

# KPZ 普遍クラス

## - 厳密解と実験が奏でる非平衡のスケーリング則 -

竹内一将\*

### 概要

降り積もる雪に心躍る経験は、多くの方がお持ちだと思います。実験系の方は、蒸着装置をお使いかもしれません。wet 系生物実験なら、バクテリアコロニーを目にする機会があるでしょう。これらはみな、粒子や細胞からなる領域が成長していく非平衡過程です。何となく似ているだけに思える、こうした現象たちが、実は深遠な普遍的法則で繋がっているとしたら？それが成長過程だけでなく、他の非平衡多体問題、さらに純粋数学にまで関わっていたら？これが本講義ノートのテーマ、KPZ 普遍クラスの面白さの一片です。

成長には、ゆらぎが伴うことが珍しくありません。このとき、多くの場合に、成長領域の界面には臨界現象のようなスケーリング則（ただし、その非平衡版）が現れます。Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 普遍クラスは、中でも最も重要とされるクラスです。非線形な非平衡多体問題ゆえ、厳密に解けないと思われてきましたが、1次元系に対しては、2000年、常識が覆りました。それから約20年、KPZは、ポリマー模型、交通流、ボース多体系、ランダム行列、組合せ論、確率論など、様々な話題と関わりながら進展を続け、実験的検証もなされました。本講義ノートでは、成長界面、特にKPZの非平衡スケーリング則について、基礎から現代的展開までの概略を扱います。数理的側面より、物理としての結果や直感を重視しつつ、何が驚きか、何が謎として残されているかも手短かに言及します。

## 1 はじめに

せっかくの機会なので、気軽なイントロを書いてみよう。私が、非平衡物理学の、特に統計力学的な話題が好きな理由は、話し出したらきりが無いけれど\*<sup>1</sup>、ざっくり言って以下の2つにある。

- 身近に広がる自然現象の豊かさ、不思議さを感じさせてくれて、そこかしこに未解明の謎が転がっているんだと気づかされること。
- 一見関係なさそうな現象どうしが繋がったり、背後に明快な仕組みや原理、美しい理論や数学が潜んでいることがあるんだと分かったりして、物理の神秘的な奥深さに気づかされること。

このような観点からは、本講義のテーマである「KPZ 普遍クラス」は最も面白い話題の1つだと思う。KPZとは、Kardar-Parisi-Zhangの略で、この三人により1986年に提案された、ゆらぎながら運動する非平衡界面を記述する方程式または普遍クラスのことを指す[1]。ここで考えている現象はごく単純なものだ。図1(a)のように、空間内に領域A,Bがあり、領域Aが広がっていくとしよう。成長のメカニズムは問わない。熱力学的に、Aが安定、Bが準安定な相であるために成長するのかもしれない。あるいは、図1(b)のように、粒子が降り注ぎ、堆積していくのでも良いし\*<sup>2</sup>、図1(c)のように、細胞の塊が増殖していくのでも良い。これらの例では、領域Aは粒子クラスターで、粒子数増大に伴い、Aが成長している。また、これとは逆に、物質側の領域が小さくなっていても良い。紙が燃え広がり、紙切れが小さくなっていく過程(図1(d))はその一例である。図1(e)のように、化学反応の波が伝搬する過程でも良い。これらは、成長の微視的メカニズムは全く異なるが、結果として生じる界面の形状には、どこか似通っているところがある。どの例でも、界面は時間が経つにつれて凸凹になっていき、その凸凹には様々な長さスケールが入り交じっているのだ。実は、このような成

\* 東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻 (mail: kat@kaztake.org)

\*<sup>1</sup> まあ、お酒でも飲みながら...

\*<sup>2</sup> 蒸着による薄膜形成もこのような成長過程の1つであり、現にKPZクラスが確認された例がある[2]。

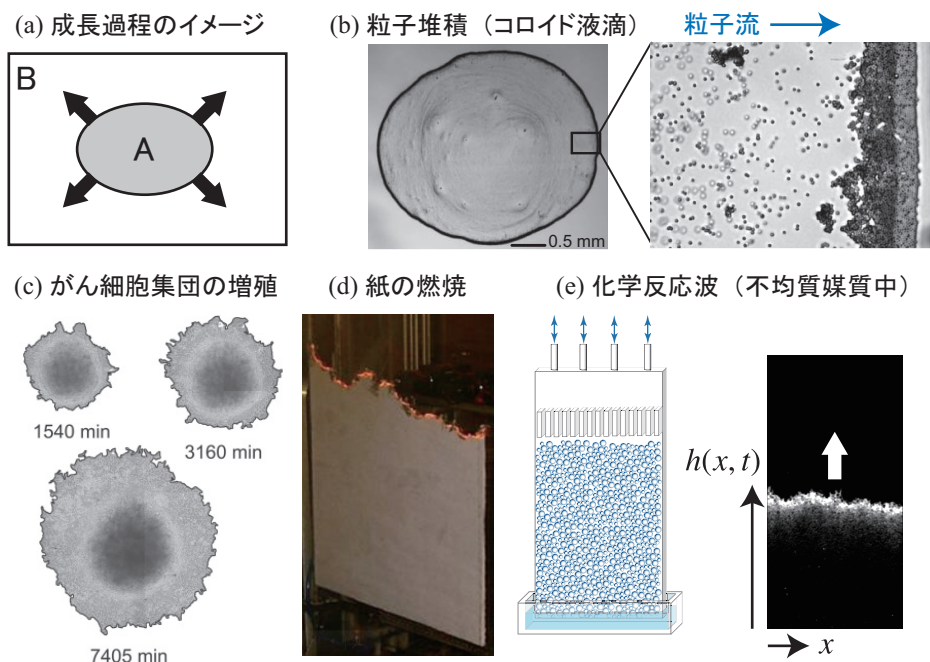


図 1: ゆらぎを伴う成長過程の例。(a) 成長過程の模式図。(b) 乾燥中のコロイド液滴における、液滴の縁への粒子堆積の様子 [3]。(c) 増殖するがん細胞 HeLa の集団 [4]。(d) 紙の燃焼フロント伝播 [5]。(e) 不均質媒質中を伝搬する化学反応波 [6]。ガラスピースが敷き詰められた擬二次元ダクト中で、反応液を移流させた状態で、自己触媒反応  $3\text{H}_3\text{AsO}_3 + \text{IO}_3^- + 5\text{I}^- \rightarrow 3\text{H}_3\text{AsO}_4 + 6\text{I}^-$  の反応フロントが可視化されている。実験 (b)-(e) は (少なくとも、ある範囲の実験条件では) 本講義の主役である KPZ クラスに属することが示されている。図は、各引用論文から許可を得て転載 (一部改変)。写真 (d) は Myllys 氏の厚意による。

長過程からは、多くの場合、スケール不変な界面形状が生じることが数多くの実験や数値計算で観測されている [7]。つまり、臨界現象と同じような、普遍的なスケーリング則で記述できる現象が、臨界点のような特殊な状況にしくなくても出現するのだ。成長過程のような非平衡現象が、スケーリング則や臨界指数、普遍クラスといった概念で整理できるということで、界面成長のスケーリング則は、1980 年代頃から、統計力学分野で熱心に研究されてきた。次節で述べるように、中でも KPZ クラスは、最も基本的で重要とされる普遍クラスである。

界面成長のスケーリング則は、70 年代にはほぼ確立されていた動的臨界現象の理論的枠組みに、良くも悪くも沿ったものだった。しかし、2000 年、1 次元 KPZ クラスの、あるモデルに対して厳密解が導出されると、状況が一変する。非平衡、非線形、確率過程、多体系という、難しい要素を総ナメしているような問題で、非平衡ゆらぎの非自明な性質が厳密に解けてしまったのだ。しかも結果は、物理としても、数学としても、非常に魅力的なものだった。その後の発展によるものも含めて、著者が思う KPZ クラスの魅力を列挙してみよう。

- 1 次元 KPZ クラスについて、実験でも厳密解と同じ統計法則が確認された。つまり、厳密解の結果は可解モデルの特殊性ではなく、KPZ クラスに属するあらゆるモデルと現象に共通する、普遍的な性質だということだ。
- ゆらぎの分布や相関は、界面形状または初期条件に依存していくつかのケースに分類され、それぞれが普遍性をもつ。つまり、同じ臨界指数をもつ 1 つの普遍クラスの中に、異なる分布関数・相関関数で特徴づけられる、複数の「普遍サブクラス」とでも言うべき内部構造がある。
- 既に述べたとおり、1 次元 KPZ クラスは厳密に解ける非平衡多体問題の希少な例であり、非自明かつ本質的に非平衡な臨界現象としては現状唯一の厳密に解ける例と言っても良いだろう。つまり、平衡系の臨界現象において Ising モデルが果たしたのと同等の役割を、非平衡臨界現象に対して KPZ クラスが担う可能性がある。個人的な感覚としては、現在の KPZ 研究は、平衡臨界現象で言うところの 1960 年代あたり、つまり

Ising モデルの厳密解は比較的良好に理解され、対応する実験も複数出てきたが、くりこみ群や共形場理論などで整理されるよりは前、つまり物理として目覚ましい進展が興る前の状況に近いと思っている。そのような熱い展開が非平衡でもありえるのだろうか？

- KPZ クラスは、界面成長以外の様々なモデルとも関係がある。代表的なものを挙げると、不均質媒質中の有向ポリマー、ランダム力で攪拌された流体モデル(確率的 Burgers 方程式)、不均一系の量子干渉 (Anderson 絶縁体の電気伝導) との関係のほか、主に 1 次元系で議論されている関係ではあるが、確率的粒子輸送 (特に ASEP モデル)、量子可積分系 (Lieb-Liniger モデル)、ゆらぎを伴う流体記述など、様々な系や問題と繋がっている。その他、位相不安定性による時空カオス (蔵本-Sivashinsky 方程式)、励起子ポラリトンの Bose-Einstein 凝縮体、ある種のスメクチック液晶や非圧縮アクティブマターなど、例を挙げていけばきりが無い<sup>\*3</sup>。
- 1 次元 KPZ クラスの普遍ゆらぎは、ランダム行列理論の統計法則と深く関連する<sup>\*4</sup>。厳密解研究は、確率論はもとより、数学の組合せ論と関係しているし、可積分系の数理の重要な研究対象の 1 つとなっている。また、KPZ 方程式のような確率偏微分方程式の数学的定式化の業績で、Martin Hairer はフィールズメダルを受賞している [8]。

私見であるが、現代的な KPZ クラスの研究は、数学者と数理物理学者が中心になって非常に魅力的な発展が続いている一方で、(もっと広い範疇の) 理論物理学者と実験家の参入が圧倒的に足りていない。つまり、数理的理解の充実に比べて、物理として理解しなくてはならない重要な問題が多く残されているように感じている。数理的研究が多いため、そのような論文に慣れていない場合は敷居が高いように感じられてしまう傾向があると思うが、物理的直観で理解できる事柄が意外と多く、著者自身は感じている。厳密解の結果を活用して、あるいはそれに触発されて、物理をする立場だと割り切ってみる。そうすることで、数理的厳密さとは違う観点で重要な研究課題が見えてくることだろう。

そこで、本講義ノートでは、界面成長に関する非平衡スケーリング則、特に KPZ クラスについて基礎的な導入をしたのちに、1 次元 KPZ クラスの厳密解について、物理としての意味や直観を重視して解説する<sup>\*5</sup>。テキストは、ページの都合もあって、自己完結な教科書にはできない。そこで次節以降は、主要な式や概念、実験事実などを、主に箇条書きでまとめることにする。詳細な解説は、英語ではあるが、著者によるレビュー (講義ノート) [9] があり、本講義もこのレビューの構成に従う (以下、この文献 [9] を「英語テキスト」と表記する)。また、講義やテキストでは、数理的内容は結果の紹介にとどめ、導出や、それを支える数理構造については説明しない。最新の数理的成果も触れられない。KPZ クラスの数理については、Corwin のレビュー [10] のほか、数多くのレビュー論文 (代表的なものを [11] に挙げる) が出版されているので、そちらを参照されたい。界面成長スケーリング則の物理については、Barabási と Stanley の教科書 [7] のほか、いくつか著名なレビュー [12] がある。

## 2 界面成長のスケーリング則と普遍クラス

成長界面の記述とスケーリング指数の定義

- 簡単のため、図 2(a) のように、平らな基板上に粒子堆積するような状況を念頭に置き、基板面内の座標を  $x$  ( $d$  次元)、基板に垂直な、成長が起こる方向の座標を  $h$  とする。時刻  $t = 0$  から粒子がランダムに降り始め、堆積していくと、堆積粒子の表面 (界面) は凸凹になっていく。各点  $x$  での  $h$  方向の界面位置を  $h(x, t)$  と表し、「界面高さ」と呼ぶ。

<sup>\*3</sup> KPZ 方程式 (10) が、拡散方程式に、白色ノイズと最低次の非線形性を付け加えただけの極めて素朴な恰好をしていることを思えば、界面以外の様々な問題が関係してくるのも、ある意味自然なのかもしれない。

<sup>\*4</sup> 著者の知る限り、ランダム行列そのものに帰着する訳ではないようだ。面白いことに、ランダム行列自体は出てこないのに、いくつか主要な統計法則がランダム行列理論で知られていたものと一致する。しかし、一致しないものもあり、それがまた面白い。

<sup>\*5</sup> 本稿は、夏の学校で配布されたテキストを、物性研究電子版での出版用にある程度拡充したものである。

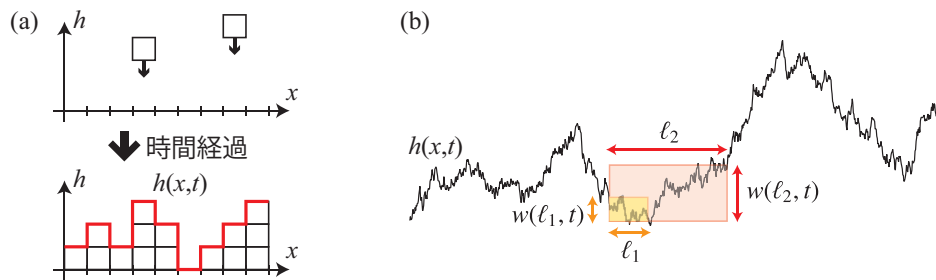


図 2: 界面高さ  $h(x,t)$  の定義 (a) と、そのスケール不変性 (b)。図 (b) は英語テキスト [9] から転載・改変。

- 図 2(b) のように、界面上に横幅  $\ell$  の領域を考えて、その中で  $h(x,t)$  の標準偏差をとる。これを (横幅  $\ell$  の領域を置く場所について) 空間平均をとり、アンサンブル平均もとったものを「界面の幅」 $w(\ell,t)$  とする。これは、長さスケール  $\ell$  における、界面ゆらぎの振幅の指標である。
- 界面の幅  $w(\ell,t)$  について、Family-Vicsek スケーリングと呼ばれる以下の冪則が成り立つことが、多くの実験と数値計算で知られている。ここで、 $F_w(\cdot)$  は何らかのスケール関数である。

$$w(\ell,t) \sim t^\beta F_w(\ell t^{-1/z}) \sim \begin{cases} \ell^\alpha & \text{for } \ell \ll \xi(t), \\ t^\beta & \text{for } \ell \gg \xi(t). \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $\xi(t)$  は  $x$  面内の相関長 (以下、単に「相関長」と呼ぶ) であり、

$$\xi(t) \sim t^{1/z} \quad (z \equiv \alpha/\beta) \quad (2)$$

を満たす。相関長を定量的に定義することも可能だが、少し煩雑なので、現時点では式 (1) に現れる 2 つの極限領域の境目として大雑把に定義しておけば十分である。

- $\langle h(x,t) \rangle$  を  $h(x,t)$  のアンサンブル平均と定義すると、 $\delta h(x,t) \equiv h(x,t) - \langle h(x,t) \rangle$  は界面高さのゆらぎを表す。すると、Family-Vicsek スケーリング (1) は、界面ゆらぎ  $\delta h(x,t)$  の統計的性質が、以下のスケール変換に対して不変であることを示唆する。

$$x \mapsto bx, \quad t \mapsto b^z t, \quad \delta h \mapsto b^\alpha \delta h. \quad (3)$$

- スケール変換 (3) に対する不変性から、界面ゆらぎの振幅は  $\delta h \sim t^\beta$ 、相関長は  $\xi(t) \sim t^{1/z}$  のように増大することがわかる。典型的な界面成長では、実際にそうなっている。
- $\alpha, \beta, z (= \alpha/\beta)$  は、臨界現象における臨界指数の役割を担う重要なスケール指数であり、系の詳細によらない普遍性が期待できる。そこで、これら指数の値が同じ現象やモデルの集まりを、普遍クラスと呼ぶ。

#### Edwards-Wilkinson (EW) 方程式・EW 普遍クラス

- 以下の方程式を、EW 方程式という。

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x,t) = v_0 + \nu \nabla^2 h + \eta(x,t). \quad (4)$$

$\eta(x,t)$  は白色 Gauss ノイズであり、平均・共分散は以下を満たす。

$$\langle \eta(x,t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(x,t) \eta(x',t') \rangle = D \delta(x-x') \delta(t-t'). \quad (5)$$

EW 方程式 (4) は、界面が、一定の駆動力、表面拡散、ノイズを受けながら成長する状況を念頭に、現象論的に書き下した式だと考えれば良い。

- 定数  $v_0$  は、Galilei 変換  $h \mapsto h + v_0 t$  で消せる。理論では、ふつう、はじめから省略される。このとき、変換  $h \mapsto -h$  に対して不変なので、EW 方程式は、本質的には成長過程を記述しているとは言い難い。
- EW 方程式は、 $x, t, h$  に対する並進対称性、 $x$  に対する回転・反転対称性、それに前項で述べた  $h$  の反転に対する不変性をもつ。

- EW 方程式では、スケーリング指数は以下の値をとる。これにより、EW 普遍クラスが定義される。

$$\alpha = \frac{2-d}{2}, \quad \beta = \frac{2-d}{4}, \quad z = 2. \quad (\text{EW クラス}) \quad (6)$$

- EW 方程式は線形だが、通常の界面成長では容易に非線形効果が入るため、EW クラスはあまり現実的でない。ただし、後述の KPZ クラスの過渡過程として、EW クラスの挙動が現れることが知られている [12]。
- 確率変数である  $h(x, t)$  の時間発展を考える代わりに、 $h(x)$  の、時刻  $t$  における多点分布 (確率密度)  $P[h(x); t]$  の時間発展を考えることができる。そのような式を Fokker-Planck 方程式 [14] といい、EW 方程式に対する Fokker-Planck 方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} P[h(x); t] = - \int d^d x \frac{\delta}{\delta h} (v \nabla^2 h) P[h(x); t] + \frac{D}{2} \int d^d x \frac{\delta^2}{\delta^2 h} P[h(x); t]. \quad (7)$$

汎関数微分  $\frac{\delta}{\delta h}$  は、形式的に、 $\frac{\delta}{\delta h} = \frac{\partial}{\partial h} - \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial (\nabla h)}$  という演算に相当する。

- 式 (7) の定常解は以下のとおり。

$$P_{\text{stat}}[h(x)] \propto \exp \left[ - \int d^d x \frac{v}{D} (\nabla h)^2 \right]. \quad (8)$$

1 次元 ( $d = 1$ ) のとき、式 (8) は、 $x$  を時刻、 $h$  を座標とみなしたときの Brown 運動の確率密度と一致する。すなわち、EW 方程式の (統計的な意味での) 定常解は以下で与えられる。

$$h_{\text{stat,1D}}(x) = \sqrt{AB(x)} \quad (A \equiv D/2v). \quad (9)$$

ここで、 $B(t)$  は 1 次元 Brown 運動の軌道を表し、 $\langle [B(t) - B(0)]^2 \rangle = t$  を満たす。1 次元 EW クラスの  $\alpha = 1/2$  は、Brown 運動の拡散として自然に理解できる。

#### Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) 方程式・KPZ 普遍クラス

- 以下の方程式を KPZ 方程式という。ノイズ  $\eta(x, t)$  の定義は EW 方程式と同じ [式 (5)]。  $v_0$  は消せる。

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = v_0 + v \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, t). \quad (10)$$

EW 方程式 (4) と比べると、非線形項  $\frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2$  が付け加わっている。EW 方程式 (4) を出発点とし、界面成長が界面に垂直な方向に起こるといった幾何学的な効果を取り入れることで、非線形項の存在は導出できる [9, 12]。相互作用に非線形性があっても良い。

- KPZ 方程式は、 $x, t, h$  に対する並進対称性、 $x$  に対する回転・反転対称性をもつ。EW 方程式と違い、 $h$  に対する反転対称性はない。
- 動的くりこみ群によると、より高次の項は irrelevant であり [7]、その意味で KPZ 方程式はミニマルである。
- スケーリング指数は、1 次元の場合は厳密に

$$\alpha = 1/2, \quad \beta = 1/3, \quad z = 3/2 \quad (1 \text{ 次元 KPZ クラス}) \quad (11)$$

である。2 次元以上では厳密な値は知られていない。数値的には、2 次元の場合、 $\alpha = 0.3869(4)$ 、 $\beta = 0.2398(3)$ 、 $z = 1.6131(4)$  という報告がある [13]\*<sup>6</sup>。カッコの数字は最後の桁の誤差範囲を表す。

- 以上のスケーリング指数の値により、KPZ 普遍クラスが定義される。これは、(少なくとも理論的には) 最も素朴な種類\*<sup>7</sup>の界面成長が従うと期待される普遍クラスになっている。

\*<sup>6</sup>  $\alpha$  が実測、 $\beta, z$  は後述の式 (14) と  $z = \alpha/\beta$  から算出。

\*<sup>7</sup> 具体的には、 $x, t, h$  に関する並進対称性、 $x$  に関する反転・回転対称性があり、これ以外の付加的な対称性はなく、保存則もない状況に対応する。その他、相互作用が短距離で、ゆらぎの相関も短距離短時間、かつ、ゆらぎの分散が発散するなどの異常性がない、などの条件もある。また、そもそも界面の時間発展が (領域内部の影響を実質受けずに) 界面だけで決まっているなど、暗黙のうちに前提としていることは多い。結果、KPZ クラスは実験的には必ずしも出やすいものではない。理論的には KPZ が標準的状况に対応し、ロバストなものは少し対照的である。もっとも、最近では KPZ クラスの実験例も多くなってきたので、著者自身はさほど悲観的でない。

- 変換  $v(x, t) \equiv -\lambda \nabla h(x, t)$  によって、以下の確率的 Burgers 方程式にマップする。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = \nu \nabla^2 v - \lambda \nabla \eta(x, t). \tag{12}$$

これは、ランダム外力を受けた流体のモデルとみなせる。流体としては自然なことだが、式 (12) は Galilei 変換  $v(x, t) \mapsto v_0 + v(x - v_0 t, t)$  に対する不変性をもつ。これは、界面にとっては以下の変換に対する不変性を表し、KPZ 方程式の「傾き変換に対する統計的対称性」(statistical tilt symmetry) と呼ぶ。

$$h_{\text{new}}(\mathbf{x}_{\text{new}}, t) = h(\mathbf{x}, t) + s \cdot \mathbf{x} - \frac{\lambda}{2} s^2 t, \quad \mathbf{x}_{\text{new}} = \mathbf{x} - \lambda s t. \tag{13}$$

また、記述のスケールによらず Galilei 対称性が成り立つことから、パラメータ  $\lambda$  のスケール不変性が言え、さらに下記スケール関係式が導かれる。これは、任意の次元  $d$  で成立する関係式である。

$$\alpha + z = 2. \tag{14}$$

- KPZ 方程式に対応する Fokker-Planck 方程式は次式のとおり。

$$\frac{\partial}{\partial t} P[h(\mathbf{x}), t] = - \int d^d \mathbf{x} \frac{\delta}{\delta h} \left[ \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 \right] P[h(\mathbf{x}), t] + \frac{D}{2} \int d^d \mathbf{x} \frac{\delta^2}{\delta h^2} P[h(\mathbf{x}), t]. \tag{15}$$

- 1次元系では、EW 方程式に対する Fokker-Planck 方程式 (7) の定常解 (8) が、KPZ 方程式に対する Fokker-Planck 方程式 (15) の定常解にもなっている。すなわち、式 (9) は、1次元 KPZ 方程式に対しても、(統計的な意味での) 定常解になっている。従って、1次元 KPZ では  $\alpha = 1/2$  となり、式 (14) も併せると、1次元 KPZ クラスの指数 (11) が全て決定する。2次元以上では、定常解はわかっていない。
- KPZ 方程式において Cole-Hopf 変換  $Z(x, t) \equiv \exp\left[\frac{\lambda}{2\nu} h(x, t)\right]$  をすると、形式的に<sup>\*8</sup>、以下の確率熱方程式を得る<sup>\*9</sup>。

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, t) = \nu \nabla^2 Z(x, t) + \frac{\lambda}{2\nu} Z(x, t) \text{ “}\times\text{” } \eta(x, t). \tag{16}$$

ここで、 $Z(x, t)$  “ $\times$ ”  $\eta(x, t)$  は乗算ノイズなので、積の定義を明らかにする必要がある<sup>\*10</sup>。Cole-Hopf 変換により KPZ 方程式から得られるのは、Stratonovich 積  $Z(x, t) \circ \eta(x, t)$  であるが、この項は白色ノイズ  $\eta$  に対しては発散してしまう [9]。このことは、KPZ 方程式 (10) が実は **ill-defined** であることを意味している。しかし、伊藤積  $Z(x, t)\eta(x, t)$  で定義した確率熱方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} Z(x, t) = \nu \nabla^2 Z(x, t) + \frac{\lambda}{2\nu} Z(x, t)\eta(x, t). \tag{17}$$

は well-defined であることが、少なくとも 1次元の場合は知られている。そこで、これを出発点として解  $Z(x, t)$  を求めたとき、 $h(x, t) \equiv \frac{2\nu}{\lambda} \log Z(x, t)$  を、便宜上、「KPZ 方程式の解」と呼ぶことにする。

その他の普遍クラス 界面上の粒子移動が効く場合、ノイズが系の不均一性に由来する場合 ( $\eta$  が時間に依らず、座標  $(x, h)$  に依る場合) など、他にも界面成長の文脈で考えられている普遍クラスがある。詳しくは、英語テキスト [9] や教科書 [7] などを参照のこと。

<sup>\*8</sup>  $\eta(x, t)$  がノイズであることを忘れ、通常の微分演算を行うと、という意味。

<sup>\*9</sup> 文献 [11] の笹本氏のレビューに、より詳しい記述がある。

<sup>\*10</sup>  $\eta(t)$  を白色 Gauss ノイズとし、 $\langle \eta(t) \rangle = 0, \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t-t')$  を満たすとすると、 $B(t) \equiv \int_0^t \eta(t') dt'$  は、式 (9) に現れる  $B(\cdot)$  そのものである (式 (9) 直後に定義)。  $B(t)$  を、標準 Brown 運動、または Wiener 過程という。  $dB(t) \equiv B(t+dt) - B(t) = \eta(t)dt$  を使い、確率過程  $Z(t)$  の時間変化量  $dZ(t) \equiv Z(t+dt) - Z(t)$  に対する方程式 (確率微分方程式)  $dZ(t) = F(Z(t), t)dt + G(Z(t), t) \text{ “}\times\text{” } dB(t)$  を考える。もちろん、このような式は、有限の時間刻み  $t_n = t_0 + n\Delta t$  に対して書き下してから、連続極限  $\Delta t \rightarrow 0$  をとって定義すべきであるが、その際に、 $G(Z(t), t)$  と  $dB(t)$  の時刻  $t$  の選び方によって、積  $G(Z(t), t) \text{ “}\times\text{” } dB(t)$  に様々な定義が考えられる。

$G\left(\frac{Z(t_{n+1})+Z(t_n)}{2}, t_n\right)[B(t_{n+1})-B(t_n)]$  に対し連続極限をとったものは Stratonovich 積といい、 $G(Z(t), t) \circ dB(t)$  と表記する。Stratonovich 積の利点は、通常の微分の連鎖律が有効なことだ。従って、連鎖律を使って求めた式 (16) に現れる積は Stratonovich 積である。

一方、 $G(Z(t_n), t_n)[B(t_{n+1})-B(t_n)]$  に対し連続極限をとったものは伊藤積といい、 $G(Z(t), t)dB(t)$  と表記する。伊藤積の利点は、掛けられる数である  $G(Z(t_n), t_n)$  と  $B(t_{n+1}) - B(t_n)$  が統計的に独立なことで、平均計算などが圧倒的に簡単になる。

Stratonovich 積と伊藤積の間には変換公式があり、したい計算に応じて自在に移り変われば良い。詳しくは、確率過程の教科書 [14] などを参照のこと。

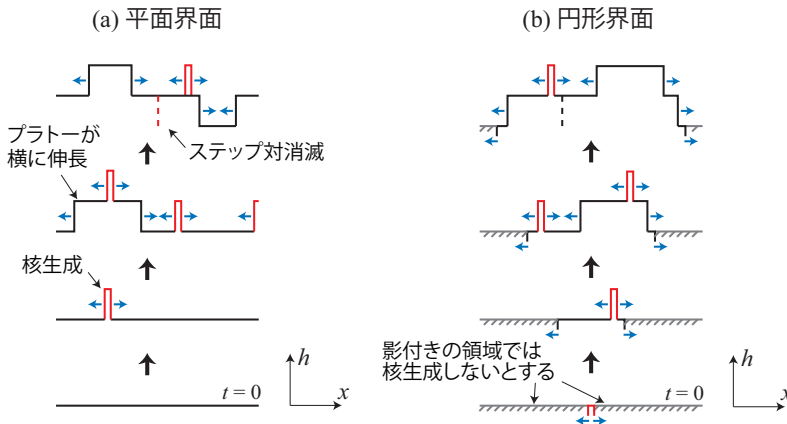


図 3: PNG モデルの時間発展の様子。領域  $|x| > t$  (b) の影付き領域) で核生成しないとすると、円形の界面が生成される。英語テキスト [9] から転載・改変。

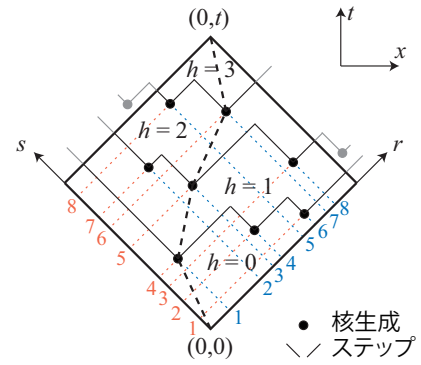


図 4: PNG 円形界面の時空間プロット。英語テキスト [9] から転載・改変。

### 3 1次元 KPZ クラスの厳密解 1：多核成長モデルを中心に、主要な結果の概要

2000年 (arXiv は 1999年)、1次元 KPZ クラスの厳密解研究の幕開けとなったのは、Johansson による完全非対称単純排他過程 (totally asymmetric simple exclusion process, TASEP) の厳密解 [15] と、その後発表された Prähofer と Spohn による多核成長 (polynuclear growth, PNG) モデルの厳密解 [16] だった。ここでは、界面成長以外の問題との繋がりが見え、また界面形状依存性の直観も育める、PNG モデルの場合を中心に解説し、1次元 KPZ クラス厳密解の主要な結果を要約することとする。以下、次元は  $d = 1$  に固定する。

#### 1次元 PNG モデルの定義

- $x, t$  は実数、 $h(x, t)$  は非負整数とする。初期条件は  $h(x, 0) = 0$  である (図 3(a) 下段)。単位時間、単位長さあたり、 $\rho$  の確率で核生成が起こる。核生成が起こると、その場所の界面高さが 1 増大する (同図 2 段目)。こうしてできた高台 (プラトー) の両端 (ステップ) は、それぞれ速さ  $v$  で遠ざかる (同図 3 段目)。ステップがぶつかると対消滅する、つまり 2 つのプラトーが融合する (同図最上段)。以上の時間発展則をまとめると、 $h(x, t + dt) = \max_{x-vdt \leq x' \leq x+vd t} h(x', t)$  となる。以下、 $\rho = 1, v = 1$  に固定する。
- 以上の初期条件、時間発展則のみで界面を生成すると、図 3(a) のように、平均的には平坦な界面ができる ( $\langle h(x, t) \rangle$  が  $x$  に依存しない)。以下、これを PNG 平面界面と呼ぶ。
- 上記の初期条件、時間発展則に加え、核生成が  $|x| \leq t$  でしか起こらないという制約を加えると、 $h(\pm t, t) = 0$  のため、丸まった界面ができる (図 3(b))。以下に述べる時空間プロットを考慮すると、 $\langle h(x, t) \rangle \approx \sqrt{2(t^2 - x^2)}$  となり、平均的な界面形状は半円であることがわかる。以下、これを PNG 円形界面と呼ぶ。

#### PNG 円形界面の厳密解

- PNG 円形界面における  $h(0, t)$  のゆらぎの性質を調べるため、時間発展を時空間プロットで表す。図 4 のように、横方向に  $x$ 、縦方向に  $t$  をとった時空間プロットを考える。核生成が  $|x| \leq t$  でしか起こらないので、時空間プロットもこの範囲で描けば十分である (図 4 の  $r$  軸  $s$  軸の内側)。また、PNG モデルでは、速さ  $v = 1$  を超える因果伝播は起こらない (「光速」が 1 である)。従って、 $h(0, t)$  に影響を及ぼせるのは、図 4 で点  $(0, t)$  から斜め  $45^\circ$  に降ろした線の内側だけである。以上をまとめると、 $h(0, t)$  を求めるために必要なのは、図 4 の太線で示した正方形の領域だけである。
- 図 4 では、核生成点 (黒点) がランダムに、単位面積あたり一定の確率で打たれている。核生成点からは、速さ  $v = 1$  で伝播するステップの対が生じるが、それは黒点から生じる斜め  $45^\circ$  の実線で表されている。界面にとっては、ステップが通過するたびに  $h$  が 1 増えるので、図 4 においても、実線を跨ぐたびに  $h$  が 1 増

えることになる。従って、次の関係が成り立つ。

$$h(0, t) = \text{点 } (0, 0) \text{ から点 } (0, t) \text{ に至るまでに通過する実線の本数 (の最小値)} \tag{18}$$

- 点 (0, 0) から出発し、上向き (45° と 135° の間) にだけ進んで、点 (0, t) に到達する経路を考える (図 4 破線)。これを、点-対-点の有向ポリマー (directed polymer) と呼ぶ。すると、次の関係が成り立つ。

$$\text{式 (18) = 両端が点 } (0, 0), (0, t) \text{ に固定された有向ポリマーが通れる核生成点の最大個数} \tag{19}$$

つまり、 $h(0, t)$  は、ランダムポテンシャル  $U(x, t) = -\sum_n \delta(x - x_n)\delta(t - t_n)$  のもとに置かれた有向ポリマーの基底状態エネルギーに対応する。

- 図 4 に示すように、核生成点の  $r$  座標、 $s$  座標を、各軸に沿った方向の順序関係によって定義する。全ての核生成点の座標を  $r$  座標の順に並べてみると、例えば図 4 の例では  $r: (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8)$ 、 $s: (4\ 7\ 5\ 2\ 8\ 1\ 3\ 6)$  となる。これは、長さが Poisson 分布 (平均  $\rho S = t^2/2$ ,  $S$  は正方形領域の面積) に従うランダム順列に他ならない。そして、有向ポリマーが上向きにしか進めないという制約は、 $r$  座標と  $s$  座標が両方増大することに対応する。結果、次の関係が成り立つ。

$$\text{式 (19) = 長さが平均 } t^2/2 \text{ の Poisson 分布に従うランダム順列の、単調増加部分列の最大長さ} \tag{20}$$

これは、組合せ論において、Ulam の問題として知られている。

- Ulam の問題は 1999 年に解かれた。結果は、 $t \rightarrow \infty$  で、以下のとおりである。

$$h(0, t) \simeq 2\sqrt{S} + S^{1/6}\chi_2 = \sqrt{2}t + (t/\sqrt{2})^{1/3}\chi_2. \tag{21}$$

ここで、 $\chi_2$  は、ランダム行列理論の GUE Tracy-Widom 分布 (次項で定義) に従う確率変数である。式 (21) 右辺の指数 1/3 は、1 次元 KPZ クラスの  $\beta = 1/3$  に対応する。

### ランダム行列理論と Tracy-Widom 分布 [17]

- 前項で唐突に現れた Tracy-Widom 分布は、Gauss 型ランダム行列の最大固有値分布として定義される。
- $M$  を  $N$  行  $N$  列の Hermite 行列とすると、実数  $a_{ij}, b_{ij}$  を用いて、対角成分は  $M_{ii} = a_{ii}$ 、非対角成分は  $M_{ij} = \tilde{M}_{ji} = a_{ij} + ib_{ij}$  と表せる。ここで、 $a_{ii}$  は平均 0 分散  $1/2$  の Gauss 分布、 $a_{ij}, b_{ij} (i < j)$  は平均 0 分散  $1/4$  の Gauss 分布に従うとすると、行列  $M$  の確率密度は  $P(M) \propto e^{-\frac{\beta}{2} \text{Tr} M^2} (\beta = 2)$  と書ける<sup>\*11</sup>。このような行列  $M$  のアンサンブルを Gaussian unitary ensemble (GUE) という。
- 同様に、実対称行列に対し  $\beta = 1$  としたものを Gaussian orthogonal ensemble (GOE)、四元数自己双対行列に対し  $\beta = 4$  としたものを Gaussian symplectic ensemble (GSE) という。
- 行列  $M$  の  $N$  個の固有値のうち、最大の固有値  $\lambda_{\max}$  は、 $N$  が大きければ、乱数  $\chi_{\text{TW},\beta}$  を使って次式のように表せる。

$$\lambda_{\max} \simeq \sqrt{2N} + 2^{-1/2}N^{-1/6}\chi_{\text{TW},\beta}. \tag{22}$$

Tracy-Widom 分布は、 $\chi_{\text{TW},\beta}$  が  $N \rightarrow \infty$  で従う分布として定義される。解析的な表現が存在するが、初等関数では書けず、Fredholm 行列式という関数空間版の行列式によって表される [17]。特殊関数論や微分方程式論で重要な、Painlevé II 方程式の解を使って表すこともできる。

- Tracy-Widom 分布の確率密度を図 5 に示す<sup>\*12</sup>。平均がゼロではなく、左右非対称なことに注意。
- 式 (21) の  $\chi_2$  は、 $\chi_{\text{TW},2}$  そのものである。

<sup>\*11</sup> ランダム行列理論における、この  $\beta$  は、界面成長のスケーリング指数  $\beta$  とは別物。どちらの文脈でも  $\beta$  が標準的に使われるため、重複してしまうが、 $\beta$  を使うことにする。幸い、混同の余地はないと思う。

<sup>\*12</sup> Tracy-Widom 分布の分布関数は、Mathematica の TracyWidomDistribution 関数が利用できるほか、Prähofer 氏と Spohn 氏の web ページ <https://www-m5.ma.tum.de/KPZ> から数値データがダウンロードできる。キュムラントの値は文献 [16] にある。



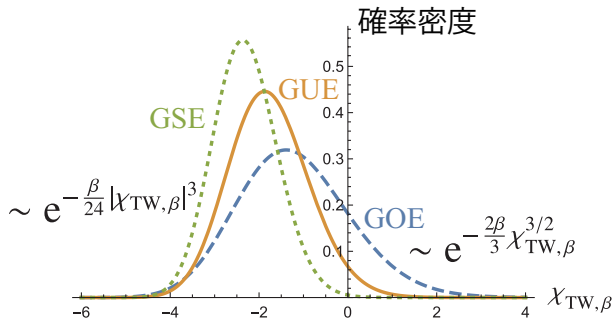


図 5: Tracy-Widom 分布。Mathematica を使って描いた。英語テキスト [9] から転載。

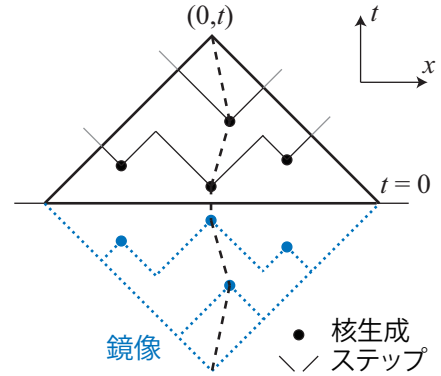


図 6: PNG 平面界面の時空間プロット。英語テキスト [9] から転載・改変。

### PNG 平面界面の厳密解

- PNG 平面界面 (図 3(a)) についても同様に、時空間プロットを考えてみる。円形界面との違いは、任意の  $x$  で核生成が起これることである。つまり、円形界面の時空間プロット (図 4) と違い、直線  $|x| = t$  ( $r$  軸  $s$  軸) は何も意味をもたない。従って、平面界面の時空間プロットにおける核生成可能領域は、図 6 のように、直線  $t = 0$  と点  $(0, t)$  で決まる三角形である。円形界面との違いはこれだけだ。
- 有向ポリマーにとっては、上端は点  $(0, t)$  で固定されているが、下端は直線  $t = 0$  上を自由に動くことができる。これを「線-対-点の有向ポリマー問題」という。
- 直線  $t = 0$  に対し鏡像を考える (図 6 点線) と、既に考えた正方形の問題に帰着する。ただし、核生成点の座標は、 $t = 0$  に対し鏡写しになっており、これが結果の分布関数を GUE Tracy-Widom から GOE Tracy-Widom に変えることが知られている。図 4 における  $h$  と  $t$  が、図 6 では  $2h$  と  $2t$  になっていることに注意すると、 $t \rightarrow \infty$  で、次の結果が得られる。

$$2h(0, t) \simeq \sqrt{2}(2t) + (2t/\sqrt{2})^{1/3} \chi_{TW,1},$$

$$\therefore h(0, t) \simeq \sqrt{2}t + (t/\sqrt{2})^{1/3} \chi_1 \quad \text{with } \chi_1 \equiv 2^{-2/3} \chi_{TW,1}. \tag{23}$$

### PNG 定常界面の厳密解

- KPZ クラスにおける定常界面問題を定義しよう。引き続き  $x$  方向に無限に大きな系を考え、界面が (統計的な意味での) 定常状態に達したとしよう。1次元 KPZ 方程式の場合、定常解は式 (9) で与えられるから、これは Brown 運動の軌道と等価である<sup>\*13</sup>。このときの界面を、改めて初期条件  $h(x, 0)$  とみなし、原点を  $h(0, 0) = 0$  で定める (図 7(a))。そこから成長する界面の高さ  $h(0, t)$  は、どのような分布に従うだろうか。定常状態を考えているので、 $t = 0$  を含む任意の時刻で、界面形状は式 (9) の Brown 運動と等価だが、異なる時刻の界面形状は相関しているため、 $h(0, t)$  の統計的性質は非自明である。
- PNG モデルで、この定常界面問題を考えてみる。その準備として、図 7(b) に示す、境界核生成付の問題を考えよう。PNG 円形界面で考えた時空間プロット (図 4) を基本とするが、バルクの核生成に加え、 $r$  軸と  $s$  軸で、それぞれ (時空間プロット上の) 単位長さあたり  $p_+, p_-$  の確率で核生成が起こるものとする。このとき、点-対-点の有向ポリマー問題を考えてみよう。ポリマーは、できるだけ多くの核生成点を通ろうとする。もし、境界上の核生成率  $p_{\pm}$  が十分大きければ、バルクに出るより境界に留まった方が得になる。ただし、境界に居すぎると、バルクで核生成点を収集することができなくなる。そこで、境界上に長さ  $\ell$  だけ居たのち

<sup>\*13</sup> 1次元 KPZ クラスに属する、KPZ 方程式以外の系では、短距離の構造まで Brown 運動である必要はないが、長距離ではやはり式 (9) のような形状をとることが強く期待される。

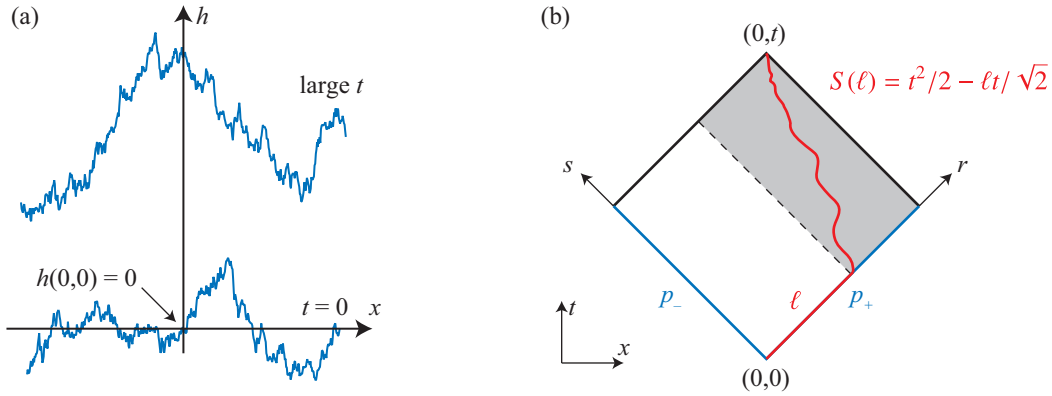


図 7: (a) KPZ クラス定常界面の問題設定。(b) PNG 定常界面と関係する、バルクと境界の両方で核生成が起こる問題 (本文参照) の概略図。英語テキスト [9] から転載・改変。

に、バルクに飛び出すとしてみよう (図 7(b))。このとき、バルク側で探索できる面積は  $S(\ell) = t^2/2 - \ell t/\sqrt{2}$  である。左右の境界、バルクで稼ぐ核生成点の数を、それぞれ  $h_{\pm}(\ell), h_{\text{bulk}}(\ell)$  とすると、

$$h_{\text{bulk}}(\ell) \simeq 2\sqrt{S(\ell)} + S(\ell)^{1/6}\chi_2, \quad h_{\pm}(\ell) \simeq (p_{\pm}\ell) + (p_{\pm}\ell)^{1/2}\chi_G, \quad (24)$$

である。ここで、 $S(\ell) = t^2/2 - \ell t/\sqrt{2}$  は、図 7(b) 灰色の領域の面積であり、 $\chi_G$  は正規分布に従う確率変数だ。すると、界面高さ、すなわちポリマーが通れる核生成点の最大個数は

$$h = \max_{\ell, \pm} (h_{\text{bulk}}(\ell) + h_{\pm}(\ell)) \quad (25)$$

となる。 $h_{\text{bulk}}(\ell) + h_{\pm}(\ell)$  を最大にする  $\ell = \ell_{\text{max}}$  は、式 (24) で  $t$  に比例する主要項を比較すれば求まり、 $\ell_{\text{max}} = (t/\sqrt{2})(1 - 1/p_{\pm}^2)$  である。このことから、 $p_{\pm} > 1$  ならポリマーは境界に正の距離  $\ell_{\text{max}}$  だけ滞在し、 $p_{\pm} < 1$  なら原点から直ちにバルクに入ることがわかる。 $p_{\pm} = 1$  が転移点だ。

- $p_+ \geq p_-$  としても一般性を失わない。このとき、以下のように分類できる。
  1.  $p_- \leq p_+ < 1$  のとき、ポリマーはバルクのみ滞るため、 $h(0, t)$  は GUE Tracy-Widom 分布を示す。
  2.  $p_+ > 1$  かつ  $p_+ \neq p_-$  のとき、ポリマーは境界に正の距離  $\ell_{\text{max}}$  滞り、バルクに入る。このとき、 $h$  のゆらぎには  $h_{\text{bulk}}(\ell_{\text{max}})$  の寄与と  $h_+(\ell_{\text{max}})$  の寄与が混在するが、前者は  $S(\ell_{\text{max}})^{1/6} \propto t^{1/3}$  に比例し、後者は  $\ell_{\text{max}}^{1/2} \propto t^{1/2}$  に比例するため、境界の効果が支配的となる。すなわち、 $h(0, t)$  は Gauss 分布を示す。
  3.  $p_+ = p_- > 1$  のとき、ケース 2 と同様に境界が支配的となるが、ポリマーは  $r$  軸を通る場合と  $s$  軸を通る場合を比較して、より核生成点の数を稼げる方を選ぶことができる。すなわち、 $h(0, t)$  のゆらぎの分布関数は、2 つの独立な Gauss 乱数の最大値の分布関数と一致する。これを (Gaussian)<sup>2</sup> 分布と呼ぶ。
  4.  $p_+ = 1$  かつ  $p_- < 1$  のとき、臨界的のため、非自明な分布関数が出る。この場合は、(GOE Tracy-Widom)<sup>2</sup> 分布になることが知られている [16, 18]。
  5.  $p_+ = p_- = 1$  のとき、臨界的。この場合は、ランダム行列理論では知られていなかった新たな分布関数が出るし、Baik-Rains 分布と呼ばれている [16, 18]<sup>\*14</sup>。
- 今度は、PNG モデルの定常状態がどのような状態かを考えてみよう。定常状態では、ステップは、ある密度で無数に存在している。右肩上がりのステップ密度を  $\rho_{\uparrow}$ 、右肩下がりのそれを  $\rho_{\downarrow}$  とする ( $\rho_{\uparrow} = \rho_{\downarrow}$ )。定常状態では、ステップの生成と対消滅が釣り合っている。微小な長さ  $dx$  の領域内で、微小な時間  $dt$  の間にステップが生じる (核生成が起こる) 確率は  $\rho dx dt$  であり、この領域・時間内にステップが対消滅する ( $\downarrow$  が  $\uparrow$  と出会う) 確率は  $(\rho_{\downarrow} dx)(\rho_{\uparrow} 2v dt)$  で与えられる。これらが等しいことから、 $\rho_{\uparrow}\rho_{\downarrow} = \rho/2v = 1/2$ 、すなわち  $\rho_{\uparrow} = \rho_{\downarrow} = 1/\sqrt{2}$  を得る。

<sup>\*14</sup> 定義は英語テキスト [9]、および、そこで引用されている原著論文を参照。分布関数の形は文献 [16] を参照。数値データも、脚注 \*12 で紹介した web ページから手に入る。

表 1: 1次元 KPZ クラスの 3 つの代表的サブクラス [9]

	円形サブクラス	平面サブクラス	定常サブクラス
標準的な初期条件	$h(x, 0) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ -\infty & (x \neq 0) \end{cases}$	$h(x, 0) = 0$	$h(x, 0) = \sqrt{A}B(x)$
スケーリング指数	サブクラスに依らず、 $\alpha = 1/2, \beta = 1/3, z = 3/2$		
分布関数 $(\langle \chi_i \rangle, \langle \chi_i^2 \rangle_c, \text{Sk}(\chi_i), \text{Ku}(\chi_i))^a$	GUE Tracy-Widom ( $\chi_2$ ) (-1.77, 0.813, 0.224, 0.093)	GOE Tracy-Widom ( $\chi_1$ ) (-0.760, 0.638, 0.293, 0.165)	Baik-Rains ( $\chi_0$ ) (0, 1.15, 0.359, 0.289)
空間構造 <sup>b</sup> (空間相関) 2時刻相関 <sup>c</sup>	Airy <sub>2</sub> 過程 持続的	Airy <sub>1</sub> 過程 減衰	Airy <sub>stat</sub> 過程 持続的

<sup>a</sup>  $\langle \chi_i^n \rangle_c$  は  $\chi_i$  の  $n$  次キュムラントを表す。  $\text{Sk}(\chi_i) \equiv \langle \chi_i^3 \rangle_c / \langle \chi_i^2 \rangle_c^{3/2}$  は歪度、  $\text{Ku}(\chi_i) \equiv \langle \chi_i^4 \rangle_c / \langle \chi_i^2 \rangle_c^2$  は尖度である。キュムラントの値は文献 [16] から転載 (桁数を減らした)。

<sup>b</sup> 式 (9) で定常状態界面を Brown 運動と対応付けたように、円形界面や平面界面で、適切にリスケールした座標系を使って  $t \rightarrow \infty$  での界面形状を確率過程として表したものが Airy<sub>2</sub>, Airy<sub>1</sub> 過程である [9, 19]。Fredholm 行列式を使った解析表現が得られている。定常界面に対しては、少し異なる方法で確率過程と対応させ、Airy<sub>stat</sub> 過程が定義されている [9, 19]。

<sup>c</sup> 2時刻相関関数  $C_t(t_1, t_2) \equiv \langle \delta h(x, t_1) \delta h(x, t_2) \rangle$  において、 $t_1$  を固定し  $t_2 \rightarrow \infty$  としたとき、平面界面では相関が減衰する、すなわち  $C_t(t_1, t_2 \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  となるのに対して、円形・定常界面では  $C_t(t_1, t_2 \rightarrow \infty) > 0$  のままとなる (持続的時間相関) [9, 20, 23, 24]。

- 上で考えた境界上核生成付きの時空間プロットの問題と、PNG 定常状態との関係を考えてみよう。ステップが無数に存在する定常状態の様子を図 4 のような時空間プロットで描いてみると、 $r$  軸  $s$  軸の下側の領域 ( $t < 0$  を含む) にも無数に核生成点が存在していて、ステップを表す実線が行き交っている状況に相当する。逆に、それ以外は円形界面の場合と同じで、図 4 のような正方形の領域内でのポリマー問題を考えれば良い。領域外で起こる核生成の影響は、 $r$  軸や  $s$  軸と交差してステップが入ってくることであり、これらは、 $r$  軸・ $s$  軸で境界上の核生成がある状況と等価である。ただし、境界上の核生成率  $p_+, p_-$  は、定常状態のステップ密度と一致してはいなくてはならない。 $\rho_{\uparrow} = \rho_{\downarrow} = 1/\sqrt{2}$  は  $x$  軸上で測った密度であることに注意し、これを  $r$  軸  $s$  軸上の密度に換算すると、 $p_+ = p_- = 1$  を得る。これは境界上核生成付きの時空間プロット問題における臨界的な状況であり、従って Baik-Rains 分布が現れる。具体的には、PNG 定常界面の  $h(0, t)$  は次式で与えられる。

$$h(0, t) \simeq \sqrt{2}t + (t/\sqrt{2})^{1/3}\chi_0. \tag{26}$$

ここで、 $\chi_0$  は Baik-Rains 分布に従う確率変数である (脚注\*14 参照)。

### 1次元 KPZ クラスの普遍ゆらぎ

- PNG モデルの結果から示唆されるように、1次元 KPZ クラスの界面ゆらぎは、界面形状 (あるいは初期条件) によって異なる分布関数や相関関数を示す (表 1) \*15。一点分布については、次式で表される。

$$h(0, t) \simeq v_{\infty}t + (\Gamma t)^{1/3}\chi_i + O(t^0). \tag{27}$$

ここで、 $v_{\infty}, \Gamma$  は定数パラメータであり、界面形状に依存しない。確率変数  $\chi_i$  は、円形界面では  $\chi_2$ 、平面界面では  $\chi_1$ 、定常界面では  $\chi_0$  である (表 1)。界面形状の大域的な特徴が同じならば、現れる分布関数・相関関数は普遍的であり、系の詳細によらない。また、スケーリング指数  $\alpha, \beta, z$  の値は、界面形状に依らず、1次元 KPZ クラスの値 [式 (11)] のままである。

- スケーリング指数だけでなく、分布関数・相関関数も同じ界面の集まりを「普遍サブクラス」と呼ぶことにする。円形サブクラス、平面サブクラス、定常サブクラスは、1次元 KPZ クラスを構成する代表的なサブクラスである (表 1)。標語的には、「KPZ クラスは、複数のサブクラスからなる内部構造をもつ」と言える。
- 1次元 KPZ クラスで厳密に解かれたモデルは、PNG モデルのほか、既に言及した TASEP や KPZ 方程式など、様々である。これらが解けたのは、ある種の可積分性のおかげであり \*16、「確率的可積分性」と言われ

\*15 円形界面は、時間が経つとどんどん平らになっていくので、 $t \rightarrow \infty$  では円形界面と平面界面の違いがなくなりそうだが、これは正しくない (だから面白い)。表 1 でまとめたように、円形界面と平面界面のゆらぎは、 $t \rightarrow \infty$  でも明確に異なる統計的性質を示す。

\*16 その意味で、KPZ クラス全体の中では、特殊なモデルの集まりと言うこともできる。

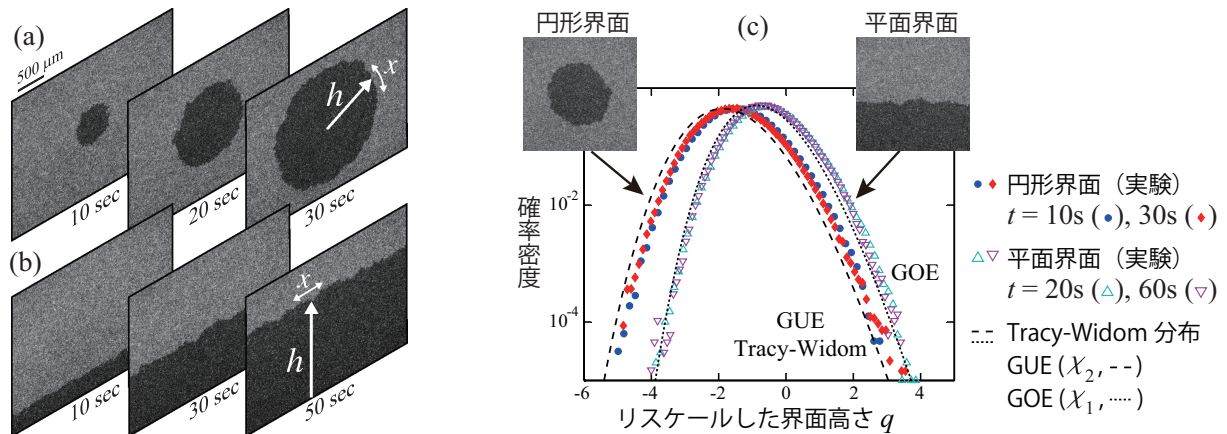


図 8: 液晶電気対流で見られる位相欠陥乱流の成長過程 (a)(b) と、界面高さのゆらぎ分布の測定結果 (c)。文献 [20](J. Stat. Phys.) から ([21] を経て) 転載・改変。

る。確率的可積分性は、量子可積分性と一定の関係があり、Bethe 仮説などが活躍する。数理的には、可解構造の更なる理解を目指し、様々な可解モデルを包含するような一般的モデルの追求が盛んだ (文献 [22] の図 1 など参照)。

- 表 1 に示す KPZ のサブクラス構造は、著者らによる、液晶乱流の界面成長実験 [9, 20] で実証された。このことから、表 1 の結果自体は可積分性の有無に依らず、1 次元 KPZ クラスで一般に成り立つ強い普遍性をもつと考えられる。

#### 4 液晶乱流を使った実験検証

前節では、PNG モデルで得られた厳密解の結果を解説し、それが普遍性をもつことを紹介した。一方で、厳密に解けるモデルは、確率的可積分性と呼ばれる、ある種の可積分性をもつ特殊なモデルであることも述べた。可積分モデルで得られた厳密な結果が非可積分な系でも本当に現れるのか、解けないのだから、実際に測って見ないとわからない。そこで本節では、著者らが行った液晶乱流系の実験結果 [20] を紹介する。

- 実験は、ネマチック液晶の電気対流という現象を使う。詳細は原著論文 [20] をご覧いただきたいが、平行に設置された 2 枚の透明電極板の間にネマチック液晶を封入し、交流電圧を印可する。ある種のネマチック液晶では、10V 程度の電圧で対流が発生する。電圧を上げていくと、様々な対流パターンを経て、やがて乱流状態に至る<sup>\*17</sup>。
- 乱流状態には、液晶配向の位相欠陥が大量に発生した状態と、位相欠陥が殆どない状態の 2 種類が存在する<sup>\*18</sup>。十分高い電圧では、位相欠陥のない乱流状態が準安定、位相欠陥乱流が安定のため、位相欠陥のない乱流中に位相欠陥乱流を生成すると、位相欠陥乱流領域の成長過程が観察できる (図 8(a))。この成長過程は、乱流によるゆらぎを伴っており、成長領域の界面は時間とともに凸凹になっていく。
- 著者らの実験 [20] では、液晶乱流中に紫外パルスレーザーを照射することで、位相欠陥乱流を生成した。レーザーを 1 点に打てば、成長は点から始まり、円形の界面ができる (図 8(a))。レーザーを線状に打てば、成長は直線から始まり、平坦な界面ができる (図 8(b))。すなわち、KPZ クラスのスケール指数の検証だけでなく、厳密解研究で明らかになった、KPZ 普遍ゆらぎの界面形状依存性、サブクラス構造の存在を検証することができる。

<sup>\*17</sup> ここでは、時間的・空間的に乱れている、程度の意味で乱流という言葉を使う。流体力学でいうところの発達乱流とは異なり、ゆらぎは短距離・短時間の相関しか持たず、非線形科学の立場からは時空カオスといった方が正確な現象である。

<sup>\*18</sup> 電気対流研究では、位相欠陥が (ほぼ) ない乱流には「動的散乱モード 1」(dynamic scattering mode 1, DSM1) 位相欠陥乱流には「動的散乱モード 2」(DSM2) という名前がついている。

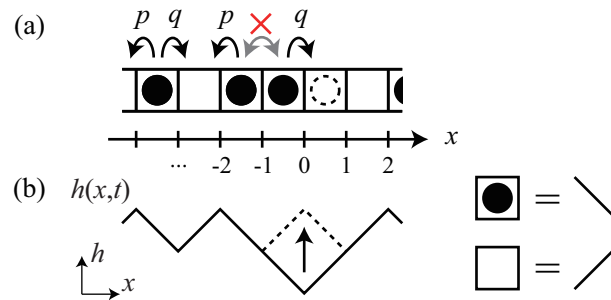


図 9: ASEP の定義 (a) と界面成長問題との対応関係 (b)。英語テキスト [9] から転載。

- 著者らは円形界面、平面界面を 1000 回前後生成し、界面高さ  $h$  の統計的性質を解析した。 $h$  軸は、円形界面の場合は動径方向、平面界面の場合は高さ方向にとる (図 8(a)(b))。測定で得た  $h(x,t)$  から、Family-Vicsek スケーリング (1) でスケーリング指数  $\alpha, \beta$  を決定すると、円形界面、平面界面いずれの場合も、1 次元 KPZ クラスの値  $\alpha = 1/2, \beta = 1/3$  と一致した [20]。従って、この実験系の液晶乱流界面成長は 1 次元 KPZ クラスに属している。
- $\beta = 1/3$  より、界面高さ  $h$  は時刻  $t$  に式 (27) のように依存する。そこで、リスケールした界面高さ  $q \equiv (h - v_\infty t) / (\Gamma t)^{1/3}$  を定義し、ヒストグラムを作成したところ、図 8(c) の結果が得られた。定数パラメータ  $v_\infty, \Gamma$  は予め決定している [9] のでフィッティングパラメータはないが、実験結果は円形と平面で異なる分布関数を示し、それぞれ GUE Tracy-Widom 分布、GOE Tracy-Widom 分布と非常に近いことがわかる。よく見ると横方向に少しずれているが、ずれは  $t^{-1/3}$  に比例して減少し<sup>\*19</sup>、 $t \rightarrow \infty$  極限ではずれはゼロになる [20]。従って、この (ほぼ間違いなく非可積分な) 実験系でも、円形界面は GUE Tracy-Widom 分布、平面界面は GOE Tracy-Widom 分布を示す。これらが 1 次元 KPZ クラスの普遍的性質であり、特にサブクラス構造が実在することが確かめられたのだ。本稿では割愛するが、液晶実験では空間相関や時間相関も計測し、表 1 にまとめた円形サブクラス・平面サブクラスの特徴を確認している<sup>\*20</sup>。

## 5 1 次元 KPZ クラスの厳密解 2 : ASEP と KPZ 方程式についての概略

既に述べたように、1 次元 KPZ クラスでは、PNG モデル以外に様々なモデルが厳密に解かれている。中でも代表的なのが、ASEP と KPZ 方程式である。本節では、これらの厳密解研究の文献を読む際に知っておくべき「翻訳関係」を理解することを目標に、きわめて表層的ではあるが、概略を紹介する。詳細は、英語テキスト [9] ほか、各種レビュー等を参照されたい。

### ASEP

- ASEP (asymmetric simple exclusion process、非対称単純排他過程) は確率的な粒子輸送のモデルであり、KPZ クラスの厳密解研究の前から、様々な性質が厳密に解ける非平衡模型として注目されてきた [25]。
- ASEP は以下のように定義される (図 9(a) 参照)。1 次元格子を考え、各サイトは粒子がいるかないかのどちらかである。各粒子は、右隣のサイトには単位時間あたり  $q$  の確率で、左隣のサイトには単位時間あたり  $p (< q)$  の確率で飛び移る (ホップする)。ただし、既に粒子が入っているサイトにはホップすることはできない。 $q > p$  なので、粒子は平均的には右向きに流れることになる。
- ASEP は、single step モデルという界面成長のモデルにマップすることができる。図 9(b) 右に示すように、粒子が入ったサイトを下り坂、空のサイトを上り坂に対応させてみよう。すると、図 9(a) の状態は図 9(b) の界面に対応する。そして、粒子が右隣にホップすることは、その位置の界面が上向きに成長することに対

\*19 このずれは式 (27) の  $O(t^0)$  項によるものである。

\*20 時間相関の結果は、厳密解や理論より先に実験的に円形と平面の違いを報告していた [20]。

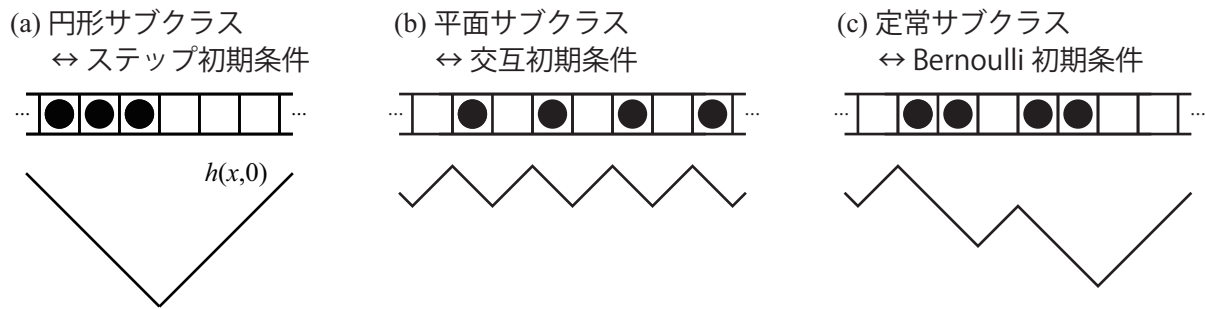


図 10: 3 つのサブクラスと ASEP 初期条件との対応。英語テキスト [9] から転載・改変。

応する (図 9(a)(b) の破線)。従って、界面高さの変化  $h(x, t) - h(x, 0)$  は、位置  $x$  を右向きに通過した粒子の総数に等しい (左向きに通過した粒子は  $-1$  個と数える)。これは、局所的に測ったカレントの時間積分であり、輸送現象の重要な指標である。界面成長としては、局所的相互作用を伴う確率的な成長現象であることから想像つくように、ASEP は 1 次元 KPZ クラスに属する。なお、ASEP と KPZ との関係については、笹本氏による日本語解説 [26] がある。

- 特に  $p = 0$  のとき (粒子は右にしか進まない) を TASEP (totally asymmetric...) という。TASEP では、左の粒子は右の粒子に一切影響を及ぼさなくなるので、理論的な取り扱いがし易くなる<sup>\*21</sup>。
- Johansson は 2000 年、TASEP のステップ初期条件に対して、高さ分布の厳密解を導出した [15]。ステップ初期条件とは、図 10(a) のように、 $x < 0$  の全サイトに粒子がいて、 $x > 0$  には粒子がない初期条件である。界面としては、図 10(a) 下部に示したように、V 字型の初期形状であり、そこから U のように丸みを帯びた界面が成長する。これは円形サブクラスに対応する<sup>\*22</sup>。Johansson は、この場合の高さ分布が GUE Tracy-Widom 分布に従うことを証明した。
- TASEP は、PNG モデルと並んで、1 次元 KPZ クラスの様々な性質を厳密に求めるのに使われる標準モデルの 1 つとなった。Johansson の 2000 年の厳密解はステップ初期条件 = 円形サブクラスの場合だが、平面サブクラス、定常サブクラスに関しても様々な計算が可能である。平面サブクラスは、占有サイトと空のサイトが交互に繰り返される交互 (alternating) 初期条件 (図 10(b))、定常サブクラスは、各サイトに独立・一定の確率で粒子が入っている Bernoulli 初期条件<sup>\*23</sup> (図 10(c)) を使う。
- $p \neq 0$  の ASEP は TASEP と比べ遥かに難しい (脚注\*21 参照)。しかし、ステップ初期条件については、Bethe 仮説の一種 (coordinate Bethe ansatz) によって Tracy と Widom が厳密解を導出し [27]、Bernoulli 初期条件については、一種の 6-vertex モデルとの対応関係を使って厳密解が導出された [28]。
- ASEP を記述するマスター方程式は、(非対称) XXZ スピン鎖の Schrödinger 方程式と対応する [26]。XXZ スピン鎖は量子可積分系として知られ、Bethe 仮説などで様々な厳密な性質が知られている。これは、先に言及した、確率模型 (ASEP) の確率可積分性と、量子模型の量子可積分性との関係の一例である。

#### KPZ 方程式

- KPZ 方程式 (10) の 1 次元版は、2010 年に初めて、厳密解が (4 つのグループから独立に) 報告された [29–32]。解かれたのは円形サブクラスの場合で、対応する初期条件は以下のとおり (narrow wedge 初期条件と呼ばれる)。

$$h(x, 0) = - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{\delta} = \begin{cases} 0 & (x = 0), \\ -\infty & (x \neq 0), \end{cases} \quad Z(x, 0) = \exp \left[ \frac{\lambda}{2\nu} h(x, 0) \right] \propto \delta(x). \quad (28)$$

<sup>\*21</sup> 理論的には、TASEP は free fermion の問題に帰着できるが、 $p \neq 0$  の ASEP ではそうはいかない。

<sup>\*22</sup> PNG 円形界面 (図 3(b)) と ASEP 円形界面は、界面曲率の符号が逆に見えるが、どちらも  $x = 0$  の一点から時間発展が始まり、時間とともに状態変化の起こりうる領域が広がっていく (PNG では  $|x| \leq t$ ) という意味で同じ状況に対応する。

<sup>\*23</sup> 界面に大域的な傾きをつけない場合は、各サイト  $1/2$  の確率で粒子を入れるか入れないか決めれば良い。

最終結果は(当然)同じだが、使われた手法は以下の2つに分けられる。

- ASEPの弱非対称極限を使う方法 [29, 30]。ASEPにおいて、 $q-p = a\sqrt{\varepsilon}$ ,  $q+p = 1$  とし ( $\varepsilon \ll 1, a > 0$ )、ASEPの界面高さ(図9の対応関係を使う)を  $h_{\text{ASEP}}^\varepsilon(x, t)$  とすると、 $\sqrt{\varepsilon}h_{\text{ASEP}}^\varepsilon([\varepsilon^{-1}x], \varepsilon^{-2}t)$  は KPZ 方程式の高さ関数  $h_{\text{KPZ}}(x, t)$  に(定数シフトを除いて)収束することが知られており、それを使って厳密解を導く。rigorous かつ exact な方法<sup>\*24</sup>。
- レプリカ Bethe 仮説を使う方法 [31, 32]。KPZ 方程式と、量子可積分系である Lieb-Liniger モデルとの対応関係を使う。non-rigorous (数学的に正当化できない計算をしてしまう)だが exact な方法。

現在では、KPZの可解構造の理解が進み、他にも様々な解法が確立されている(文献 [33] に要領よくまとめられている)が、以下では、初期条件や計算量に関する汎用性がより高く、量子多体系との関係も見ることができ、レプリカ Bethe 仮説を使う方法について概略を紹介する。

- 実は、1次元 KPZ 方程式は、変数変換

$$x \mapsto \frac{(2\nu)^3}{D\lambda^2}x, \quad t \mapsto \frac{(2\nu)^5}{D^2\lambda^4}t, \quad h \mapsto \frac{2\nu}{\lambda}h. \quad (29)$$

によって、パラメータなしの KPZ 方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \eta(x, t), \quad \langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = \delta(x-x') \delta(t-t') \quad (30)$$

にできる。すなわち、パラメータを  $\nu = 1/2, \lambda = D = 1$  としても一般性を失わない。新たに定義した  $x, t, h$  は無次元量である。以下、表記を簡便にするため、無次元化した KPZ 方程式 (30) に対して話を進める。対応する確率熱方程式は

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + Z(x, t) \eta(x, t) \quad (31)$$

であり、 $Z(x, t) = e^{h(x, t)}$  で結ばれる。

- 都合上、白色ノイズ  $\eta(x, t)$  の代わりに、長さ  $\kappa$  程度の範囲で相関をもった Gauss ノイズ  $\eta_\kappa(x, t)$  を考えよう。平均と共分散は次式で与えられる。

$$\langle \eta_\kappa(x, t) \rangle = 0, \quad \langle \eta_\kappa(x, t) \eta_\kappa(x', t') \rangle = \Delta_\kappa(x-x') \delta(t-t'), \quad (32)$$

$\Delta_\kappa(x)$  は、 $\kappa$  程度の距離で減衰し、 $\kappa \rightarrow 0$  で  $\delta$  関数に収束する関数なら何でもよい<sup>\*25</sup>。元の KPZ 方程式は  $\kappa \rightarrow 0$  極限に対応する。式 (31) の  $\eta(x, t)$  を  $\eta_\kappa(x, t)$  で置き換え、伊藤積と Stratonovich 積の変換公式 [14] を使うと、次式を得る<sup>\*26</sup>。

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \eta(x, t) \circ Z(x, t) - \frac{1}{2} \Delta_\kappa(0) Z(x, t) \quad (33)$$

- 式 (33) は Schrödinger 方程式と同じ形をしているため、解  $Z(x, t)$  は Feynman 経路積分で書くことができる

<sup>\*24</sup> rigorous も exact も日本語では「厳密」と訳されるが、rigorous は数学的な論証が厳密なのに対し、exact は値が完璧に一致することを意味しており、区別すべきである。

<sup>\*25</sup> 例えば  $\Delta_\kappa(x) \equiv \frac{1}{\kappa\sqrt{\pi}} e^{-(x/\kappa)^2}$  とすればよい。

<sup>\*26</sup> 式 (33) から、Stratonovich 積を使う限り  $\kappa \rightarrow 0$  極限を取れないことが明らかである。

(Feynman-Kac 公式 <sup>\*27</sup>[34]) 結果、次式が得られる。

$$Z(x, t) = \int dx_0 Z(x_0, 0) \int_{B(0)=x_0}^{B(t)=x} \mathcal{D}B(\tau) e^{-E_{\text{DP}}[B(\tau)]}, \quad E_{\text{DP}}[B(\tau)] = \int_0^t d\tau \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dB}{d\tau} \right)^2 - \eta_\kappa(B(\tau), \tau) + \frac{1}{2} \Delta_\kappa(0) \right]. \tag{36}$$

ここで、経路  $B(\tau)$  の両端は  $B(0) = x_0, B(t) = x$  に固定されているが、端点  $x_0$  は初期密度  $\propto Z(x, 0) = e^{h(x,0)}$  に従って分布している。興味深いことに、式 (36) は、単位長さあたり  $\frac{1}{2} \left( \frac{dB}{d\tau} \right)^2$  の弾性エネルギーをもち、ランダムポテンシャル  $-\eta_\kappa(x, t)$  の下に置かれた、有向ポリマー  $B(\tau)$  の分配関数と解釈できる <sup>\*28</sup>。すると、界面高さ  $h(x, t) = \log Z(x, t)$  は、有向ポリマーの自由エネルギー（の符号を反転させたもの）だ。さらに、円形サブクラス narrow wedge 初期条件 [式 (28)] では、 $Z(x, 0) \propto \delta(x)$  のためポリマー起点が  $(x, \tau) = (0, 0)$  に固定され、点-対-点の有向ポリマー問題になる。平面初期条件  $h(x, 0) = 0$  では、 $Z(x, 0) = \text{const.}$  のためポリマー起点が直線  $\tau = 0$  上に一様分布し、線-対-点の有向ポリマー問題になる。このあたりの対応は PNG モデルの場合と同じである。

- $h(x, t)$  のゆらぎ分布と関係が深い量として、 $Z(x, t)$  のモーメント  $\langle Z(x_1, t)Z(x_2, t) \cdots Z(x_N, t) \rangle$  を考えてみよう。これは、 $Z(x, t)$  のレプリカ  $N$  個が、同じランダムポテンシャル  $-\eta_\kappa(x, t)$  の下に置かれている状況に相当する。そこで、式 (36) を代入して、アンサンブル平均、すなわち確率密度  $\eta_\kappa(x, t)$  に対する期待値計算を泥臭く実行すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \langle Z(x_1, t)Z(x_2, t) \cdots Z(x_N, t) \rangle \\ & \propto \int \left( \prod_n dx_{n0} Z(x_{n0}, 0) \right) \int_{x_n(0)=x_{n0}}^{x_n(t)=x_n} \left( \prod_n \mathcal{D}x_n(\tau) \right) \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \left[ \frac{1}{2} \sum_n \left( \frac{dx_n}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \Delta_\kappa(x_n - x_m) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{37}$$

複雑だが、これは Feynman-Kac 公式（の多次元版）の経路積分側の形をしているので、対応する偏微分方程式として、次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = -\hat{H}_\kappa \Psi(\mathbf{x}, t), \quad \hat{H}_\kappa \equiv -\frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \Delta_\kappa(x_n - x_m). \tag{38}$$

ここで、 $\mathbf{x} \equiv (x_1, \dots, x_N), \Psi(\mathbf{x}, t) \equiv \langle Z(x_1, t)Z(x_2, t) \cdots Z(x_N, t) \rangle$  であり、式 (38) は、 $N$  個の Bose 粒子からなる量子多体系の Schrödinger 方程式と見ることができる。

- KPZ 方程式は  $\kappa \rightarrow 0$  極限に対応していた。これを式 (38) でとると、ハミルトニアンは次式になる。

$$\hat{H}_{\text{LL}} = -\frac{1}{2} \sum_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \delta(x_n - x_m) \tag{39}$$

これは、量子可積分系としてよく知られる Lieb-Liniger モデル [35] の引力版である。KPZ 方程式は、Lieb-Liniger モデルという一見全く違う問題の物理と関係があったのだ！

<sup>\*27</sup> Feynman-Kac 公式 [34] によると、偏微分方程式

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = v \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + U(x, t)Z(x, t), \quad Z(x, 0) = \delta(x - x_0) \tag{34}$$

の解は、経路積分を使って

$$Z(x, t) = \int_{B(0)=x_0}^{B(t)=x} \mathcal{D}B(\tau) \exp \left\{ - \int_0^t d\tau \left[ \frac{1}{4v} \left( \frac{dB}{d\tau} \right)^2 - U(B(\tau), \tau) \right] \right\}, \tag{35}$$

のように表される。ここで、経路  $B(\tau)$  の両端は  $B(0) = x_0, B(t) = x$  に固定されている。  $U(x, t) = 0$  のとき、式 (34) は単なる拡散方程式で、式 (35) は Brown 運動の確率測度と一致する、つまり  $B(\tau)$  は Brown 運動とみなせるが、これは Brown 運動する粒子の集まりが拡散を示すことを考えれば自然な結果である。  $U(x, t) \neq 0$  のときは、それにより生じる統計的重みが  $Z(x, t)$  に加わると解釈すれば、式 (35) は自然な形をしている。

<sup>\*28</sup> PNG モデルの場合 [式 (19)] は、界面高さ  $h$  は有向ポリマーの基底状態エネルギーに対応していたので、いわば温度が絶対零度の状況だった。KPZ 方程式の場合は有限温度の有効ポリマー問題と結びつき、界面高さ  $h = \log Z$  は自由エネルギーに対応する。



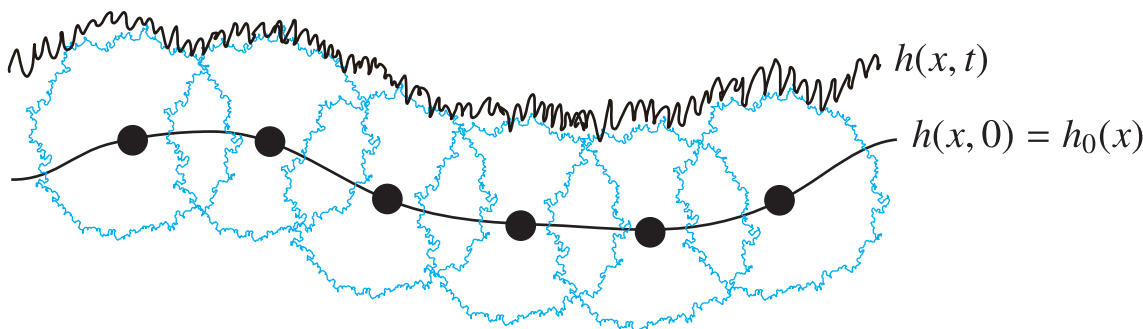


図 11: KPZ 変分公式の図解。初期条件  $h(x, 0) = h_0(x)$  から生じる界面  $h(x, t)$  は、初期条件上の各点を点源だと思ったときの円形界面の包絡線と、一点分布が一致する。

- Lieb-Liniger は量子可積分系なので、Bethe 仮説を使って様々な計算を実行することができる。計算の過程で、エネルギーに  $N^3$  で発散してしまう項が現れ、この扱いが数学的に rigorous にできないのだが、物理の範疇では計算を進めることができる。そして、例えば円形サブクラスの場合  $h(x, t)$  については、きちんと GUE Tracy-Widom 分布が求められる [31, 32]。平面サブクラスの場合 [36]、定常サブクラスの場合 [37] も計算ができ、それぞれ表 1 に示したような分布関数が得られている。現在は、KPZ 方程式には rigorous な様々な解法がある [33] が、non-rigorous なレプリカ Bethe 仮説法は今も汎用性の高い計算手法として役立っている。

## 6 展望

- 1次元 KPZ クラスの厳密解研究は表 1 に挙げた 3つの標準的初期条件を軸に進められてきたが、一般の初期条件に対する普遍ゆらぎの性質を求め、分類して、サブクラス構造の理解を深めることは重要だろう。これに関しては、近年、「KPZ 変分公式」と呼ばれる、一般の初期条件を扱える公式が提案され [19]、進展があった。KPZ 変分公式の正確な説明は文献 [19] に譲るが、直感的には、実は波動の伝搬に関する Huygens の原理とよく似た公式である (図 11)。任意の初期条件  $h(x, 0) = h_0(x)$  から成長する界面  $h(x, t)$  を考える。その際、初期条件を点源の集まりだとみなして、それぞれの点源から成長する円形界面を考え、その包絡線をとる。KPZ は非線形な問題なので、この包絡線そのものが界面  $h(x, t)$  と一致する訳ではないのだが、一点分布に関しては一致する、というのが変分公式の主張である。すなわち、時刻  $t = 0$  で点  $x = 0$  から生じる円形界面が作る界面プロファイルを  $h_{\text{circ}}(x, t)$  とすると、KPZ 変分公式は

$$h(x, t) \stackrel{1\text{pt}}{\simeq} \sup_{y \in \mathbb{R}} [h_{\text{circ}}(x - y, t) + h_0(y)] \quad (t \rightarrow \infty) \tag{40}$$

で与えられる \*29。ここで、 $\stackrel{1\text{pt}}{\simeq}$  は、 $t \rightarrow \infty$  極限で一点分布が一致する、という意味である。異なる  $x$  間の相関を考えるような、多点の問題では、変分公式は成り立たない。

- 1次元 KPZ クラスでは、厳密解研究により、普遍ゆらぎの様々な性質が明らかにされたが、それでも厳密に計算できた統計量は必ずしも多くない。代表的な例は、 $\langle \delta h(x, t_1) \delta h(x, t_2) \rangle$  などの二時刻相関で、液晶実験 [20] でそれが測られたときには厳密解は存在しなかった。現在では、理論的理解が得られ [23, 24]、数学の定理も作られた [38]。理論物理、数値計算、実験など、厳密解以外のアプローチが主導できる問題はまだまだあるのではないだろうか。ひとたび新たな性質が見つければ、厳密解でそれが追認される可能性があり、新たな数理的・数学的進展につながるかもしれない。これは、1次元 KPZ を研究する魅力の 1つだと感じている。

\*29  $h_{\text{circ}}(x, t)$  は、表 1 で紹介した Airy<sub>2</sub> 過程という確率過程を用いて表され、従って変分公式も Airy<sub>2</sub> 過程を使って表現される [19]。

- 高次元  $d \geq 2$  では、ゆらぎ分布等について厳密な結果はない。しかし、数値的には、 $d = 2$  (3次元空間中を成長する2次元界面)でも KPZ サブクラス構造 (界面形状依存性) が明瞭に確認されている [39]。この場合、球、円柱、平面、定常の4つのサブクラスが知られている。つまり、サブクラス構造は、1次元の特殊性ではなさそうだ。
- 非摂動くりこみ群によって、高次元でも、定常状態相関関数の近似的形状が理論的に調べられている [40]。定常以外のサブクラスも扱えるようになれば非常に面白いが、著者の知る限り、まだできていない。
- サブクラス構造は、KPZ クラスに限ったものではないようだ。非線形分子線エビタキシークラスという、界面成長の別の普遍クラスでも同様の結論が数値的に得られている [41]。非平衡臨界現象の directed percolation 普遍クラスでも、円形状の時間発展で、通常の平面空間と異なるスケーリング関数が現れることが示されている [42]。
- サブクラス構造を生んでいる物理的機構は何か、サブクラスの分類に効いている relevant パラメータは何か、など、関連する多くの理論的問題があるように思われる。個人的には、くりこみ群や、トポロジーのような、何らかの特徴抽出の方法で、サブクラス構造を理論物理として理解することは重要な未解決問題だと思っている。
- 「はじめに」で述べたとおり、現在の KPZ 研究は、平衡臨界現象で言うところの 1960 年代あたりの状況に近いと思っている。平衡系でいうところの、くりこみ群や共形場理論で興ったような本質的發展が、非平衡統計力学に待っているのだろうか？これを読まれた方がこうした問題に関心を持たれ、何らかの取り組みが始まるとしたら、本講義の成果としてこれ以上の喜びはない。

## 参考文献

- [1] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986).
- [2] R. A. L. Almeida *et al.*, *Phys. Rev. B* **89**, 045309 (2014).
- [3] P. J. Yunker *et al.*, *Nature* **476**, 308 (2011); *Phys. Rev. Lett.* **110**, 035501 (2013).
- [4] M. A. C. Huergo *et al.*, *Phys. Rev. E* **85**, 011918 (2012).
- [5] J. Maunukela *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1515 (1997); M. Mylly *et al.*, *Phys. Rev. E* **64**, 036101 (2001).
- [6] S. Atis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 148301 (2013); *Phys. Rev. Lett.* **114**, 234502 (2015).
- [7] A.-L. Barabási and H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge Univ. Press, 1995).
- [8] Hairer のフィールズ賞に関する日本語解説記事：舟木直久, 数学セミナー 2015 年 1 月号, 16 (2015).
- [9] K. A. Takeuchi, *Physica A* **504**, 77 (2018).
- [10] I. Corwin, *Random Matrices Theory Appl.* **1**, 1130001 (2012).
- [11] T. Kriecherbauer and J. Krug, *J. Phys. A* **43**, 403001 (2010); J. Quastel and H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **160**, 965 (2015); 笹本智弘, 物性研究・電子版 **4**, 044209 (2015).
- [12] P. Meakin, *Phys. Rep.* **235**, 189 (1993); T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang, *Phys. Rep.* **254**, 215 (1995); J. Krug, *Adv. Phys.* **46**, 139 (1997).
- [13] A. Pagnani and G. Parisi, *Phys. Rev. E* **92**, 010101 (2015).
- [14] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Springer, 3rd ed., 2004).
- [15] K. Johansson, *Commun. Math. Phys.* **209**, 437 (2000).
- [16] M. Prähofer and H. Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4882 (2000).
- [17] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Elsevier, 3rd ed., 2004); G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices* (Cambridge Univ. Press, 2009); 永尾太郎, ランダム行列の基礎 (東大出版, 2005); 木村太郎, ランダム行列理論, <https://researchmap.jp/muc8sappg-1920816/>
- [18] J. Baik and E. M. Rains, *J. Stat. Phys.* **100**, 523 (2000).
- [19] J. Quastel and D. Remenik, *Springer Proc. Math. Stat.* **69**, 121 (2014), arXiv:1301.0750.
- [20] K. A. Takeuchi and M. Sano, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230601 (2010); K. A. Takeuchi *et al.*, *Sci. Rep.* **1**, 34 (2011); K. A. Takeuchi and M. Sano, *J. Stat. Phys.* **147**, 853 (2012).
- [21] 竹内一将, 数理科学 **631**, 26 (2016).
- [22] I. Corwin and L. Petrov, *Commun. Math. Phys.* **343**, 651 (2016).

- [23] P. L. Ferrari and H. Spohn, *SIGMA* **12**, 074 (2016).
- [24] J. De Nardis, P. Le Doussal, and K. A. Takeuchi, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 125701 (2017).
- [25] B. Derrida, *Phys. Rep.* **301**, 65 (1998); O. Golinelli and K. Mallick, *J. Phys. A* **39**, 12679 (2006).
- [26] 笹本智弘, 応用力学研究所研究集会報告, 21ME-S7(18) (2010), doi:10.15017/18708.
- [27] C. A. Tracy and H. Widom, *Commun. Math. Phys.* **290**, 129 (2009).
- [28] A. Aggarwal, *Duke Math. J.* **167**, 269 (2018); *Math. Phys. Anal. Geom.* **20**, 3 (2016).
- [29] T. Sasamoto and H. Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230602 (2010); *Nucl. Phys. B* **834**, 523 (2010).
- [30] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel, *Commun. Pure Appl. Math.* **64**, 466 (2011).
- [31] P. Calabrese, P. Le Doussal, and A. Rosso, *Europhys. Lett.* **90**, 20002 (2010).
- [32] V. Dotsenko, *Europhys. Lett.* **90**, 20003 (2010).
- [33] A. Borodin *et al.*, *Math. Phys. Anal. Geom.* **18**, 20 (2015).
- [34] S. N. Majumdar, *Curr. Sci.* **89**, 2076 (2005); arXiv:cond-mat/0510064.
- [35] F. Franchini, *An Introduction to Integrable Techniques for One-Dimensional Quantum Systems* (Springer, 2017).
- [36] P. Calabrese and P. Le Doussal, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 250603 (2011).
- [37] T. Imamura and T. Sasamoto, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 190603 (2012).
- [38] K. Johansson, arXiv:1802.00729.
- [39] T. Halpin-Healy, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 170602 (2012); *Phys. Rev. E* **88**, 042118 (2013); T. J. Oliveira, S. G. Alves, and S. C. Ferreira, *Phys. Rev. E* **87**, 040102 (2013).
- [40] T. Kloss, L. Canet, and N. Wschebor, *Phys. Rev. E* **86**, 051124 (2012).
- [41] I. S. S. Carrasco and T. J. Oliveira, *Phys. Rev. E* **94**, 050801 (2016).
- [42] M. O. Lavrentovich, K. Korolev, and D. R. Nelson, *Phys. Rev. E* **87**, 012103 (2013).