数理解析研究所講究録 1349 巻 2004 年 46-62

提携に制限のある協力ゲームの解に関する考察

大阪大学大学院 工学研究科 森谷 篤史 (Atsushi Moritani)
大阪大学大学院 工学研究科 谷野 哲三 (Tetsuzo Tanino)
大阪大学大学院 工学研究科 巽 啓司 (Keiji Tatsumi)
Graduate School of Engineering, Osaka Univ.

1 はじめに

ゲーム理論には大きく分けて協力ゲームと非協力ゲームがあり，本稿では協力ゲーム，特に譲渡可能効用をもつゲーム (TU ゲーム) のみを扱うものとする．協力ゲームは提携形ゲームとも呼ばれ，複数の意思決定主体 (プレーヤー) が提携を形成し，提携内でプレーヤー同士が協力し合うことにより，より多くの利益を得ようとするような状況を取り扱う．

TU ゲームでは，各提携によって得られた値 (提携値) をどのように提携に含まれる各プレーヤーに分配するかが重要な問題であり，そのような各プレーヤーへの分配を決定するものをゲームの解と呼ぶ．TU ゲームの代表的な解に Shapley 値 [1] がある．Shapley 値は，提携の生成される順列を考え，この順列が等確率で成立するという仮定に基づいた，各プレーヤーの限界貢献度の期待値であると考えられる．また，Shapley 値は公理により一意的に特徴付けられている．

通常の TU ゲームにおいては任意の提携が実現可能 (feasible) である，つまり，各プレーヤーは任意のプレーヤーと提携を形成することができると仮定していた．しかし，現実には特定のプレーヤーと提携を形成することが不可能な状況などが想定され，その結果，実現不可能な提携が生じることもある．このように，提携の実現可能性をモデル化したものとして実現可能提携システム (Feasible Coalition System:FCS) が考えられている．

現在までに，FCS の概念を用いて提携に制限がある場合の協力ゲームにおける解についての研究がなされているが，これには大きく分けて 2 つのアプローチが考えられている．1 つは，通常の提携に制限のない TU ゲームから，FCS に基づき制限ゲームを導出し，その解を通常の提携に制限があるゲームの解とする手法である．この際扱われている FCS としては，分割システム (Partition System) や分割システムを一般化した和集合安定システム (Union Stable System) [2] などがある．もう 1 つは，通常の TU ゲームが取り得る範囲そのものを FCS により制限し，そのゲームの解を考える手法である．この際扱われている FCS としては，凸幾何 (Convex Geometry) [3, 4] やマトロイドなどがある．本稿では，これらの中から特に和集合安定システムと凸幾何に着目する．なお，この 2 つのアプローチにおける具体的な解として Shapley 値を用いると，和集合安定システムでもあり凸幾何でもあるような FCS に対しては，その 2 つのアプローチにより 2 種類の Shapley 値に基づく解，Myerson 値と凸幾何 Shapley 値を得ることができる．また，この 2 つの解の持つ性質を互いを特徴付ける公理を通じて比較検討を行う．

2 章では，TU ゲームにおける Shapley 値とその公理的特徴付けについて述べる．3 章では，2 つのアプローチにより提携が制限された協力ゲームの解を導入し，4 章で，これら 2 つの解の比較を数値例と公理により行い，最後にまとめとする．

2 協力ゲームにおける Shapley 値とその公理的特徴付け

この章では，TU ゲームの Shapley 値および公理について述べる．なお，本稿を通じて，簡略化のため，$\{i\}, S \cup \{i\}, S \setminus \{i\}$ をそれぞれ $i, S \cup i, S \setminus i$ と表記する．

プレーヤー集合を N，特性関数を $v : 2^N \to \mathbf{R}$，提携を $S \subseteq N$ とする．ゲームを通常 (N, v) または v とするが，本稿ではプレーヤー集合を N に固定して考えるため，特性関数 v をゲームとする．また，プレーヤー集合 N としたときの TU ゲーム全体の集合を Γ で表す．

通常の TU ゲームにおける Shapley 値は以下のように定義される．

定義 1 任意のプレーヤー $i \in N$ について，

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!}[v(S) - v(S \setminus i)].$$

を，プレーヤー i の Shapley 値といい，その組

$$\phi(v) = (\phi_1(v), \phi_2(v), \cdots, \phi_n(v)).$$

をゲーム v の Shapley 値という．ただし，$|S|$ は S に含まれるプレーヤーの数を表す．

ここで，通常の TU ゲームにおける解を $\xi : \Gamma \to \mathbf{R}$ とすると，Shapley 値は以下の公理を満たす．

公理 1 全体合理性

任意のゲーム v に対して，ゲームの解 ξ は次式を満たす．

$$\sum_{i \in N} \xi_i(v) = v(N).$$

□

次のような性質をもつプレーヤー $i \in N$ をナルプレーヤー，プレーヤー $j \in N$ をダミープレーヤーという．

$$v(S \cup i) = v(S), \qquad \forall S \subseteq N \setminus i,$$
$$v(T \cup j) = v(T) + v(j), \qquad \forall T \subseteq N \setminus j.$$

公理 2 ナルプレーヤー（またはダミープレーヤー）のゼロ評価

任意のゲーム v に対して，プレーヤー $i \in N$ をナルプレーヤー，プレーヤー $j \in N$ をナルプレーヤーとすると，ゲームの解 ξ は次式を満たす．

$$\xi_i(v) = 0,$$
$$\xi_j(v) = v(j).$$

□

次のような性質をもつ2人のプレーヤー$i,j \in N$を対称であるという.

$$v(S \cup i) = v(S \cup j), \qquad \forall S \subseteq N \setminus i,j.$$

公理 3 対称性
任意のゲームvに対して，2人のプレーヤー$i,j \in N$が対称ならば，ゲームの解ξは次式を満たす.

$$\xi_i(v) = \xi_j(v).$$

□

2つのゲームv,wに対し，その和ゲーム$v+w$を以下のように定義する.

$$(v+w)(S) = v(S) + w(S), \qquad \forall S \subseteq N.$$

公理 4 加法性
任意の和ゲーム$v+w$に対して，ゲームの解ξは次式を満たす.

$$\xi_i(v+w) = \xi_i(v) + \xi_i(w), \qquad \forall i \in N.$$

□

定理 1 Shapley値は全体合理性，ナルプレーヤー(またはダミープレーヤー)のゼロ評価，対称性，加法性(公理1-4)を満たす唯一の解である.

3 提携に制限のある協力ゲームの解

通常のTUゲームにおいては任意の提携が実現可能(feasible)である，つまり，各プレーヤーは任意のプレーヤーと提携を形成することができると仮定していた．しかし，現実には特定のプレーヤーと提携を形成することが不可能な状況などが想定され，その結果，実現不可能な提携が生じることもある．このように，提携の実現可能性をモデル化したものとして実現可能提携システム(Feasible Coalition System，以下FCSと呼ぶ)が考えられている.

このFCSの概念を用いて，提携に制限が加わった場合の協力ゲームにおける解を考えると，大きく分けて2つのアプローチが考えられる.

本稿では，その2つのアプローチで取り扱われるFCSとして，和集合安定システム(Union Stable System)および凸幾何(Convex Geometry)を取り上げる．また，この2つのアプローチにおける具体的な解としてShapley値を用いて，和集合安定システムでもあり凸幾何でもあるようなFCSに対しては，その2つのアプローチにより2種類のShapley値に基づく解，Myerson値と凸幾何Shapley値を得ることができる.

3.1 和集合安定システムと Myerson 値

3 章の始めに述べたように，FCS の概念を用いて提携に制限がある場合の協力ゲームにおける解を考えるにあたって，2 つのアプローチが考えられる．1 つは，通常の提携に制限のない TU ゲームから FCS に基づき制限ゲームを導出し，その解を通常の提携に制限があるゲームの解とするものである．このようなシステムには分割システムや分割システムを一般化した和集合安定システムなどがあるが，ここでは和集合安定システムを考える．

この節では，和集合安定システムとそのシステムの解である Myerson 値について述べる．FCS の概念に基づいて，和集合安定システムを以下のように定義する．

定義 2 $A \cap B \neq \emptyset$ であるようなすべての $A, B \in \mathcal{F}$ が $A \cup B \in \mathcal{F}$ を満たすとき，FCS $\mathcal{F}$ は和集合安定 (*Union Stable*) と呼ばれる．

$\mathcal{F}$ が与えられたときに，$S \subseteq N$ の中で極大な実現可能提携を S の $\mathcal{F}$-成分といい，その集合を $C_{\mathcal{F}}(S)$ とする．ここで，FCS $\mathcal{F}$ の基底 $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ を以下のように定義する．

定義 3 FCS $\mathcal{F}$ を和集合安定システムとする．このとき，$\mathcal{D}(\mathcal{F})$ を

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \{F \in \mathcal{F} : F = A \cup B, A \neq F, B \neq F, A, B \in \mathcal{F}, A \cap B \neq \emptyset\}.$$

とすると，集合 $\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \setminus \mathcal{D}(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の基底と呼ぶ．

また，和集合安定システムにおける閉包 $\overline{\mathcal{F}}$ を以下のように定義する．

定義 4 以下の 3 つの性質を満たすものを和集合安定システムにおける閉包 $\overline{\mathcal{F}}$ と呼ぶ．

- $\mathcal{F}^{(0)} = \mathcal{F}$
- $\mathcal{F}^{(n)} = \{S \cup T : S, T \in \mathcal{F}^{(n-1)}, S \cap T \neq \emptyset\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$
- $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{(k)} \quad \text{s.t. } \mathcal{F}^{(k+1)} = \mathcal{F}^{(k)}$

ここで，提携の実現可能性を考慮したゲームとして，制限ゲームを導入する．

定義 5 v をゲーム，$\mathcal{F}$ を和集合安定システムとする．このとき，$\mathcal{F}$-制限ゲーム $v^{\mathcal{F}} : 2^N \to \mathbf{R}$ は次式で定義される．

$$v^{\mathcal{F}}(S) = \sum_{T \in C_{\mathcal{F}}(S)} v(T).$$

制限ゲーム $v^{\mathcal{F}}$ による Shapley 値を，ゲーム v の和集合安定システム $\mathcal{F}$ の下での Myerson 値と呼ぶ．

定義 6 和集合安定システム $\mathcal{F}$ が与えられたとき，ゲーム $v \in \Gamma$ の $\mathcal{F}$ の下での Myerson 値はベクトル $\mu(v, \mathcal{F}) = \phi(v^{\mathcal{F}})$ で与えられる．ただし，ϕ は Shapley 値である．

この和集合安定システムにおける Myerson 値が満たす公理を以下に示す．ここで，プレーヤー集合 N のすべての和集合安定システムの集合を US^N とする．制限ゲームを通じたゲーム v の解は，当然和集合安定システム $\mathcal{F}$ にも依存するため，これを $\gamma(v, \mathcal{F})$ で表す．

公理 5 成分合理性
すべての $\mathcal{F} \in US^N$ と $M \in C_{\mathcal{F}}(N)$ に対して，解 $\gamma : \Gamma \times US^N \to \mathbf{R}^n$ は次式を満たす.

$$\sum_{i \in M} \gamma_i(v, \mathcal{F}) = v(M).$$

□

公理 6 成分ダミー性
すべての $i \notin \bigcup_{M \in C_{\mathcal{F}}(N)} M$ に対して，解 γ は次式を満たす.

$$\gamma_i(v, \mathcal{F}) = 0.$$

□

公理 7 公平性
すべての $\mathcal{F} \in US^N$ と $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$，$j \in B$ に対して，$\gamma_j(v, \mathcal{F}) - \gamma_j(v, \mathcal{F}') = c$ であるような $c \in \mathbf{R}$ が存在する．ただし，$\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{B}(\mathcal{F}) \setminus \{B\}}$ とする. □

定理 2 Myerson 値は，成分合理性，成分ダミー性，公平性 (公理 5-7) を満たす唯一の解である.

公理 8 基底単調性
すべての $\mathcal{F} \in US^N, B \in \mathcal{B}(\mathcal{F}), j \in B$ に対して，$\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{B}(\mathcal{F}) \setminus \{B\}}$ としたとき，$\gamma_j(v, \mathcal{F}) \geq \gamma_j(v, \mathcal{F}')$ が成り立つ. □

命題 1 $\mathcal{F} \in US^N$ とする．v が優加法的かつゼロ正規化されている，つまり，すべての $i \in N$ に対して $v(i) = 0$ なら，Myerson 値 $\mu(v, \mathcal{F})$ は基底単調性を満たす.

すべての $S \subseteq N$ で $v^{\mathcal{F}}(S) = f(|S \cap D|)$，ただし，$D = \{i \in N : \mathcal{C}_i(\mathcal{F}) \neq \emptyset\}$ であるような関数 $f : \{0, 1, \ldots, |D|\} \to \mathbf{R}$ が存在するとき，和集合安定システム $\mathcal{F}$ は点匿名的であると呼ばれる．ただし，$\mathcal{C}_i(\mathcal{F}) = \{C \in \mathcal{B}(\mathcal{F}) : |C| \geq 2, i \in C\}$ である.

公理 9 点匿名性
すべての点匿名的であるようなシステム $\mathcal{F}$ に対して，以下のような $\alpha \in \mathbf{R}$ が存在する.

$$\gamma_i(v, \mathcal{F}) = \begin{cases} \alpha & \text{if } i \in D; \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

□

$\mathcal{F} \in US^N$ とする．すべての $S \subseteq N$ で $v^{\mathcal{F}}(S) = v^{\mathcal{F}}(S \setminus i)$ であるなら，プレーヤー $i \in N$ は $\mathcal{F}$ に対して不要であると呼ばれる.

公理 10 不要プレーヤー特性
すべての $\mathcal{F} \in US^N$ と不要である各プレーヤー $i \in N$ に対して，$\gamma(v, \mathcal{F}) = \gamma(v, \mathcal{F}_{N \setminus i})$ が成り立つ．ただし，$\mathcal{F}_{N \setminus i} = \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq N \setminus i\}$ である. □

公理 11 加法性

すべての $\mathcal{F} \in US^N$ とゲーム $v, w \in \Gamma$ に対して，次式が成り立つ．

$$\gamma(v+w, \mathcal{F}) = \gamma(v, \mathcal{F}) + \gamma(w, \mathcal{F}).$$

□

定理 3 Myerson 値は，成分合理性，成分ダミー性，点匿名性，不要プレーヤー特性，加法性（公理 5，6，9-11）を満たす唯一の解である．

3.2 凸幾何と凸幾何 Shapley 値

FCS の概念を用いて提携に制限がある場合の協力ゲームにおける解を考えるにあたって，2 つのアプローチが考えられており，その 1 つの代表的なものとして，3.1 節で和集合安定システムにおける Myerson 値について述べた．もう 1 つのアプローチとしては，通常の TU ゲームが取り得る範囲そのものを FCS により制限し，そのゲームの解を考えるものである．このようなシステムには，凸幾何やマトロイドなどがあるが，ここでは凸幾何を考える．

この節では，凸幾何とそのシステムの解である凸幾何 Shapley 値について述べる．

定義 7 FCS $\mathcal{L}$ が次の性質を満たすとき，凸幾何であるといわれる．

- $\emptyset \in \mathcal{L}$
- $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{L}$
- $A \in \mathcal{L}, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists i \in N, A \cup i \in \mathcal{L}$

凸幾何に含まれる集合を凸集合と呼ぶこととする．$\mathcal{L} \subseteq 2^N$ の極大連鎖とは，それ以上大きな連鎖を含まない凸集合を順序付けて並べたものである．つまり，各極大連鎖は以下のように $n+1$ 個の凸集合を含む．

$$\emptyset = S_0 \subset S_1 \subset \cdots \subset S_{n-1} \subset S_n = N$$

ただし，すべての $k = 0, 1, \ldots, n$ について $|S_k| = k$ である．ここで，$c([T, S])$ を T から S への極大連鎖の数を表すものとし，$c(S) = c([\emptyset, S])$ とする．また，凸集合 $C \in \mathcal{L}$ の要素 i が $C \setminus i \in \mathcal{L}$ を満たすとき，i は C の端点と呼ばれ，C の端点の集合を $\mathrm{ex}(C)$ とする．

凸幾何 $\mathcal{L}$ 上のゲームを，$v(\emptyset) = 0$ であるような関数 $v : \mathcal{L} \to \mathbf{R}$ とし，凸幾何 $\mathcal{L}$ 上で定義されるすべてのゲームの集合を $\Gamma(\mathcal{L})$ とする．

定義 8 $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ を凸幾何のゲームとする．すべての $i \in N$ に対して，ゲーム v の Shapley 値 $\Phi(v)$（以下凸幾何 Shapley 値と呼ぶ）は次式で与えられる．ただし，$c([N, N]) = c(\emptyset) = 1$ とする．

$$\Phi_i(v) = \sum_{\{S \in \mathcal{L} : i \in \mathrm{ex}(S)\}} \frac{c(S \setminus i)c([S, N])}{c(N)}(v(S) - v(S \setminus i)).$$

ここで，凸幾何上のゲームに対する解を $\chi : \Gamma(\mathcal{L}) \to \mathbf{R}^n$ とする．

定義 9 $S \subseteq T$ であるような各 $S, T \in \mathcal{L}$ に対して，$v(S) \leq v(T)$ なら，ゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ は単調である．

公理 12 単調性
$v \in \Gamma(\mathcal{L})$ が単調なら，$\chi_i(v) \geq 0$ である．□

公理 13 線形性
すべての $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$，$v, w \in \Gamma(\mathcal{L})$，$i \in N$ に対して，次式が成り立つ．

$$\chi_i(\alpha v + \beta w) = \alpha \chi_i(v) + \beta \chi_i(w).$$

□

定義 10 $i \notin T$ かつ $T \cup i \in \mathcal{L}$ を満たすような各 $T \in \mathcal{L}$ において次式が成り立つなら，プレーヤー $i \in N$ はゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ でダミーである．

$$v(T \cup i) - v(T) = \begin{cases} v(i) & \text{if } \{i\} \in \mathcal{L}; \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$

公理 14 ダミー性
プレーヤー $i \in N$ が $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ 上でダミーなら，次式が成り立つ．

$$\chi_i(v) = \begin{cases} v(i) & \text{if } \{i\} \in \mathcal{L}; \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$

□

公理 15 合理性
すべてのゲーム $v \in \Gamma(\mathcal{L})$ に対して，次式が成り立つ．

$$\sum_{i \in N} \chi_i(v) = v(N).$$

□

公理 16 連鎖性
任意の $S \in \mathcal{L}$ と $i, j \in \mathrm{ex}(S)$ に対して，次式が成り立つ．

$$c(S \setminus i)\chi_j(\delta_S) = c(S \setminus j)\chi_i(\delta_S).$$

ただし，

$$\delta_T(S) = \begin{cases} 1 & \text{if } S = T; \\ 0 & \text{if } S \neq T; \end{cases}$$

とする．□

定理 4 凸幾何 Shapley 値は，線形性，ダミー性，合理性，連鎖性 (公理 13-16) を満たす唯一の解である．

4 Myerson値と凸幾何Shapley値の比較

3章で述べたように，提携に制限がある場合の協力ゲームに対する2つのアプローチによって得られる解として，Myerson値と凸幾何Shapley値が考えられる．ここでは，その2つの解が，どのような違いを持つかを数値例と公理の比較によって検証する．本稿では，和集合安定システムで凸幾何でもあるようなFCSとして，ネットワークシステムにより提携に制限が加えられたゲーム（ネットワークゲーム）を用いるものとする．なお，Myerson値のように制限ゲームを考えるアプローチでは通常のTUゲームを基としており，凸幾何上のゲームとでは定義域が異なるが，凸幾何上のゲームにおいて制限ゲームの導出には実際は実現可能な提携に対するvの値のみを用いればよいため，この定義域による相違点は2つのアプローチでの解の比較検討する際には特に問題にならない．

4.1 数値例による検証

和集合安定システムかつ凸幾何であるようなFCSが与えられたのであれば，解を2通りの考え方で求めることができる．この場合，解がどのように異なるかを数値例を用いて検証する．

通常ゲームのShapley値をϕ，Myerson値をμ，凸幾何Shapley値Φとし，以下の例により結果のみを示す．

例 1 プレイヤーの集合$N = \{1,2,3\}$，リンクの集合$L^1 = \{12,23\}$（図1参照）と特性関数v_1, v_2が以下のように与えられたネットワークを考える．

$$v_1(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } |S| \leq 1; \\ 60 & \text{if } |S| = 2; \\ 72 & \text{if } S = N. \end{cases} \quad v_2(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } |S| \leq 1; \\ 60 & \text{if } S = \{1,2\}; \\ 48 & \text{if } S = \{1,3\}; \\ 30 & \text{if } S = \{2,3\}; \\ 72 & \text{if } S = N. \end{cases}$$

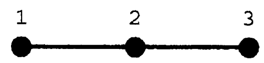

図 1: ネットワーク (N, L^1)

この場合，v_1, v_2におけるShapley値ϕ，Myerson値μ，凸幾何Shapley値Φはそれぞれ，次のようになる．

$$\begin{aligned} \phi(v_1) &= (24,\ 24,\ 24), \quad \phi(v_2) = (32,\ 23,\ 17) \\ \mu(v_1) &= (14,\ 44,\ 14), \quad \mu(v_2) = (24,\ 39,\ 9) \\ \Phi(v_1) &= (21,\ 30,\ 21), \quad \Phi(v_2) = (36,\ 22.5,\ 13.5) \end{aligned}$$

同様の制限を加えた FCS であるにもかかわらず，$\mu(v_1)$ と $\Phi(v_1)$，$\mu(v_2)$ と $\Phi(v_2)$ が異なる値を取っていることがわかる．また，Myerson 値では，プレーヤー 2 の値が一番大きいが，凸幾何 Shapley 値では，$\Phi(v_1)$ ではプレーヤー 1 が，$\Phi(v_2)$ ではプレーヤー 2 が一番大きい値を取っていることがわかる．つまり，Myerson 値と凸幾何 Shapley 値では，互いに傾向の違う値を取ることがわかる．

例 2 プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, 3, 4\}$，リンクの集合 $L^2 = \{12, 13, 14, 34\}$（図 2 参照）と特性関数は v_3 が以下のように与えられたネットワークを考える．

$$v_3(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } |S| \leq 1; \\ 60 & \text{if } |S| = 2; \\ 96 & \text{if } |S| = 3; \\ 108 & \text{if } S = N. \end{cases}$$

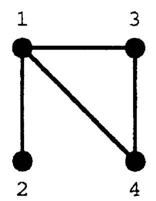

図 2: ネットワーク (N, L^2)

この場合，v_3 における Shapley 値 ϕ，Myerson 値 μ，凸幾何 Shapley 値 Φ はそれぞれ，次のようになる．

$$\begin{aligned} \phi(v_3) &= (27,\ 27,\ 27,\ 27) \\ \mu(v_3) &= (46,\ 14,\ 24,\ 24) \\ \Phi(v_3) &= (30.9,\ 24,\ 26.6,\ 26.6) \end{aligned}$$

4.2 Myerson 値の公理検証

この節では，通常の協力ゲームの Shapley 値や凸幾何 Shapley 値が満たす公理を Myerson 値が満たすかどうかを検証する．公理が成り立つ場合については，その証明はいずれも容易であるので，公理が成立しない場合の反例を挙げることにする．

公理検証 1:全体合理性

プレイヤーの集合 $N = \{1, 2, 3\}$，リンクの集合 $L^3 = \{12\}$（図 3 参照）が以下のように与えられたネットワークを考える．ただし，特性関数は v_1 を用いる．

この場合，$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}\}$ であるから，Myerson 値 μ を求めると，

$$\mu(v_1) = (30,\ 30,\ 0)$$

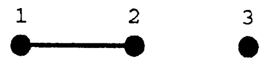

図 3: ネットワーク (N, L^3)

となる．よって，

$$\sum_{i \in N} \mu_i(v_1) = 60 \neq 72 = v_1(N).$$

となることから，Myerson 値は全体合理性を満たさないことがわかる．

公理検証 2:ナルプレーヤーのゼロ評価

プレイヤーの集合 $N = \{1,2,3,4\}$，リンクの集合 $L^4 = \{12,13,34\}$（図 4 参照）と特性関数 v_4 が与えられたネットワークを考える．

$$v_4(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } |S| \leq 1, S = \{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}; \\ 10 & \text{if } S = \{2,3\},\{1,2,3\}; \\ 20 & \text{if } S = \{2,4\},\{1,2,4\}; \\ 30 & \text{if } S = \{3,4\},\{1,3,4\}; \\ 60 & \text{if } S = \{2,3,4\}, N. \end{cases}$$

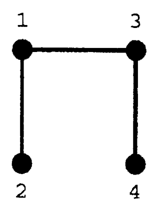

図 4: ネットワーク (N, L^4)

ここで，$v_4(S \cup 1) = v_4(S)$，$v_4(S \cup 1) = v_4(S) + v_4(1)$ であるから，プレーヤー 1 はナルプレーヤーでもありダミープレーヤーでもある．

Myerson 値 μ は，

$$\mu = (8.3,\ 8.3,\ 23.3,\ 20)$$

となることから，

$$\mu_1(v) = 8.3 \neq 0, \mu_1(v) = 8.3 \neq v_4(1) = 0$$

Myerson 値はナルプレーヤーのゼロ評価を満たさないことがわかる．

公理検証 3:対称性

プレイヤーの集合 $N = \{1,2,3,4\}$，リンクの集合 L^2 (図 2 参照) が与えられたネットワークを考える．ただし，特性関数は v_3 を用いる．

プレーヤー i,j を $i=2, j=4$ とし，任意の $S \subseteq N \setminus i,j$ を考えると,

$$v_3(S \cup i) = 96 = v_3(S \cup j)$$

より，プレーヤー i と j は対称であるといえる．しかし，例 2 で求めたように，この場合の Myerson 値 μ は $\mu = (46,\ 14,\ 24,\ 24)$ であるから，

$$\mu_2 = 14 \neq 24 = \mu_4.$$

となる．よって，Myerson 値は対称性を満たさないことがわかる．

公理検証 4:ダミー性

プレイヤーの集合 $N = \{1,2,3,4\}$，リンクの集合 L^4 (図 4 参照) が与えられたネットワークを考える．ただし，特性関数は v_4 を用いる．

$i \notin T$ かつ $T \cup i \in \mathcal{L}$ を満たすような各 $T \in \mathcal{L}$ を考えると，$v_4(T \cup 1) - v_4(T) = v_4(1) = 0$ より，プレーヤー 1 はゲーム $v_4 \in \Gamma(\mathcal{L})$ でダミーである．

この場合，Myerson 値 μ は $\mu = (8.3,\ 8.3,\ 23.3,\ 20)$ となることから，

$$\mu_1 = 8.3 \neq v_4(1) = 0$$

となり，Myerson 値はダミー性を満たさないことがわかる．

公理検証 5:連鎖性

プレイヤーの集合 $N = \{1,2,3,4\}$，リンクの集合 L^2 (図 2 参照) が与えられたネットワークを考える．

このとき，$S = N$ を考えると，$\mathrm{ex}(S) = \{2,3,4\}$ より，$i = 2, j = 3$ とする．

$$\begin{aligned} c(S \setminus j)\mu_i(\delta_S) &= 4 \times \frac{1}{4} \times 1 = 1 \\ c(S \setminus i)\mu_j(\delta_S) &= 6 \times \frac{1}{4} \times 1 = 1.5 \end{aligned}$$

よって，Myerson 値は連鎖性を満たさないことがわかる．

公理検証 6:単調性

プレイヤーの集合 $N=\{1,2,3,4\}$，リンクの集合 L^2（図 2 参照）と特性関数 v_5 が与えられたネットワークを考える．

$$v_5(S)=\begin{cases} 0 & \text{if } S=\emptyset; \\ 9 & \text{if } |S|=1; \\ 10 & \text{if } |S|=2; \\ 11 & \text{if } |S|=3; \\ 12 & \text{if } S=N. \end{cases}$$

$S\subseteq T$ であるような各 $S,T\subseteq N$ に対して，$v_5(S)\leq v_5(T)$ であるので，ゲーム v_6 は単調である．このとき，制限ゲーム $v_5^{\mathcal{F}}$ を考えると

$$v_5^{\mathcal{F}}(S)=\begin{cases} 0 & \text{if } S=\emptyset; \\ 9 & \text{if } |S|=1; \\ 10 & \text{if } S=\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\}\}; \\ 11 & \text{if } S=\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}\}; \\ 12 & \text{if } S=N. \\ 18 & \text{if } S=\{\{2,3\},\{2,4\}\}; \\ 19 & \text{if } S=\{2,3,4\}. \end{cases}$$

となる．Myerson 値 μ は $\mu=(-1,\ 7,\ 3,\ 3)$ となることから，

$$\mu_1=-1\leq 0$$

となり，Myerson 値は単調性を満たさないことがわかる．

4.3 凸幾何 Shapley 値の公理検証

この節では，通常の協力ゲームの Shapley 値や Myerson 値が満たす公理を凸幾何 Shapley 値が満たすかどうかを検証する．前節と同様に，公理の成立しない場合の反例を示す．

公理検証 1:対称性

プレイヤーの集合 $N=\{1,2,3,4\}$，リンクの集合 L^2（図 2 参照）が与えられたネットワークを考える．ただし，特性関数は v_3 を用いる．

$S=\{1,3\}$ を考える．このとき，プレーヤー i,j を $i=2,j=4$ とすると，

$$v_3(S\cup i)=96=v_3(S\cup j)$$

より，プレーヤー i と j は対称である．しかし，例 2 より，$\Phi=(30.9,\ 24,\ 26.6,\ 26.6)$ であるから，

$$\Phi_2=24\neq 26.6=\Phi_4.$$

となる．よって，凸幾何 Shapley 値は対称性を満たさないことがわかる．

公理検証 2:公平性

プレイヤーの集合 $N=\{1,2,3,4\}$，リンクの集合 L^2 (図 2 参照) が与えられたネットワークを考える．ただし，特性関数は v_3 を用いる．

このとき，

$$\mathcal{L}=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},N\}$$

となり，連鎖は図 5 となる．

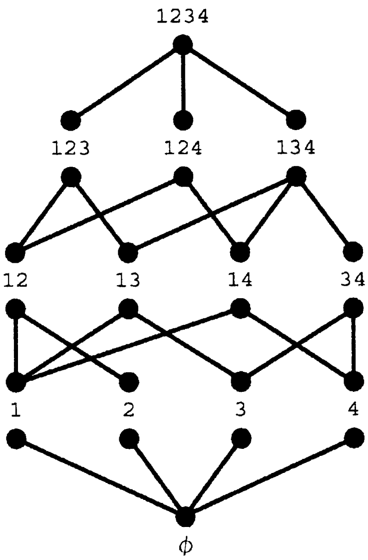

図 5: ネットワーク (N,L^2) の連鎖

公平性を調べるために，まず $\mathcal{B}(\mathcal{L})$ を求める．$\mathcal{L}$ が上記で与えられているので，$D(\mathcal{L})=\{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},N\}$ より，$\mathcal{L}$ の基底は

$$\mathcal{B}(\mathcal{L})=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\}\}$$

となる．

ここで，$B\in\mathcal{B}(\mathcal{L})$ として $B=\{1,3\}$ をとると，

$$\mathcal{L}'=\overline{\mathcal{B}(\mathcal{L})\setminus B}=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,4\},\{3,4\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},N\}$$

となる．この $\mathcal{L}'$ における凸幾何 Shapley 値は

$$\Phi(v,\mathcal{L}')=(31.5,\ 22.5,\ 22.5,\ 31.5)$$

である．元の $\mathcal{L}$ における凸幾何 Shapley 値が

$$\Phi(v,\mathcal{L})=(30.9,\ 24,\ 26.6,\ 26.6)$$

であるから，基底 B のプレーヤー 1，2 について，

$$\Phi_1(v,\mathcal{L})-\Phi_1(v,\mathcal{L}')=-0.6$$
$$\Phi_2(v,\mathcal{L})-\Phi_2(v,\mathcal{L}')=1.5$$

となる．よって，凸幾何 Shapley 値は公平性を満たさないことがわかる．

公理検証 3:基底単調性

プレイヤーの集合 $N = \{1,2,3,4\}$，リンクの集合 L^2（図 2 参照）が与えられたネットワークを考える．ただし，特性関数は v_3 を用いる．v_3 は優加法的かつゼロ正規化されているものとする．

このとき，

$$\mathcal{B}(\mathcal{L}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}\}$$

で，$B \in \mathcal{B}(\mathcal{L})$ として $B = \{1,3\}$ をとると，

$$\mathcal{L}' = \overline{\mathcal{B}(\mathcal{L}) \setminus B} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,4\}, \{3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, N\}$$

となる．この $\mathcal{L}'$ における凸幾何 Shapley 値は

$$\Phi(v, \mathcal{L}') = (31.5,\ 22.5,\ 22.5,\ 31.5)$$

である．元の $\mathcal{L}$ における凸幾何 Shapley 値が

$$\Phi(v, \mathcal{L}) = (30.9,\ 24,\ 26.6,\ 26.6)$$

であるから，基底 B のプレーヤー 1 について，

$$\Phi_1(v, \mathcal{L}) \not\geq \Phi_1(v, \mathcal{L}')$$

となる．よって，凸幾何 Shapley 値は基底単調性を満たさないことがわかる．

公理検証 4:点匿名性

プレイヤーの集合 $N = \{1,2,3,4\}$，リンクの集合 L^2（図 2 参照）が与えられたネットワークを考える．ただし，特性関数は以下で与えられる v_6 を用いる．

$$v_6(S) = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset; \\ 1 & \text{if } |S| = 1; \\ 2 & \text{if } |S| = 2; \\ 3 & \text{if } |S| = 3; \\ 8 & \text{if } S = N. \end{cases}$$

このとき，

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, N\}$$

より，

$$\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}\}$$

で，$\mathcal{C}(\mathcal{F}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{3,4\}\}$ であるから，$D = \{1,2,3,4\}$ となる．このとき，

$$v^{\mathcal{F}}(S) = f(|S \cup D|) = f(|S|) = \begin{cases} 0 & \text{if } S = \emptyset; \\ 1 & \text{if } |S| = 1; \\ 2 & \text{if } |S| = 2; \\ 3 & \text{if } |S| = 3; \\ 8 & \text{if } S = N. \end{cases}$$

であるから，Myerson 値 μ は，

$$\mu = (2,\ 2,\ 2,\ 2)$$

となり，点匿名性が成り立っていることがわかる．

次に，$\mathcal{F} = \mathcal{L}$ として，凸幾何 Shapley 値 Φ を求めると，

$$\Phi = (1,\ \frac{19}{7},\ \frac{15}{7},\ \frac{15}{7})$$

となる．よって凸幾何 Shapley 値は点匿名性を満たさないことがわかる．

公理検証 5:不要プレーヤー特性

プレイヤーの集合 $N = \{1,2,3,4\}$，リンクの集合 $L^5 = \{12,23,34\}$（図 6 参照）が与えられたネットワークを考える．ただし，特性関数は v_4 を用いる．このときプレーヤー 1 は

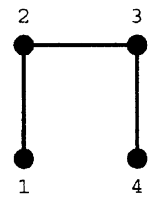

図 6: ネットワーク (N, L^5)

ダミーであり，凸幾何 Shapley 値 Φ は

$$\Phi = (0,\ 10,\ 8.75,\ 41.25)$$

となる．

ここで，$i = 1$ とすると，$v^{\mathcal{L}}(S) = v^{\mathcal{L}}(S \setminus i)$ が成り立つのでプレーヤー 1 は不要であるといえる．よって，

$$\mathcal{L}_{N\setminus i} = \{L \in \mathcal{L} : L \subseteq N \setminus i\} = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{2,3,4\}$$

となるので，この $\mathcal{L}_{N\setminus i}$ における Shapley 値を Φ' として求めると

$$\Phi' = (0,\ 17.5,\ 10,\ 32.5)$$

となることから，凸幾何 Shapley 値は不要プレーヤー特性を満たさないことがわかる．

4.4 公理比較一覧表

Myerson 値を μ，凸幾何 Shapley 値を Φ とする．それぞれのゲームの値が公理を満たしている場合は ○，満たしていない場合は×，その公理により一意に定められる場合は ◎ とする．ただし，公理を考えることそのものが意味を持たない場合は – とする．

表 1 より．次のような考察が得られる．Myerson 値がナルプレーヤーのゼロ評価を満たしていないが，これは $v^{\mathcal{F}}$ においてダミー性が継承されないためであると考えられる．$v^{\mathcal{F}}$ は単調性も継承しないため，Myerson 値は単調性も満たなさい．また，制限を加えることで Myerson 値，凸幾何 Shapley 値ともに対称性を満たさないことも分かる．凸幾何 Shapley 値は単調性を満たすものの基底単調性を満たさない．

以上より，同様の制限を加えているにもかかわらず，Myerson 値は凸幾何 Shapley 値の公理をほぼ満たさず，凸幾何 Shapley 値も Myerson 値の公理をほぼ満たさないという結果が得られた．すなわち，解には多様性があり，考えている状況で，いずれの公理系が妥当であるかに応じて解の選択をするのが自然である．

5 おわりに

本稿では，提携に制限がある場合の協力ゲームにおける解への 2 つのアプローチとして，Myerson 値と凸幾何 Shapley 値を取り上げ，和集合安定システムで凸幾何であるような FCS において，それぞれの解がどのような違いがあるかを，数値例と公理の比較により検証した．その結果，同様の制限を加えているにもかかわらず，Myerson 値と凸幾何 Shapley 値は異なる値を取り，Myerson 値は凸幾何 Shapley 値の公理をほぼ満たさず，凸幾何 Shapley 値も Myerson 値の公理をほぼ満たさないことが分かった．

表 1:公理比較一覧表

公理	μ	Φ
Shapley 値の公理		
全体合理性	×	○
ナルプレーヤーのゼロ評価	×	○
対称性	×	×
加法性	○	○
Myerson 値の公理		
成分合理性	$◎_{1,2}$	○
成分ダミー性	$◎_{1,2}$	−
公平性	$◎_{1}$	×
基底単調性	○	×
点匿名性	$◎_{2}$	×
不要プレーヤー特性	$◎_{2}$	×
加法性	$◎_{2}$	○
凸幾何 Shapley 値の公理		
単調性	×	○
線形性	○	◎
ダミー性	×	◎
合理性	×	◎
連鎖性	×	◎

参考文献

[1] L. S. Shapley: "A value for n-person games" H. W. Kuhn and A. W. Tucher(eds), *Contributions to the Theory of Games*, Vol. 2, Annals of Mathmatics Studies, No. 28: Princeton University Press, Princeton, pp. 307-317, 1974.

[2] J. M. Bilbao: "*Cooperative Games on Combinatorial Structures*" Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

[3] P. H. Edelman and R. E. Jamison: "The theory of convex geometries" *Geom. Dedicata*, Vol. 19, pp. 247-270, 1985.

[4] J. M. Bilbao and P. H. Edelman: "The Shapley value on convex geometries" *Discrete Applied Mathematics* Vol. 103, pp. 33-40, 2000.