数理解析研究所講究録 1349 巻 2004 年 150-165

ファジィランダム線形計画問題に対する可能性測度と必然性測度を用いた確率最大化および満足水準最適化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法

広島大学大学院・工学研究科　片桐 英樹 (Hideki KATAGIRI)
坂和 正敏 (Masatoshi SAKAWA)
Graduate School of Engineering
Hiroshima University

1　はじめに

現実の社会においては，取り扱う環境の複雑かつ大規模化により，不確実なデータや情報に基づいて意思決定を行わなければならない場合がますます増えつつある．これまで，不確実性あるいはあいまい性を伴う状況下での意思決定を行う場合には，主に確率計画的アプローチとファジィ計画的アプローチの 2 つが考えられてきた．確率計画法においては，2 段階問題 [1, 2] が考えられ，機会制約条件計画問題として，期待値モデル，分散最小化モデル，確率最大化モデル [3] および満足水準最適化モデル [4, 5] が考えられている．一方，ファジィパラメータが目的関数や制約式に含まれる場合においては，Zimmermann [6] による可能性線形計画法や坂和ら [7, 8] による対話型ファジィ満足化手法，乾口ら [9, 10] による様相性最適化モデルなどが考えられている．

これらのモデルにおいては，ランダム性とファジィ性が別々に扱われ，問題に含まれるパラメータがそれぞれ，確率変数およびファジィ数として与えられてきた．しかし，例えば農産物の価格は，需要量や生産量に依存し，さらに需要量や生産量も経済状況や気候，降水量など確率的に変動する要因によって変化する一方で，それぞれの事象が生起したときの価格をはっきりと定めることは難しい場合も多い．すなわち，確率変数の実現値は確定値ではなく，専門家の知識と経験によってファジィ数（一般にはファジィ集合）として表されることが自然な場合もある．このような状況においては，農産物の単位あたりの利益係数はファジィランダム変数 [11] として表すことができ，総利益を最大化する農業計画問題はファジィランダム変数を目的関数に含む線形計画問題として定式化できる．近年，このような確率的不確実性とあいまい性を同時に含む状況下での数理計画として，ファジィランダム変数を含む線形計画問題や多目的計画問題を扱った研究がなされている [12, 13, 14].

本論文では，ファジィランダム変数係数を目的関数に含む多目的線形計画問題に対して，可能性測度および必然性測度 [15] の概念と確率計画法における確率最大化および満足水準最適化モデル基づいたモデルを提案し，意思決定者の満足解を対話を通して導出する対話型ファジィ満足化手法 [16] の拡張を試みる．

2　可能性測度および必然性測度を用いた確率最大化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法

2.1　定式化

次のようなファジィランダム多目的線形計画問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & \tilde{\bar{C}}_i \boldsymbol{x}, \quad i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \triangleq \{\boldsymbol{x} \in R^n | A\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} \end{array}\right\} \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は n 次元決定変数列ベクトル，A は $m \times n$ 係数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元列ベクトルである．また，$\tilde{\bar{\boldsymbol{C}}}_i = (\tilde{\bar{C}}_{i1}, \ldots, \tilde{\bar{C}}_{in})$, $i = 1, \ldots, k$, であり，次のメンバシップ関数により特性づけられるファジィランダム変数である．

$$\mu_{\tilde{\bar{C}}_{ij}}(t) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\bar{d}_{ij} - t}{\bar{\alpha}_{ij}}\right) & (t \leq \bar{d}_{ij}) \\ \\ R\left(\dfrac{t - \bar{d}_{ij}}{\bar{\beta}_{ij}}\right) & (t \geq \bar{d}_{ij}),\ i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{2}$$

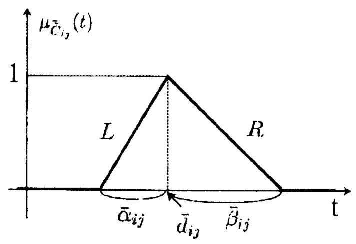

図 1: ファジィランダム変数係数を特性付けるメンバシップ関数

ここで，$L(t) \triangleq \max\{0,\ l(t)\}$ は，$[0,\ \infty) \to [0,\ 1]$ で定められる実数値関数，$l(t)$ は $l(0) = 1$ を満たす強意単調減少関数とする．R についても $R(t) \triangleq \max\{0,\ r(t)\}$ とし，同様の条件を満たすものとする．また $\bar{\boldsymbol{d}}_i, \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i, \bar{\boldsymbol{\beta}}_i, i = 1, \ldots k$ はそれぞれ，平均値 m_i である確率変数 $\bar{t}_i$ によって，$\bar{\boldsymbol{d}}_i = \boldsymbol{d}_i^1 + \bar{t}_i \boldsymbol{d}_i^2$, $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i = \boldsymbol{\alpha}_i^1 + \bar{t}_i \boldsymbol{\alpha}_i^2$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}_i = \boldsymbol{\beta}_i^1 + \bar{t}_i \boldsymbol{\beta}_i^2$ と表される n 次元確率変数行ベクトルである．

係数 $\tilde{\bar{\boldsymbol{C}}}_j$, $j = 1, \ldots, n$ は L-R ファジィ数において中心が確率変数となっているファジィランダム変数ベクトルであるため，拡張原理に基づく L-R ファジィ数の演算を用いて計算すると，目的関数を表すファジィランダム変数 $\tilde{\bar{Y}}_i$ は次のようなメンバシップ関数に特性づけられる．

$$\mu_{\tilde{\bar{Y}}_i}(y) = \begin{cases} L\left(\dfrac{\bar{\boldsymbol{d}}_i \boldsymbol{x} - y}{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i \boldsymbol{x}}\right) & (y \leq \bar{\boldsymbol{d}}_i \boldsymbol{x}) \\ \\ R\left(\dfrac{y - \bar{\boldsymbol{d}}_i \boldsymbol{x}}{\bar{\boldsymbol{\beta}}_i \boldsymbol{x}}\right) & (y \geq \bar{\boldsymbol{d}}_i \boldsymbol{x}),\ i = 1, \ldots, k \end{cases} \tag{3}$$

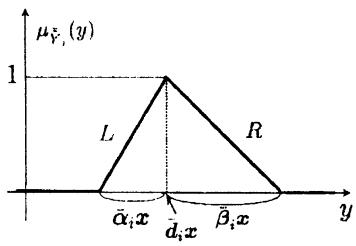

図 2: 目的関数に対応するファジィランダム変数を特性付けるメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{\bar{Y}}_i}(y)$ の例

ここで，意思決定者の人間としての判断のあいまい性を考慮すれば，問題 (1) の目的関数に対して，"だいたい f_1 以下である"というあいまいな目標をもつものと考えられる．このあいまいさを考慮に入れた目標をファジィ目標として，次のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{G}_i}$ で特性づけられるファジィ集合で表す．

$$\mu_{\tilde{G}_i}(y) = \begin{cases} 1, & y \le g_i^1 \\ g_i(y), & g_i^1 \le y \le g_i^0 \\ 0, & g_i^0 \le y \end{cases} \tag{4}$$

ここで，g_i は狭義単調減少連続関数である．

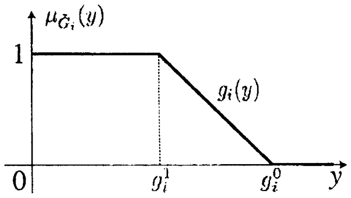

図 3: ファジィ目標 $\mu_{\tilde{G}_i}(y)$ の例

2.2 可能性測度を用いた確率最大化モデル

2.2.1 定式化と等価確定問題への変換

問題 (1) は，目的関数にファジィランダム変数を含んでいるため，通常の確定問題と同じように目的関数を最小化することはできない．ゆえに，ファジィ計画や確率計画と同様に何らかの解釈に基づいた最適化基準に基づいた最適化モデルを考えることが必要になる．

ここで，ファジィ理論において扱われてきた概念として Klir[17] によって導入されたベイグネスとアンビギュイティに着目する．ベイグネスとは境界がはっきりしないというあいまい性を表し，またアンビギュイティとは多くの可能性のうちのどれであるか特定できないあいまい性を表す．本論文で扱うファジィランダム変数は，ある事象が起こったときの確率変数の実現値そのものがあいまいである状況を扱う概念であり，確率変数の実現値に対するアンビギュイティを扱っているといえる．一方，Zadeh によって定義されたファジィ事象 [18] は，例えば，サイコロを振る場合において「大きな目の出る」事象など，あいまいさを含む事象について，その生起確率など様々な性質を扱うための概念であり，確率変数の実現値に関するベイグネスを扱ったものと解釈することができる．

ファジィ計画法において，アンビギュイティを扱ったアプローチは一般に可能性計画とよばれ，可能性線形計画 [6] や様相性最適化 [9] などが考えられている．本論文では，以上のような考察に基づいて，従来の可能性および確率計画を拡張したモデル化を試みる．

まず，目的関数値の可能性分布 $\mu_{\tilde{G}_i}$ のもとで，「だいたい g_i^1 以下である」可能性の度合いは可能性測度を用いて次のように与えられる．

$$\Pi_{\tilde{\bar{Y}}_i}(\tilde{G}_i) = \sup_y \min\left\{\mu_{\tilde{\bar{Y}}_i}(y),\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\right\},\ i = 1, \ldots, k \tag{5}$$

したがって，意思決定者が，ファジィ目標が満たされる可能性の度合いを最大化したいと考えるならば，問題 (1) に対して次の問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & \Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i), \quad i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{6}$$

問題 (6) では，$\mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y)$ の値が確率的に変動するために，決定変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ が与えられたとしても，目的関数である $\Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i)$ の値が確率的に変化する．したがって，この問題は確率計画問題とみなすことができる．確率計画法における代表的なモデルとしては，期待値最適化モデル，分散最小化モデル，確率最大化モデルおよび満足水準最適化モデルが考えられているが，本節では，確率最大化モデルに基づいて，ファジィ目標が満たされる満足度がある志望水準以上であるという確率を最大化するという次の問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & Pr[\Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i)\ge h_i], \quad i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{7}$$

ここで，任意の根元事象に対して，$\Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i)\ge h_i \;\; i=1,\ldots,k$ は，次のように変形することができる．

$$\begin{aligned}
&\sup_y \min\left\{\mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y),\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\right\}\ge h_i\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \exists y:\mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y)\ge h_i,\ \ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\ge h_i\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \exists y: L\left(\frac{\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x}-y}{\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i\boldsymbol{x}}\right)\ge h_i,\ R\left(\frac{y-\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x}}{\bar{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{x}}\right)\le h_i,\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\ge h_i\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \exists y:\{\bar{\boldsymbol{d}}_i-L^*(h_i)\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i\}\boldsymbol{x}\le y\le\{\bar{\boldsymbol{d}}_i+R^*(h_i)\bar{\boldsymbol{\beta}}_i\}\boldsymbol{x},\ y\le\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)\\
&\quad\Leftrightarrow\quad \{\bar{\boldsymbol{d}}_i-L^*(h_i)\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i\}\boldsymbol{x}\le\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)
\end{aligned}$$

ここで $L^*(h_i)$ および $\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)$ は擬逆関数であり，次のように表される．

$$\begin{aligned}
L^*(h_i) &= \sup\{r|L(r)>h_i, r\ge 0\}\\
\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i) &= \sup\{r|\mu_{\tilde{G}_i}(r)\ge h_i\}
\end{aligned}$$

さらに，全ての $\boldsymbol{x}\in X$ に対して，$\{\boldsymbol{d}_i^2-L^*(0)\boldsymbol{\alpha}_i^2\}\boldsymbol{x}>0,\ i=1,\ldots,k$ であるとすると，確率変数 $\bar{t}_i$ の分布関数 $T_i(\cdot)$ に対する仮定より，

$$\begin{aligned}
Pr[\Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i)\ge h_i] &= Pr[\{\bar{\boldsymbol{d}}_i-L^*(h_i)\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i\}\boldsymbol{x}\le\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)]\\
&= Pr[(\boldsymbol{d}_i^1+\bar{t}_i\boldsymbol{d}_i^2)\boldsymbol{x}-L^*(h_i)(\boldsymbol{\alpha}_i^1+\bar{t}_i\boldsymbol{\alpha}_i^2)\boldsymbol{x}\le\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)]\\
&= Pr\left[\bar{t}_i\le\frac{\{L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1-\boldsymbol{d}_i^1\}\boldsymbol{x}+\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2-L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\}\boldsymbol{x}}\right]\\
&= T_i\left(\frac{\{L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1-\boldsymbol{d}_i^1\}\boldsymbol{x}+\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2-L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\}\boldsymbol{x}}\right)
\end{aligned}$$

となるので，

$$p_i(\boldsymbol{x})=T_i\left(\frac{\{L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1-\boldsymbol{d}_i^1\}\boldsymbol{x}+\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2-L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\}\boldsymbol{x}}\right)$$

とおくと，問題 (7) は

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & p_i(\boldsymbol{x}),\ i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{8}$$

という確定的な多目的計画問題に等価的に書き換えられる．

2.2.2 対話型ファジィ満足化手法の適用

多目的計画問題 (8) の各目的関数 $p_i(\boldsymbol{x})$ に対する意思決定者のあいまい性を考慮するために,「$p_i(\boldsymbol{x})$ をだいたいある値以上にしたい」というようなファジィ目標を導入すると, 問題 (8) は次のような問題に書き直される.

$$\max_{\boldsymbol{x}\in X}(\mu_1(p_1(\boldsymbol{x})),\ldots,\mu_k(p_k(\boldsymbol{x}))) \tag{9}$$

ここで, 問題 (9) において, 意思決定者は各ファジィ目標に対する自己の志望水準を反映した基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i$, $i=1,\ldots,k$ を, 対応するミニマックス問題

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & \displaystyle\max_{i=1,\ldots,k}\{\bar{\mu}_i-\mu_i(p_i(\boldsymbol{x}))\}\\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{10}$$

を解いて得られた結果を考慮して対話的に更新しながら, 満足解を導出するという対話型ファジィ満足化手法 [16] の適用を試みる.

問題 (10) は, 補助変数 v を用いると

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & v\\ \text{subject to} & \bar{\mu}_i-\mu_i(p_i(\boldsymbol{x}))\le v,\ \ i=1,\ldots,k\\ & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{11}$$

となり, 等価的に

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & v\\ \text{subject to} & p_i(\boldsymbol{x})\ge \mu_i^*(\bar{\mu}_i-v),\ \ i=1,\ldots,k\\ & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{12}$$

と変形される. このとき $\mu_i^*(s)$ は擬逆関数であり, 次のように表される.

$$\mu_i^*(s)=\inf\{r|\mu_i(r)>s\},\quad i=1,\ldots,k$$

また, 分布関数 $T_i(\cdot)$ が連続かつ単調非減少関数であると仮定すれば, 問題 (12) は

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & v\\ \text{subject to} & \dfrac{\{L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1-\boldsymbol{d}_i^1\}\boldsymbol{x}+\mu_{\tilde{G}_i}^*(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2-L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\}\boldsymbol{x}}\ge T_i^*(\mu_i^*(\bar{\mu}_i-v)),\ i=1,\ldots,k\\ & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{13}$$

となる. このとき, $T^*(s)$ は擬逆関数であり, 次のように表される.

$$T^*(s)=\inf\{r|T_i(r)>s\},\quad i=1,\ldots,k$$

ここで, 問題 (13) の最小の v を求めることは, 実行可能解が存在する最小の v を求めることと等価である. いま, 全ての $\bar{\mu}_i$ $i=1,\ldots,k$ の最大値を $\bar{\mu}_{\max}$ とし, 各 $\mu_i(\cdot)$ の最大値と最小値を $\mu_{i,\max}$, $\mu_{i,\min}$ とすれば,

$$\bar{\mu}_{\max}-\max_{i=1,\ldots,k}\mu_{i,\max}\le v\le\bar{\mu}_{\max}-\max_{i=1,\ldots,k}\mu_{i,\min}$$

が成立する. そこで, v の値を 2 分法のアルゴリズムにより離散的に変化させて, 問題 (13) の制約式の実行可能解の存在する最小の v の値を求めればよい. v を固定したとき, この問題は線形計画問題となるので, シンプレックス法の適用が可能となる. したがって, 2 分法と 2 段階シンプレックス法の第 1 段に基づくアルゴリズムによりこの問題が解決できる.

問題 (13) に対する実行可能解の存在する最小の v の値 v^* が求まれば，問題 (13) の制約式に v^* を代入し，最も重要であると考えられる目的関数 (ここでは $i=1$ とする) を用いて，v^* に対応した $\boldsymbol{x}^*$ を一意的に決定するため，次の線形分数計画問題を解く．

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & \dfrac{-\{L^*(h_1)\boldsymbol{\alpha}_1^1-\boldsymbol{d}_1^1\}\boldsymbol{x}-\mu^*_{\tilde{G}_1}(h_1)}{\{\boldsymbol{d}_1^2-L^*(h_1)\boldsymbol{\alpha}_1^2\}\boldsymbol{x}} \\ \text{subject to} & \dfrac{\{L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1-\boldsymbol{d}_i^1\}\boldsymbol{x}+\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2-L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\}\boldsymbol{x}} \geq T_i^*(\mu_i^*(\bar{\mu}_i-v^*)),\ i=2,\dots,k \\ & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{14}$$

この線形分数計画問題 (14) は，Charnes と Cooper の変数変換法 [19]

$$t=1/(\{\boldsymbol{d}_1^2-L^*(h_1)\boldsymbol{\alpha}_1^2\}\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{y}=t\cdot\boldsymbol{x},\ \ t>0$$

を導入するとともに，$\tau_i=T_i^*(\mu_i^*(\bar{\mu}_i-v^*))$ とすると，問題 (14) は次のような問題に変換される．

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & -\{L^*(h_1)\boldsymbol{\alpha}_1^1-\boldsymbol{d}_1^1\}\boldsymbol{y}-\mu^*_{\tilde{G}_1}(h_1)\cdot t \\ \text{subject to} & [\tau_i\{\boldsymbol{d}_i^2-L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^2\}+\{\boldsymbol{d}_i^1-L^*(h_i)\boldsymbol{\alpha}_i^1\}]\boldsymbol{y}-\mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)\cdot t\leq 0,\ i=2,\dots,k \\ & \{\boldsymbol{d}_1^2-L^*(h_1)\boldsymbol{\alpha}_1^2\}\boldsymbol{y}=1,\ A\boldsymbol{y}-t\cdot\boldsymbol{b}\leq\boldsymbol{0},\ -t\leq-\delta,\ \boldsymbol{y}\geq 0,\ t\geq 0\end{array}\right\} \tag{15}$$

ただし，δ は十分小さい正数とする．

この問題 (15) は線形計画問題であり，求解手法としてシンプレックス法の適用が可能となる．ゆえに，意思決定者の満足解を対話を通して導出する対話型ファジィ満足化手法は次のような手順で表される．

手順 1: $\min_{\boldsymbol{x}\in X} E[\bar{d}_i]\boldsymbol{x}$ および $\max_{\boldsymbol{x}\in X} E[\bar{d}_i]\boldsymbol{x},\ i=1,\dots,k$ を求める．

手順 2: 手順 1 で得られた個別の最小値と最大値に基づいて，各目的関数に対するファジィ目標を特性づけるメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{G}_i}(\cdot),\ i=1,\dots,k$ を決定する．

手順 3: 満足水準 $h_i,\ i=1,\dots,k$ の値を設定し，$\max_{\boldsymbol{x}\in X} p_i(\boldsymbol{x})$ および $\min_{\boldsymbol{x}\in X} p_i(\boldsymbol{x}),\ i=1,\dots,k$ を求める．

手順 4: 手順 3 で得られた個別の最大値と最小値に基づいて，$p_i(\boldsymbol{x}),\ i=1,\dots,k$ に対するファジィ目標を特性づけるメンバシップ関数 $\mu_i(\cdot),\ i=1,\dots,k$ を決定する．

手順 5: 基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i,\ i=1,\dots,k$ を意思決定者が設定する．

手順 6: 設定された基準メンバシップ値に対して，問題 (13) の実行可能解が存在する最小の v を 2 分法と 2 段階シンプレックス法の第 1 段を用いて求める．

手順 7: 手順 6 で求めた v を v^* として問題 (15) を解き，対応する問題 (14) の最適解 $\boldsymbol{x}^c$ と各メンバシップ関数値 $\mu_i(p_i(\boldsymbol{x}^c)),\ i=1,\dots,k$ を求める．

手順 8: 現在の解に満足なら終了．そうでなければ手順 5 に戻る．

2.3 必然性測度を用いた確率最大化モデル

2.3.1 定式化と等価確定問題への変換

前節では，目的関数に対する目標が実現する可能性を考え，可能性測度を用いた確率最大化モデルを提案した．意思決定者が目標の実現する可能性に関して楽観的に意思決定を行う場合には，可能性測度を用いることが有用であるが，目標を実現されることが要請されるような場合や意思決定者がリスクを回避する

ために悲観的な意思決定を好む場合には，あまり適当であるとは言えない．したがって，本節では，そのような場合に有効な意思決定モデルとして，次のような必然性測度を用いた確率最大化モデルを提案する．

ここで，目的関数を表すファジィランダム変数を特性付けるメンバシップ関数を可能性分布とみなすとき，$\mu_{\tilde{G}_i}$ のもとで「だいたい g_1 以下である」必然性の度合いは次の式で与えられる．

$$N_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i) = \inf_y \max\left\{1 - \mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y),\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\right\} \tag{16}$$

したがって，意思決定者が目的関数に対するファジィ目標が満たされる必然性の度合いを最大化したいと考えるならば，問題 (1) に対して，

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & N_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i),\ i = 1, \dots, k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{17}$$

という問題を考える．問題 (17) は，$\mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y)$ の値が確率的に変動するために確率計画問題とみなすことができる．したがって，ここでも確率計画法における確率最大化モデルに基づいて，意思決定者が，必然性の度合い $N_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i)$ がある満足水準 h_i 以上となる確率を最大化するという次の問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & Pr[N_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i) \geq h_i],\ i = 1, \dots, k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{18}$$

ここで，任意の根元事象に対して，$N_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i) \geq h_i \quad i = 1, \dots, k$ は，次のように変形することができる．

$$\begin{aligned} & \inf_y \max\left\{1 - \mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y),\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\right\} \geq h_i \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \forall y : 1 - \mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y) < h_i \Rightarrow \mu_{\tilde{G}_i}(y) \geq h_i \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \forall y : \{\bar{\boldsymbol{d}}_i - L^*(1 - h_i)\boldsymbol{\alpha}_i\}\boldsymbol{x} < y < \{\bar{\boldsymbol{d}}_i + R^*(1 - h_i)\boldsymbol{\beta}_i\}\boldsymbol{x} \Rightarrow\ y \leq \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i) \\ & \quad \Leftrightarrow \quad \{\bar{\boldsymbol{d}}_i + R^*(1 - h_i)\boldsymbol{\beta}_i\}\boldsymbol{x} \leq \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i) \end{aligned}$$

さらに，全ての $\boldsymbol{x} \in X$ に対して，$\{\boldsymbol{d}_i^2 + R^*(1)\boldsymbol{\beta}_i^2\}\boldsymbol{x} > 0,\ i = 1, \dots, k$ であるとすると，確率変数 $\bar{t}_i$ の分布関数 $T_i(\cdot)$ に対する仮定より，

$$\begin{aligned} Pr[N_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i) \geq h_i] &= Pr[\{\bar{\boldsymbol{d}}_i + R^*(1 - h_i)\bar{\boldsymbol{\beta}}_i\}\boldsymbol{x} \leq \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)] \\ &= Pr[(\boldsymbol{d}_i^1 + \bar{t}_i\boldsymbol{d}_i^2)\boldsymbol{x} + R^*(1 - h_i)(\boldsymbol{\beta}_i^1 + \bar{t}_i\boldsymbol{\beta}_i^2)\boldsymbol{x} \leq \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)] \\ &= Pr\left[\bar{t}_i \leq \frac{-\{\boldsymbol{d}_i^1 + R^*(h_i)\boldsymbol{\beta}_i^1\}\boldsymbol{x} + \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2 + R^*(1 - h_i)\boldsymbol{\beta}_i^2\}\boldsymbol{x}}\right] \\ &= T_i\left(\frac{-\{\boldsymbol{d}_i^1 + R^*(1 - h_i)\boldsymbol{\beta}_i^1\}\boldsymbol{x} + \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2 + R^*(1 - h_i)\boldsymbol{\beta}_i^2\}\boldsymbol{x}}\right) \end{aligned}$$

となるので，

$$p_i(\boldsymbol{x}) = T_i\left(\frac{-\{\boldsymbol{d}_i^1 + R^*(1 - h_i)\boldsymbol{\beta}_i^1\}\boldsymbol{x} + \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2 + R^*(1 - h_i)\boldsymbol{\beta}_i^2\}\boldsymbol{x}}\right)$$

とおけば，問題 (7) は

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & p_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, \dots, k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{19}$$

という等価な一般の多目的計画問題に置き換えられる．

2.3.2 対話型ファジィ満足化手法の適用

問題 (19) に対して前節と同様，対話型ファジィ満足化手法の適用を試みる．まず，多目的計画問題 (19) の各目的関数 p_i に対する意思決定者のあいまい性を考慮するために，「$p_i(\boldsymbol{x})$ をだいたいある値以上にしたい」というようなファジィ目標を導入し，各ファジィ目標に対する自己の志望水準を反映した基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i$, $i = 1, \ldots, k$ との差の最大値を最小化するという次の問題を考える．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\max_{i=1,\ldots,k} \{\bar{\mu}_i - \mu_i(p_i(\boldsymbol{x}))\} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{20}$$

問題 (20) は，等価的に，

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & \bar{\mu}_i - \mu_i(p_i(\boldsymbol{x})) \leq v, \quad i = 1, \ldots, k \\ & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{21}$$

となる．いま，各メンバシップ関数 $\mu_i(\cdot)$ が実行可能領域 X 上で連続かつ狭義単調増加になるように設定されているとすれば，問題 (21) は

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & p_i(x) \geq \mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i - v), \quad i = 1, \ldots, k \\ & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{22}$$

と表される．ここで，分布関数 $T_i(\cdot)$ が連続かつ狭義単調増加であるという仮定を考慮すれば，問題 (22) は

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & v \\ \text{subject to} & \dfrac{-\{\boldsymbol{d}_i^1 + R^*(1-h_i)\boldsymbol{\beta}_i^1\}\boldsymbol{x} + \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2 + R^*(1-h_i)\boldsymbol{\beta}_i^2\}\boldsymbol{x}} \geq T_i^{-1}(\mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i - v)), \ i = 1, \ldots, k \\ & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{23}$$

と表される．ここで，問題 (23) の最小の v を求めることは，実行可能解が存在する最小の v を求めることと等価であり，v を固定したときの実行可能性を 2 分法と 2 段階シンプレックス法の第 1 段に基づくアルゴリズムにより確かめることができる．

問題 (23) に対する実行可能解の存在する最小の v の値 v^* が求まれば，問題 (23) の制約式に v^* を代入し，最も重要であると考えられる目的関数 (ここでは $i = 1$ とする) を用いて，v^* に対応した $\boldsymbol{x}^*$ を一意的に決定するため，次の線形分数計画問題を解く．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & \dfrac{\{\boldsymbol{d}_1^1 + R^*(1-h_1)\boldsymbol{\beta}_1^1\}\boldsymbol{x} - \mu^*_{\tilde{G}_1}(h_1)}{\{\boldsymbol{d}_1^2 + R^*(1-h_1)\boldsymbol{\beta}_1^2\}\boldsymbol{x}} \\ \text{subject to} & \dfrac{-\{\boldsymbol{d}_i^1 + R^*(1-h_i)\boldsymbol{\beta}_i^1\}\boldsymbol{x} + \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i)}{\{\boldsymbol{d}_i^2 + R^*(1-h_i)\boldsymbol{\beta}_i^2\}\boldsymbol{x}} \geq T_i^{-1}(\mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i - v^*)), \ i = 2, \ldots, k \\ & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{24}$$

この線形分数計画問題 (24) は，前節と同様，Charnes と Cooper の変数変換法

$$t = 1/(\{\boldsymbol{d}_1^2 + R^*(1-h_1)\boldsymbol{\beta}_1^2\}\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{y} = t \cdot \boldsymbol{x}, \ \ t > 0$$

を用いて，さらに $\tau_i = T_i^{-1}(\mu_i^{-1}(\bar{\mu}_i - v^*))$ とすると，次のような問題に変換される．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & \{\boldsymbol{d}_1^1 + R^*(1-h_1)\boldsymbol{\beta}_1^1\}\boldsymbol{y} - \mu^*_{\tilde{G}_1}(h_1) \cdot t \\ \text{subject to} & [\tau_i\{\boldsymbol{d}_i^2 + R^*(1-h_i)\boldsymbol{\beta}_i^2\} + \{\boldsymbol{d}_i^1 + R^*(1-h_i)\boldsymbol{\beta}_i^1\}]\boldsymbol{y} - \mu^*_{\tilde{G}_i}(h_i) \cdot t \leq 0, \ i = 2, \ldots, k \\ & \{\boldsymbol{d}_1^2 + R^*(1-h_1)\boldsymbol{\beta}_1^2\}\boldsymbol{y} = 1, \ A\boldsymbol{y} - t \cdot \boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{0}, \ \ -t \leq -\delta, \ \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}, \ \ t \geq 0 \end{array}\right\} \tag{25}$$

ただし，δ は十分小さい正数とする．

以上から，ファジィランダム多目的線形計画問題に対して，必然性測度を用いた確率最大化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法は次のようになる。

手順 1: $\min_{\boldsymbol{x}\in X} E[\bar{d}_i]\boldsymbol{x}$ および $\max_{\boldsymbol{x}\in X} E[\bar{d}_i]\boldsymbol{x}$, $i=1,\dots,k$ を求める．

手順 2: 手順 1 で得られた個別の最小値と最大値に基づいて，各目的関数に対するファジィ目標を特性づけるメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{G}_i}(\cdot)$, $i=1,\dots,k$ を決定する．

手順 3: 満足水準 h_i, $i=1,\dots,k$ を設定し，$\max_{\boldsymbol{x}\in X} p_i(\boldsymbol{x})$ および $\min_{\boldsymbol{x}\in X} p_i(\boldsymbol{x})$, $i=1,\dots,k$ を求める．

手順 4: 手順 3 で得られた個別の最大値と最小値に基づいて，それぞれの $p_i(\boldsymbol{x})$, $i=1,\dots,k$ に対するファジィ目標を特性づけるメンバシップ関数 $\mu_i(\cdot)$, $i=1,\dots,k$ を決定する．

手順 5: 基準メンバシップ値を意思決定者が設定する．

手順 6: 設定された基準メンバシップ値に対して，問題 (22) の実行可能解が存在する最小の v を 2 分法と 2 段階シンプレックス法の第 1 段を用いて求める．

手順 7: 手順 6 で求めた v を v^* として問題 (24) を解き，対応する問題 (23) の最適解 x^c と各メンバシップ関数値 $\mu_i(p_i(x^c))$, $i=1,\dots,k$ を求める．

手順 8: 現在の解に満足なら終了．そうでなければ手順 5 に戻る．

3　可能性測度および必然性測度を用いた満足水準最適化モデルに基づく対話型ファジィ満足化手法

3.1　定式化

次のような多目的線形計画問題を考える。

$$\left.\begin{array}{ll}\text{minimize} & \bar{\tilde{C}}_i\boldsymbol{x},\ i=1,\dots,k\\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X\triangleq\{\boldsymbol{x}\in R^n|A\boldsymbol{x}\le\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}\ge\boldsymbol{0}\}\end{array}\right\}\tag{26}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ は n 次元決定変数列ベクトル，A は $m\times n$ 係数行列，$\boldsymbol{b}$ は m 次元列ベクトルである．また，$\bar{\tilde{C}}_i=(\bar{\tilde{C}}_{i1},\dots,\bar{\tilde{C}}_{in})$ であり，次のメンバシップ関数により特徴付けられるファジィランダム変数である．

$$\mu_{\bar{\tilde{C}}_{ij}}(t)=\begin{cases}\max\left(1-\dfrac{\bar{d}_{ij}-t}{\alpha_{ij}},0\right) & (t\le\bar{d}_{ij})\\[2ex] \max\left(1-\dfrac{t-\bar{d}_{ij}}{\beta_{ij}},0\right) & (t\ge\bar{d}_{ij}),\ i=1,\dots,k,\ \ j=1,\dots,n\end{cases}$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{d}}_i$ は，平均値ベクトル $\boldsymbol{m}_i$，分散共分散行列 V_i をもつ多次元正規分布に従う確率変数行ベクトルとし，α_{ij}, β_{ij} はそれぞれ左右の広がりを表す正数とする．

係数 $\bar{\tilde{C}}_{ij}$ はファジィ数において中心が確率変数となっているファジィランダム変数であるため，それぞれの根元事象に対して，拡張原理に基づくファジィ数の演算を用いて計算すると，目的関数を表すファジィランダム変数 $\bar{\tilde{Y}}_i$ は次のようなメンバシップ関数に特性づけられる．

$$\mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y)=\begin{cases}\max\left(1-\dfrac{\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x}-y}{\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{x}},0\right) & (y\le\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x})\\[2ex] \max\left(1-\dfrac{y-\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}},0\right) & (y\ge\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x}),\ i=1,\dots,k\end{cases}$$

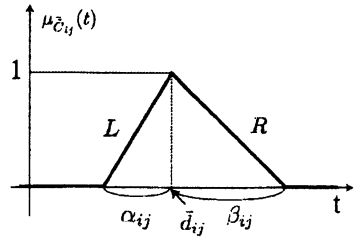

図 4: ファジィランダム変数係数のメンバシップ関数

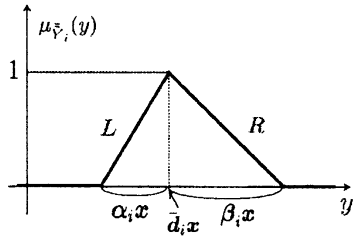

図 5: 目的関数のメンバシップ関数

ここで，意思決定者の人間としての判断の曖昧性を考慮し，問題 (26) の目的関数に対して，”だいたい g_i^1 以下である”というファジィ目標を導入し，次のメンバシップ関数 $\mu_{\tilde{G}_i}$ で特性づけられるファジィ集合で表す．

$$\mu_{\tilde{G}_i}(y) = \begin{cases} 1, & y \leq g_1 \\ \dfrac{y - g_i^0}{g_i^1 - g_i^0}, & g_1 \leq y \leq g_0 \\ 0, & g_0 \leq y \end{cases}$$

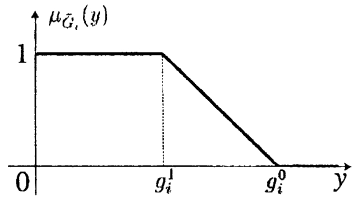

図 6: ファジィ目標のメンバシップ関数

3.2 可能性測度を用いた満足水準最適化モデル

3.2.1 定式化と等価確定問題への変換

目的関数値の可能性分布 $\mu_{\tilde{G}_i}$ のもとで,「だいたい g_i^1 以下である」可能性の度合いは次のように与えられる.

$$\Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i) = \sup_y \min\left\{\mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y),\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\right\}$$

このとき, 意思決定者がファジィ目標が満たされる可能性の度合いを最大化することを望むならば, 問題 (26) に対して次の問題を考えることが自然である.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & \Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i), \quad i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{27}$$

ここで, 問題 (27) において, $\mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}$ の値が確率的に変動するために, 決定変数ベクトル $\boldsymbol{x}$ が与えられたとしても, 目的関数である $\Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i)$ の値は確率的に変化する. したがって, この問題は確率計画問題とみなすことができる. 確率計画問題に対しては, 代表的なモデルとして期待値最適化モデル, 分散最小化モデル, 確率最大化モデル, 満足水準最適化モデルなどが提案されている. 本論文では, 満足水準最適化モデルに基づいて, 可能性の度合いが満足水準 h_i 以上である確率をある一定値以上であるという制約の下で, 満足水準 h_i を最大化するという次の問題を考える.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & h_i,\ i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & Pr[\Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i) \geq h_i] \geq \theta_i,\ i=1,\ldots,k \\ & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{28}$$

ここで, 任意の根元事象に対して, $\Pi_{\bar{\tilde{Y}}_i}(\tilde{G}_i) \geq h_i$ は, 次のように変形することができる.

$$\begin{aligned}
&\sup_y \min\left\{\mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y),\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\right\} \geq h_i \\
&\Leftrightarrow\quad \exists y : \mu_{\bar{\tilde{Y}}_i}(y) \geq h_i,\ \ \mu_{\tilde{G}_i}(y) \geq h_i \\
&\Leftrightarrow\quad \exists y : \max\left(1 - \frac{\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x} - y}{\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{x}}, 0\right) \geq h_i,\ \max\left(1 - \frac{y - \bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}}, 0\right) \geq h_i,\ \ \frac{y - g_i^0}{g_i^1 - g_i^0} \geq h_i \\
&\Leftrightarrow\quad \exists y : \{\bar{\boldsymbol{d}}_i - (1-h_i)\boldsymbol{\alpha}_i\}\boldsymbol{x} \leq y \leq \{\bar{\boldsymbol{d}}_i + h_i\boldsymbol{\beta}_i\}\boldsymbol{x},\ y \leq (g_i^1 - g_i^0)h_i + g_i^0 \\
&\Leftrightarrow\quad \{\bar{\boldsymbol{d}}_i - (1-h_i)\boldsymbol{\alpha}_i\}\boldsymbol{x} \leq (g_i^1 - g_i^0)h_i + g_i^0
\end{aligned}$$

このとき, 問題 (28) は次の問題 (29) に変形される.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & h_i,\ i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & Pr\left[\{\bar{\boldsymbol{d}}_i - (1-h_i)\boldsymbol{\alpha}_i\}\boldsymbol{x} \leq (g_i^1 - g_i^0)h_i + g_i^0\right] \geq \theta_i,\ i=1,\ldots,k \\ & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{29}$$

ただし, $\theta_i > 1/2$ と仮定する.

次に問題 (29) の確率制約式を等価確定条件に変換することを考えると,

$$\frac{\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x} - \boldsymbol{m}_i\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i \boldsymbol{x}}} \leq \frac{\{(1-h_i)\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{m}_i\}\boldsymbol{x} + (g_i^1 - g_i^0)h_i + g_i^0}{\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i \boldsymbol{x}}}$$

であるから, この不等式の左辺は標準正規分布に従う確率変数となる. したがって, 問題 (29) は次の等価確定問題に変形されることがわかる.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & h_i,\ i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \{\boldsymbol{m}_i - (1-h_i)\boldsymbol{\alpha}_i\}\boldsymbol{x} + K_{\theta_i}\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i \boldsymbol{x}} \leq (g_i^1 - g_i^0)h_i + g_i^0,\ i=1,\ldots,k \\ & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{30}$$

K_{θ_i} は $K_{\theta_i} = F^{-1}(\theta_i)$ を満たす標準正規分布の θ_i 分位点であり，$\theta_i > 1/2$ の仮定より $K_{\theta_i} > 0$ を満たす．また，(30) において，

$$\begin{aligned} & \{\boldsymbol{m}_i - (1-h_i)\boldsymbol{\alpha}_i\}\boldsymbol{x} + K_{\theta_i}\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i \boldsymbol{x}} \le (g_i^1 - g_i^0)h_i + g_i^0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{(\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{m}_i)\boldsymbol{x} - K_{\theta_i}\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i \boldsymbol{x}} + g_i^0}{\boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{x} - g_i^1 + g_i^0} \ge h_i \end{aligned}$$

より

$$z_i(\boldsymbol{x}) = \frac{(\boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{m}_i)\boldsymbol{x} - K_{\theta_i}\sqrt{\boldsymbol{x}^T V_i \boldsymbol{x}} + g_i^0}{\boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{x} - g_i^1 + g_i^0}$$

とおくと，問題 (30) は，次のような多目的非線形分数計画問題となる．

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & z_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, \ldots, k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{31}$$

(29) から (31) の変形において示されるように，h_i を最大化することは $z_i(\boldsymbol{x})$ を最大化することと等価となる，すなわち，$z_i(\boldsymbol{x})$ の値が求まれば，i 番目のファジィ目標が満たされる可能性の度合いが $z_i(\boldsymbol{x})$ 以上になることが確率 θ_i 以上で保障されることを意味している．

3.2.2 対話型ファジィ満足化手法の適用

多目的計画問題 (31) の各目的関数 $z_i(\boldsymbol{x})$ に対する意思決定者の人間としての判断のあいまい性を考慮するために,「$z_i(\boldsymbol{x})$ をだいたいある値以上にしたい」というようなファジィ目標を導入すると，問題 (31) は次のような問題に書き直される．

$$\max_{\boldsymbol{x} \in X} (\mu_1(z_1(\boldsymbol{x})), \ldots, \mu_k(z_k(\boldsymbol{x}))) \tag{32}$$

問題 (32) に対して，意思決定者が各ファジィ目標に対する自己の志望水準を反映した基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i$，$i = 1, \ldots, k$ を，対応するミニマックス問題

$$\left.\begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\max_{i=1,\ldots,k} \{\bar{\mu}_i - \mu_i(z_i(\boldsymbol{x}))\} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\} \tag{33}$$

を解いて得られた結果を考慮して対話的に更新しながら，満足解を導出するという対話型ファジィ満足化手法の適用を試みる．ここで，ファジィ目標は次の線形メンバシップ関数

$$\mu_i(z_i(\boldsymbol{x})) = \begin{cases} 1 & (z_i(\boldsymbol{x}) > z_i^1) \\ \dfrac{z_i(\boldsymbol{x}) - z_i^0}{z_i^1 - z_i^0} & (z_i(\boldsymbol{x}) \le z_i^1) \end{cases}$$

に特性付けられるとし，

$$z_i^1 = \max_{\boldsymbol{x} \in X} z_i(\boldsymbol{x}),\ i = 1, \ldots, k$$

とする．このとき，$\bar{\mu}_i - \mu_i(z_i(\boldsymbol{x}))$ は，$z_i(\boldsymbol{x}) \le z_i^1$ において，分子が凸関数で分母が線形である分数関数であり，準凸関数となることがわかる．したがって，基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i$ が与えられたとき，ミニマックス問題 (33) の大域的最適解は，次の拡張 Dinkelbach 型アルゴリズム [20] によって求めることが可能である．

[ミニマックス問題を解く手順]

(29) から (31) への変形ではメンバシップ関数の線形性が重要な役割を果たしていることに注意する．

$N_i(\boldsymbol{x}), Q_i(\boldsymbol{x})$ は連続かつ $\boldsymbol{x} \in X$ の実数値関数であるとし，全ての $\boldsymbol{x} \in X$ に対して，$Q_i(\boldsymbol{x}) > 0$ とする．さらに，$\boldsymbol{x} \in X$ に対して，$N_i(\boldsymbol{x})$ は凸関数，$Q_i(\boldsymbol{x})$ は凹関数であるとする．このとき，次の問題

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{1 \le i \le k} \left\{ \frac{N_i(\boldsymbol{x})}{Q_i(\boldsymbol{x})} \right\}$$

を解く手順を示す．

手順 1: 任意の実行可能解 $\boldsymbol{x}_1 \in X$ に対して，$q_1 = \max_{1 \le i \le k} \dfrac{N_i(\boldsymbol{x}_1)}{Q_i(\boldsymbol{x}_1)} \ge 0$ を求め，手順 2 へ進む．

手順 2: $l =: 1$ とする．

手順 3: 次の問題を解く．

$$\left.\begin{array}{ll} \min & \lambda_l \\ \text{s.t.} & \dfrac{1}{Q_i(\boldsymbol{x}_l)}(N_i(\boldsymbol{x}) - q_l Q_i(\boldsymbol{x})) \le \lambda_l \\ & \boldsymbol{x} \in X \end{array}\right\}$$

そして得られた解を $\boldsymbol{x}_{l+1}$ とし，手順 4 へ進む．

手順 4: $\lambda_k < \delta$ $(\delta > 0)$ ならば解を得て終了．そうでなければ，$q_{k+1} = \max_{1 \le i \le k} \dfrac{N_i(x_{k+1})}{Q_i(\boldsymbol{x}_{k+1})}$ を計算し，$l =: l+1$ として，手順 3 へ戻る．

上記のアルゴリズムの手順 3 で解かれる問題は，$N_i(x)$ と $Q_i(x)$ がそれぞれ凸関数と凹関数であることから凸計画問題になっており，逐次 2 次計画法などの汎用的な非線形計画法によって大域的な最適解を求めることが可能である．

以上から，意思決定者との対話によって満足解を得るアルゴリズムは次のようになる．

手順 1: $\min_{\boldsymbol{x} \in X} E[\bar{\boldsymbol{d}}_i \boldsymbol{x}]$ および $\max_{\boldsymbol{x} \in X} E[\bar{\boldsymbol{d}}_i \boldsymbol{x}]$ を求め，目的関数に対するファジィ目標を特性づける線形メンバシップ関数 $\mu_{\tilde{G}_i}$ を決定する．ここで，$E[\cdot]$ は期待値を意味する．

手順 2: ファジィ目標が満たされる可能性の度合いに関する確率制約式の充足水準 θ_i を設定する．

手順 3: $\min_{\boldsymbol{x} \in X} z_i(\boldsymbol{x})$ および $\max_{\boldsymbol{x} \in X} z_i(\boldsymbol{x})$ を求め，$z_i(\boldsymbol{x})$ に対するファジィ目標を特性づける線形メンバシップ関数 μ_i を決定する．

手順 4: 初期の基準メンバシップ値 $\bar{\mu}_i$, $i = 1, \ldots, k$ を 1 に設定する．

手順 5: 設定された基準点 $\bar{\mu}$，任意の実行可能解 $x_1 \in X$ に対して，ミニマックス問題 (33) を解く．もし，$\mu_i(z_i(\boldsymbol{x})) \le 0$ ならば，$\mu_i(z_i(\boldsymbol{x})) := 0$ とする．また，得られた決定変数における目的関数の期待値 $E[\tilde{\bar{Y}}_i]$ を求める．

手順 6: 得られた $\mu_i(z_i(\boldsymbol{x}))$ および $E[\tilde{\bar{Y}}_i]$ に満足ならば終了．そうでなければ，基準点 $\bar{\mu}$ を更新して手順 5 へ戻る．

まず，手順 1 では元の問題 (26) の目的関数に対するファジィ目標を設定し，手順 2 では，そのファジィ目標が満たされる可能性の度合いに関する確率レベルを与えている．手順 3 では，元の問題の目的関数に対してではなく，満足水準 $z_i(\boldsymbol{x})$ に対するファジィ目標を設定し，手順 4 でその満足度に対する初期の基準メンバシップ値を与えている．与えられた基準メンバシップ値に対して，手順 5 で問題を解き，満足するまで基準メンバシップ値の更新を繰り返す．

$\theta_i < 1/2$ の場合は凸性が満たされないので一般に大域的最適解を得ることは困難になる．この場合は，例えば，GENOCOP[21] など非凸非線形計画問題を解くために有効とされている手法を用いることが考えられる．

3.3 必然性測度を用いた満足水準最適化モデル

3.3.1 定式化と等価確定問題への変換

目的関数値の可能性分布 $\mu_{\tilde{\bar{Y}}_i}$ のもとで,「だいたい g_i^1 以下である」というファジィ目標が満たされる必然性の度合いは次の式で与えられる.

$$N_{\tilde{\bar{Y}}_i}(\tilde{G}_i) \;=\; \inf_y \max\left\{1-\mu_{\tilde{\bar{Y}}_i}(y),\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\right\}$$

したがって，意思決定者がファジィ目標が満たされる必然性の度合いを最大化したいと望むならば，問題 (26) に対して次の問題を考えることが自然となる.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & N_{\tilde{\bar{Y}}_i}(\tilde{G}_i),\ i=1,\dots,k\\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{34}$$

問題 (34) に対して，前節までと同様，満足水準最適化モデルに基づいて定式化を行うと次のようになる.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & h_i,\ i=1,\dots,k\\ \text{subject to} & Pr[N_{\tilde{\bar{Y}}_i}(\tilde{G}_i)\ge h_i]\ge\theta_i,\ i=1,\dots,k\\ & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{35}$$

ここで，任意の根元事象に対して，$N_{\tilde{\bar{Y}}_i}(\tilde{G}_i)\ge h_i\ \ i=1,\dots,k$ は，次のように変形することができる.

$$\begin{array}{ll} & \inf_y \max\left\{1-\mu_{\tilde{\bar{Y}}_i}(y),\ \mu_{\tilde{G}_i}(y)\right\}\ge h_i\\ \Leftrightarrow & \forall y: \dfrac{\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x}-y}{\boldsymbol{\alpha}_i\boldsymbol{x}}<h_i,\ \dfrac{y-\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}}<h_i \Rightarrow \dfrac{y-g_i^0}{g_i^1-g_i^0}\ge h_i\\ \Leftrightarrow & \forall y: \{\bar{\boldsymbol{d}}_i-h_i\boldsymbol{\alpha}_i\}\boldsymbol{x}<y<\{\bar{\boldsymbol{d}}_i+h_i\boldsymbol{\beta}_i\}\boldsymbol{x}\Rightarrow\ y\le(g_i^1-g_i^0)h_i+g_i^0\\ \Leftrightarrow & \{\bar{\boldsymbol{d}}_i+h_i\boldsymbol{\beta}_i\}\boldsymbol{x}\le(g_i^1-g_i^0)h_i+g_i^0\end{array}$$

したがって，問題 (35) は次の問題 (36) に変形される.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & h_i,\ i=1,\dots,k\\ \text{subject to} & Pr\left[\{\bar{\boldsymbol{d}}_i+h_i\boldsymbol{\beta}_i\}\boldsymbol{x}\le(g_i^1-g_i^0)h_i+g_i^0\right]\ge\theta_i,\ i=1,\dots,k\\ & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{36}$$

ここで，$\theta_i>1/2$ と仮定する.

次に問題 (36) の確率制約式を等価確定条件に変換することを考えると,

$$\frac{\bar{\boldsymbol{d}}_i\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^TV_i\boldsymbol{x}}}\le\frac{(g_i^1-g_i^0)h_i+g_i^0-\{\boldsymbol{m}_i+h_i\boldsymbol{\beta}_i\}\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x}^TV_i\boldsymbol{x}}} \tag{37}$$

であるから，この不等式の左辺は標準正規分布に従う確率変数となることを用いると，問題 (36) は次の等価確定問題に変形されることがわかる.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{maximize} & h_i,\ i=1,\dots,k\\ \text{subject to} & \{\boldsymbol{m}_i+h_i\boldsymbol{\beta}_i\}\boldsymbol{x}+K_{\theta_i}\sqrt{\boldsymbol{x}^TV_i\boldsymbol{x}}\le(g_i^1-g_i^0)h_i+g_i^0,\ i=1,\dots,k\\ & \boldsymbol{x}\in X\end{array}\right\} \tag{38}$$

K_{θ_i} は $K_{\theta_i}=F^{-1}(\theta_i)$ を満たす標準正規分布の θ_i 分位点であり，$\theta_i>1/2$ の仮定より $K_{\theta_i}>0$ を満たす.

ここで,

$$z_i'(\boldsymbol{x})=\frac{-\boldsymbol{m}_i\boldsymbol{x}-K_{\theta_i}\sqrt{\boldsymbol{x}^TV_i\boldsymbol{x}}+g_i^0}{\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{x}-g_i^1+g_i^0}$$

とおくと，(38) は，

$$\left.\begin{array}{ll} \text{maximize} & z_i^l(\boldsymbol{x}),\ i=1,\ldots,k \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}\in X \end{array}\right\}$$

と変形できる．この問題において，目的関数は分母と分子が、それぞれ線形関数と凹関数である分数関数であるため，前節と同様の手法によって，意思決定者の満足解を対話を通して導出することができる．

4 おわりに

本論文では，ファジィランダム変数を目的関数の係数に含む多目的線形計画問題を取り扱い，目的関数に対して意思決定者の人間としての判断のあいまい性を考慮したファジィ目標を導入した後，その目標を満たす可能性の度合い，および必然性の度合いを最大化する問題として定式化を行った．

このとき，可能性測度および必然性測度が確率的に変動することに着目し，確率計画法における確率最大化モデルに基づいて定式化を行い，意思決定者の満足解を導出するための対話型ファジィ満足化手法を提案した．また，対話過程において繰り返し解かれる問題が 2 分法と 2 段階シンプレックス法の第 1 段を用いて求解可能であることを示した．

次に確率計画法における満足水準最適化モデルに基づいて定式化を行い，等価な確定問題が多目的非線形分数計画問題となることを示した．さらに，意思決定者の満足解を導出するための対話型ファジィ満足化手法を提案し，対話において繰り返し解くべき問題が拡張 Dinkelbach 型アルゴリズムを用いて求解可能であることを示した．また，最後に簡単な数値例を与えた．

今後の課題としては，可能性および必然性測度を用いたモデルに対して，期待値最適化モデルや分散最小化モデルに基づいた定式化やその解法を考えることなどが挙げられる．

参考文献

[1] G.B. Dantzig, Linear programming under uncertainty, *Management Science*, **1**, 197–206 (1955).

[2] E.M.L. Beale, On optimizing a convex function subject to linear inequalities, *Journal of the Royal Statistical Society*, **17**, 173–184 (1955).

[3] A. Charnes, W.W. Cooper, Deterministic equivalents for optimizing and satisficing under chance constraints, *Operations Research*, **11**, 18–39 (1963).

[4] S. Kataoka, A stochastic programming model, *Econometrica*, **31**, 181–196 (1963).

[5] A.M. Geoffrion, Stochastic programming with aspiration or fractile criteria, *Management Science*, **13**, 672–679 (1967).

[6] H.-J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy Sets and Systems* **1**, 45–56 (1978).

[7] M. Sakawa, *Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization*, Plenum Press, New York, (1993).

[8] M. Sakawa and H. Yano, An interactive fuzzy satisficing method for generalized multiobjective linear programming problems with fuzzy parameters, Fuzzy Sets and Systems, **35**, 125–142 (1990).

[9] 乾口雅弘，市橋秀友，田中英夫，様相性概念に基づくファジィ選好関係の拡張とその性質，計測自動制御学会論文集，**24**, 738–745 (1988)．

[10] 乾口雅弘，市橋秀友，久米靖文，ファジィ数理計画問題の様相的構成，システム制御情報学会論文誌，**2**, 69–79 (1989).

[11] M.L. Puri, and D.A. Ralescu, Fuzzy random variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **114**, 409–422 (1986).

[12] G.-Y. Wang, and Z. Qiao, Linear programming with fuzzy random variable coefficients, *Fuzzy Sets and Systems*, **57**, 295–311 (1993).

[13] M.K. Luhandjula, and M.M. Gupta, On fuzzy stochastic optimization, *Fuzzy Sets and Systems*, **81**, 47–55 (1996).

[14] H. Katagiri, and H. Ishii, Linear programming problem with fuzzy random constraint, *Mathematica Japonica*, **52**, 123–129 (2000).

[15] L.A. Zadeh, Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility, *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3–28 (1978).

[16] M. Sakawa, H. Yano, and T. Yumine, An interactive fuzzy satisficing method for multiobjective linear-programming problems and its application, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, **SMC-15**(6), 720–729 (1985).

[17] G.J. Klir and T.A. Folger, Fuzzy Sets, Uncertainty, and Information, Prentice Hall, 1988.

[18] L.A. Zadeh, Probability measure of fuzzy events, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **23**, 421–427, (1968).

[19] A. Charnes and W.W. Cooper, Programming with linear fractional functions, *Naval Research Logistic Quarterly*, **77**, 321–335 (1956).

[20] J. Borde, and J.P. Crouzeix, Convergence of a Dinkelbach-type algorithm in generalized fractional programming, Zeitschrift fur Operations Research **31**, 31–54 (1987).

[21] 坂和正敏，矢内克裕，非凸非線形計画問題に対する不動小数点型遺伝的アルゴリズム：改良型GENOCOP Ⅲ，電子情報通信学会論文誌，**J81-A**, 90–97 (1998).