなアニュラス束構造を持つものの存在が従う: $C := C^+$ 上の non-torsion な (即ち任意の正整数 n に対して $F^n := F^{\otimes n}$ が正則に自明な直線束ではない) 平坦直線束 $F \to C$ 及び開区間 $I := (a, b)$ が存在して, V は $\{x \in F \mid a < |x|_h < b\}$ に双正則である ($a < b$, h は F の平坦計量, 実際には F は法線束 N_+ である, 実際 V は $V^{\pm}$ に対応する開集合とすればよい). $H_t \subset X$ を, この同型を介して $\{x \in F \mid |x|_h = t\}$ に相当する超曲面とする ($a < t < b$) と, 各 H_t は X のレビ平坦超曲面となる. H_t の各葉は, 平坦直線束 F のモノドロミーに対応する表現 $\pi_1(C, *) \to U(1) := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ が単射な場合には $\mathbb{C}$ に, そうでない場合には $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に同型である (どちらの場合も適切な X の構成より実際に実現される). これら H_t の各葉は, H_t の中で稠密になっている点にも注意する. この意味で, 我々の方法で構成される K3 曲面は, 各葉が稠密なレビ平坦超曲面たちの実 1 次元族を持つということが分かる.

さらに, 前節で述べた σ の各サイクルに沿っての積分結果 (周期写像) の値に着目す

ると, 構成時のパラメータ (楕円曲線 $C_0^{\pm}$ の選び方や9点配置たちの選び方, $C^{\pm}$ の正則管状近傍の選び方やそれら境界近傍の同一視のし方に関するパラメータ) を動かすことで, 少なくとも複素19次元分の自由度を伴いつつK3曲面の構成ができていることが分かる. また一般のパラメータに於いて構成されたK3曲面のピカール数は0であるとも簡単に分かる. 以上の結果は, 例えば以下の通り纏められる:

定理 3.1 ([8]). *K3*曲面 X として以下のようなコンパクトな *(*C^{ω}*-級)* レビ平坦超曲面の実一次元族 $\{H_t\}_{t\in I}$ を持つものが存在する*:* 各 $t\in I$ について H_t は実三次元トーラスと同相であり*,* また任意の葉は H_t 中で稠密である *(*$I\subset\mathbb{R}$ はある開区間*).* また*,* H_t の各葉は*,* $\mathbb{C}$ 又は $\mathbb{C}^*$ のどちらかに同型である*.* さらにこのような X は*,* 以上の性質を保ちつつ複素19次元の自由度をもって変形可能であり*,* 特に一般のパラメータ設定の下では X のピカール数は0である*.* 特にこのとき*,* X は射影的ではなく*,* かつクンマー曲面でもない*.* □

一般のパラメータ設定の下で構成されたK3曲面について, レビ平坦超曲面の一つの葉について, それを $\mathbb{C}$ のはめ込み射像と見ることで, 特に以下も得る:

系 3.2. 射影的でない *K3*曲面 X として*,* クンマー曲面ではなく*,* かつ以下のような複素平面からの正則写像 $f\colon\mathbb{C}\to X$ を持つものが存在する*:* f は単射正則はめ込みであり*,* かつ像 $f(\mathbb{C})$ のユークリッド位相での閉包は実三次元トーラスと同相な X のコンパクトレビ平坦超曲面である*.* 特に*,* 像 $f(\mathbb{C})$ のユークリッド位相での閉包は X の真部分集合だが*,* 一方でそのザリスキー位相での閉包は X 全体と一致する*.* □

以上の構成は, 複素構造を忘れ単純に実多様体同士の貼り合わせと捉えた場合には, [4] にあるような位相幾何学的に古典的に知られたK3曲面 (に可微分同相な実多様体) の貼り合わせ構成と完全に同一である. 本構成の新しい点は, Arnol'dの定理を応用することでこの構成を正則なレベルで実現した点にあり, これによりK3曲面の (代数的な部分集合だけでなく, 複素平面のはめ込み像やレビ平坦超曲面といった) 複素解析幾何学的な内部構造に言及出来るようになった点にある. 尚, Arnol'd型の定理の応用としての貼り合わせ構成は, 別の多様体についてではあるが, [10] に先例がある [2] ことをここで注記する.

4. 貼り合わせ構成によってできるK3曲面の成す周期領域の部分集合について

K3曲面の周期領域

$$\mathcal{D}_{\mathrm{Period}} := \{\sigma\in\mathbb{P}(\Lambda_{\mathrm{K3}}\otimes\mathbb{C}) \mid (\sigma,\sigma)=0, (\sigma,\overline{\sigma})>0\}$$

の部分集合であって, 先述の貼り合わせ構成で実現可能なK3曲面に対応するような点全体が成すものについて考察する [8]. ここで Λ_{K3} は, 階数22の自由加群

$$\Lambda_{\mathrm{K3}} := \bigoplus_{j=1}^{3}\mathbb{Z}A_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{3}\mathbb{Z}B_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{8}\mathbb{Z}C_j^{+} \oplus \bigoplus_{j=1}^{8}\mathbb{Z}C_j^{-}$$

[2] [10] では, 貼り合わせ構成でできあがる多様体は $S^3\times S^3$ であり, その複素構造に関する研究に応用されている.

に, 次のように内積を定めた格子である: 格子の意味での直和分解 $\Lambda_{\mathrm{K3}} = \langle A_1, B_1\rangle \oplus \langle A_2, B_2\rangle \oplus \langle A_3, B_3\rangle \oplus \langle C_j^+\rangle_{j=1}^8 \oplus \langle C_j^-\rangle_{j=1}^8$ があり, 各 $j = 1, 2, 3$ について $(A_j^2) = 0, (A_j, B_j) = 1, (B_j^2) = -2$ であり, また $\langle C_j^\pm\rangle_{j=1}^8$ は $E_8(-1)$-格子となっている (これは前節のマーキング $(A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1^\pm, C_2^\pm, \ldots, C_8^\pm)$ が満足する内積構造とそろえてある).

組 $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ として, $n \to \infty$ で $-\log \mathrm{dist}((np, nq), \mathbb{Z}^2) = O(\log n)$ となるものを固定する. 周期領域 $\mathcal{D}_{\mathrm{Period}}$ の部分集合 $\Xi_{(p,q)}$ を, 先述の貼り合わせ構成の内, $r_\alpha = p, r_\beta = q$ なるような方法により構成されるK3曲面に対応する点全体の集合として定める. このとき, 次を得る:

定理 4.1 ([8]). ある連続関数 $\widehat{V}_{(p,q)} \colon \mathbb{H}_\tau \times \mathbb{C}^8_{c^+} \times \mathbb{C}^8_{c^-} \times \mathbb{C}_s \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ として次を満たすものが存在する. 任意の

$$\sigma = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 + \sum_{j=1}^8 c_j^+ C_j^+ + \sum_{j=1}^8 c_j^- C_j^-$$

が代表する元 $[\sigma] \in \mathcal{D}_{\mathrm{Period}}$ に対し, $[\sigma] \in \Xi_{(p,q)}$ なることと, 以下の三条件 $(i), (ii), (iii)$ が全て成立することとは同値である: (i) $b_3 \neq 0$ である. 以下正規化により $b_3 = 1$ として条件を述べる. (ii) $\mathrm{Im}\, b_2 > 0$ である. (iii) $(\sigma.\overline{\sigma}) > \widehat{V}_{(p,q)}(b_2, (c_1^+, c_2^+, \ldots, c_8^+), (c_1^-, c_2^-, \ldots, c_8^-), b_1 - 2(q - pb_2))$ である. □

この定理4.1の主張について, 例えば簡単のため楕円曲線 $C_0^\pm$, 9点配置 $p_1^\pm, p_2^\pm, \ldots, p_9^\pm$, 及び同型 $g \colon C_0^+ \to C_0^-$ までを固定し, 残るパラメータ (貼り合わせの “のりしろ”の幅や位置及び回転に関するパラメータ) のみが変わり得るという状況に於いて説明を加えよう. このときには, 前節で述べたパラメータの内, $\tau, \{c_j^\pm(p_1^\pm, p_2^\pm, \ldots, p_8^\pm)\}_{j=1}^8$, r_α と r_β, 及び $s(g)$ が既に (固定した設定から) 決定されている状況にある. このときには, 貼り合わせの “のりしろ”の幅や位置及び回転に応じて, ある複素数 $x, y \in \mathbb{C}$ が存在し, 正則2形式 σ は

$$\begin{aligned}\sigma = \quad & (2(r_\beta - r_\alpha\tau) + s(g))A_1 + xA_2 + yA_3 + (r_\beta - r_\alpha\tau)B_1 + \tau B_2 + B_3 \\ + \quad & \sum_{j=1}^8 c_j^+(p_1^+, p_2^+, \ldots, p_8^+) \cdot C_j^+ + \sum_{j=1}^8 c_j^-(p_1^-, p_2^-, \ldots, p_8^-) \cdot C_j^-\end{aligned}$$

となることが分かっているのであった. ここで等式 $(\sigma.\sigma) = 0$ からは, x と y は線形な関係を持つことが分かる. そこで以下では x を貼り合わせの “のりしろ”の幅や位置及び回転に対応して変化するパラメータと見做し, $y = y(x)$ は従属変数と見做すこととする. このとき, 簡単な計算から, 既に (固定した設定から) 決定されているある実定数 N を用いて

$$(\sigma, \overline{\sigma}) = 4\mathrm{Im}\,\tau \cdot \mathrm{Im}\, x + N_0$$

となっていることが分かる. 以上の設定に適用すると, 定理4.1の主張からは特に次が分かる: ある (既に固定した設定から決定される) 実定数 N_1 が存在し, $\mathrm{Im}\, x > N_1$ ならば,

$$\begin{aligned}& (2(r_\beta - r_\alpha\tau) + s(g))A_1 + xA_2 + y(x)A_3 + (r_\beta - r_\alpha\tau)B_1 + \tau B_2 + B_3 \\ + \quad & \sum_{j=1}^8 c_j^+(p_1^+, p_2^+, \ldots, p_8^+) \cdot C_j^+ + \sum_{j=1}^8 c_j^-(p_1^-, p_2^-, \ldots, p_8^-) \cdot C_j^-\end{aligned}$$

が代表する周期領域の点に対応するK3曲面は, (貼り合わせの “のりしろ” の幅や位置及び回転のみを適宜調整することで) 貼り合わせ構成可能である.

またさらに, 構成に基づいた簡単な考察から, パラメータ x と $x+2\pi$ のそれぞれに対応するK3曲面は (マーキングの違いを無視すれば) 複素多様体としては同型なものであることが分かる. このことから, 穴あき円板 $B^* := \{x \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, x > N_1\}/2\pi\mathbb{Z}$ 上に貼り合わせ構成可能なK3曲面の (貼り合わせの “のりしろ” の幅や位置及び回転のみを変形させているような) 変形族 $\pi\colon \mathcal{X}^* \to B^*$ が得られる. この変形族は, 中心ファイバーとして, S^+ と S^- とを $C^\pm$ 同士を g によって同一視することによって得られる特異K3曲面を据えることで自然に円板上の変形族へと拡張することができる. この退化はII型の退化となっていることが簡単に確かめられる [8, §7.3] ため, この意味で我々の貼り合わせ構成は, Friedmanらによる “smoothing” による非特異K3曲面の構成の具体例であるとも言えるであろう.

ところで, 定理4.1からは一見, 貼り合わせ構成可能なK3曲面の特徴づけが上手くできているように見えるかもしれない. しかし, 実際には, 連続関数 $\widehat{V}_{(p,q)}$ の具体的な値や, その (p,q) を変えたときの挙動がよく分かっていないため, 必ずしもそうは言えない. この関数 $\widehat{V}_{(p,q)}$ の値は, 貼り合わせ構成可能なK3曲面たちの, 適切な状況下での最小体積に対応するものである. 貼り合わせ構成で体積がなるたけ小さいK3曲面を構成するためには, $W^\pm$ としてなるたけ大きな正則管状近傍を選ぶ必要があるため, 明らかにこの値 (又はその, (p,q) を変えたときの振る舞い) は, 先述の問2.3と深い関係を持つものといえよう.

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional Anal. i Prilozen., 10-4 (1976), 1–12 (English translation : Functional Anal. Appl., 10-4 (1977), 249–257).

[2] M. Brunella, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature, Riv. Mat. Univ. Parma, **1** (2010), 441–450.

[3] R. Friedman, Global smoothings of varieties with normal crossings, Ann. Math. **118** (1983), 75–114.

[4] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus, volume **20** of. Graduate Studies in Mathematics.

[5] T. Koike, On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles, Kyoto J. Math., Volume 55, Number 3 (2015), 607–616.

[6] T. Koike, Ueda theory for compact curves with nodes, Indiana U. Math. J, Volume 66, Number 3 (2017), 845–876.

[7] T. Koike, Arnol'd's type theorem on a neighborhood of a cycle of rational curves, arXiv:1805.05326.

[8] T. Koike, T. Uehara, A gluing construction of K3 surfaces, arXiv:1903.01444.

[9] T. Koike, Hermitian metrics on the anti-canonical bundle of the blow-up of the projective plane at nine points, arXiv:1909.06827.

[10] H. Tsuji, Complex structures on $S^3 \times S^3$, Tohoku Math. J. (2), **36**, 3 (1984), 351–376.

[11] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.