数理解析研究所講究録 1412 巻 2005 年 125-129

フーリエ積分と調和関数の境界値

山根英司, 関西学院大学物理学科
Hideshi YAMANE
Department of Physics, Kwansei Gakuin University
yamane@ksc.kwansei.ac.jp

§1. 既知の諸結果

n 変数多項式 $P(z)$ に対して $z\in P^{-1}(0)$ のとき $P(D)e^{i\langle z,t\rangle}=0$ が成り立つ. ここで $D=(-i\partial/\partial t_j)_{j=1,\ldots,n}$ である. P が重複因子を持つときは, 偏微分方程式 $P(D)u(t)=0$ には指数関数だけでなくて指数多項式の解も存在する (常微分方程式の場合はたいへん良く知られている). V 上の適当な測度に関してこのような指数関数・指数多項式解を z について積分すれば, 多くの解が作れる. ここまでは自明であるが, 逆に任意の解がこの方法で作れるという事実は驚くべきことである. すなわち, Ehrenpreis の基本原理によれば, 有界開凸集合における任意の滑らかな解はこの形の積分表示式を持つことが知られている. そのような測度の存在は従来 Hahn-Banach の定理によってなされていた (最も入手しやすい文献は [6]). 同定理は Zorn の補題によって証明されるのだから, 測度の存在証明は全く非構成的なものである.

しかし後になって, Ehrenpreis 型積分表示を与える測度あるいはカレントを具体的に書き表す試みが多変数複素解析の人々によってなされている. 例えば [2], [3], [10] がそうであり, 筆者は [3] の大きな影響を受けている. また, [4] は可積分系のテクニックを使うという興味深い試みをしている.

これらの研究にも関わらず, 古典的な積分公式, 特にポアソン積分と Ehrenpreis 型積分表示式の関係は明らかになっていなかった. 本稿では球および半空間のポアソン積分を Ehrenpreis 型に展開する公式を述べる. また, 半空間における一般化されたディリクレ問題についても触れる.

§2. 球におけるポアソン積分

$B_n=\{t\in\mathbb{R}^n;|t|=(\sum_{j=1}^n t_j^2)^{1/2}<1\}$ は $\mathbb{R}_t^n$ の単位球とし, $u(t)\in C^0(\bar{B}_n)$ は B_n の調和関数とする. そのディリクレ境界値を $f\in C^0(S^{n-1})$ と表す. $V=\{z\in\mathbb{C}^n;z^2=\sum_{j=1}^n z_j^2=0\}$ とおくと $V\setminus\{0\}$ は V の smooth locus であって, 複素多様体としての自然な向きを持つ. $\int_V$ は $V\setminus\{0\}$ に沿う積分の $(1,1)$-カレントとする.

$x_j = \mathrm{Re}\, z_j, y_j = \mathrm{Im} z_j\ (j = 1, \ldots, n),\ x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ とおく．$dx \wedge dy = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j$ とする．このとき，$B_n\,(n \geq 3)$ において

$$u(t) = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_V \Big(1 - \frac{n-2}{2|y|}\Big) f(y/|y|) e^{-i\langle z,t\rangle} e^{-|y|} \Big(\frac{dx \wedge dy}{|y|}\Big)^{n-1}$$

が成り立つ．したがって $u(t)$ は $e^{-i\langle z,t\rangle}, y/|y| \in \mathrm{supp}\, f$ の重ね合わせである．$n = 2$ のときは次のように少し違った式になる:

$$u(t) = \frac{1}{4\pi} \int_V f(y/|y|) e^{-|y|} \Big(e^{-i\langle z,t\rangle} - \frac{1}{2}\Big) \frac{dx \wedge dy}{|y|}.$$

§3. 半空間におけるポアソン積分

半空間 $H = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ の調和関数について考えよう．H の点を (x, y), $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}_+$, と表す．$H$ の境界は G と書こう．harmonic Hardy space $h^2(H)$ を次のように定義する:

$$h^2(H) = \{u(x,y);\ u \text{ は } H \text{ で調和で } ||u||_{h^2} = \sup_{y>0} ||u(\cdot, y)||_{L^2} < \infty\}.$$

$f(x) \in L^2(G)$ のポアソン積分 $P[f]$ は

$$P[f](x,y) = \frac{2}{C_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{y}{(|t-x|^2 + y^2)^{(n+1)/2}} f(t) dt$$

で定義される．ここで C_n は n 次元球面 S^n の面積である．

$f(x) \in L^2(G)$ に対し，H において $N_{0,n}[f]$ を次の式で定義する:

$$\begin{aligned} N_{0,n}[f](x,y) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\xi|y + ix\cdot\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-|\xi|y + ix\cdot\xi - i\xi\cdot t} f(t) dt d\xi. \end{aligned}$$

定理 1 *1)* と *2)* において $f(x)$ は $L^2(G)$ の任意の元とする．

1) 調和関数 $N_{0,n}[f](x,y)$ は G 上で $\underset{y \to +0}{\mathrm{l.i.m.}}\, u(\cdot, y) = f(\cdot)$ を満たす $h^2(H)$ の唯一の元である．

2) $N_{0,n}[f](x,y) = P[f](x,y)$.

3) 任意の $u(x,y) \in h^2(H)$ に対して境界値 $f(x) := \underset{y \to +0}{\mathrm{l.i.m.}}\, u(\cdot, y) \in L^2(G)$ が well-defined で $u(x,y) = N_{0,n}[f](x,y)$ が成り立つ．したがって u は調和な指数関数 $\exp(-|\xi|y + ix\cdot\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, の重ね合わせで表され，その重みは境界値で決まる．

§4. 半空間における(一般化された)ノイマン問題

$m \geq 1,\ n > 2m$ として次の問題を解こう:

$$H \text{ 上で } \Delta_{x,y} u(x,y) = 0;\ G \text{ 上で } \frac{\partial^m u}{\partial y^m}(x,+0) = f(x).$$

$f(x) \in L^1(G) \cap L^2(G)$ のとき H 上で

$$N_{m,n}[f](x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{e^{-|\xi|y + i\xi\cdot(x-t)}}{(-|\xi|)^m} f(t)\,dt\,d\xi$$

とおく. 核は非有界である.

定理 2 $f(x)$ を $L^1(G) \cap L^2(G)$ の任意の元とするとき次が成り立つ:

1) $N_{m,n}[f](x,y)$ は

$$\operatorname*{l.i.m.}_{y \to +0} \frac{\partial^m N_{m,n}[f]}{\partial y^m}(\cdot, y) = f(\cdot)$$

をみたす $h^2(H)$ の唯一の元である.

2) $N_{1,n}[f](x,y) = -\dfrac{(n-2)!\,C_{n-1}}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t)\,dt}{(|t-x|^2 + y^2)^{(n-1)/2}}.$

非負整数 N に対し, (a,b) の N 次実係数斉次多項式全体がなす線型空間を $\mathrm{Homog}(N)$ と表す. $\{a^{N-k}b^k; k \text{ は偶数}\}$ で張られる部分空間を $\mathcal{H}_N$ と表す.

定理 3 $m \geq 2,\ n > 2m$ のとき,

$$V_{m,n} = V_{m,n}(a,b) = \int_0^\pi \frac{\sin^{n-2}\theta\,d\theta}{(a + ib\cos\theta)^{-m+n}}$$

とおくと, これは $(a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ について実解析的であり, 次が成り立つ:

1) $N_{m,n}[f](x,y) = \dfrac{(-1)^m (n-m-1)!\,C_{n-2}}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} V_{m,n}(y, |t-x|) f(t)\,dt.$

2) n が偶数で $b > 0$ ならば, $f_{m,n} \in \mathcal{H}_{-m+n-1}$ と $g_{m,n} \in \mathcal{H}_{m-2}$ が存在して $V_{m,n} = \dfrac{f_{m,n}}{b^{n-2}(a^2+b^2)^{-m+(n+1)/2}} + \dfrac{g_{m,n}}{b^{n-2}}$ が成り立つ.

3) n が奇数で $b > 0$ ならば, $f_{m,n} \in \mathcal{H}_{m-2}$ と $g_{m,n} \in \mathcal{H}_{-m+n-2}$ が存在して $V_{m,n} = \dfrac{f_{m,n}}{b^{n-2}} \tan^{-1}\dfrac{b}{a} + \dfrac{g_{m,n}}{b^{n-3}(a^2+b^2)^{-m+(n+1)/2}}$ が成り立つ.

$m=2$ のときはもっと詳しいことが分かる．下の二つの命題で示すように

$$V_{2,n}=\int_0^\pi \frac{\sin^{n-2}\theta d\theta}{(a+ib\cos\theta)^{n-2}}$$

について，$\{V_{2,n}\}_{n\geq 5}$ を計算する簡単な方法がある．

命題 1 $a>0,\ b>0$ とする．多項式の列 $\{G_N\}_{N=2,3,4,\ldots}$ を次の漸化式で定める：

$$\begin{cases} G_{N+1}=\dfrac{1}{b^2}\Big\{(2N-2)(a^2+b^2)G_N+(2N-3)!!a\Big\}, \\ G_2=\dfrac{1}{b^2}\Big\{-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}+a\Big\}. \end{cases}$$

このとき 4 以上の偶数 n に対して

$$V_{2,n}=-\frac{\pi}{(n-4)!!}\frac{G_{\frac{n}{2}}}{(a^2+b^2)^{(n-3)/2}}$$

が成り立つ．

命題 2 $a>0,\ b>0$ とする．多項式の列 $\{\widehat{G}_N\}_{N=1,2,3,\ldots}$ を次の漸化式で定める：

$$\begin{cases} \widehat{G}_{N+1}=\dfrac{1}{b^2}\Big\{(2N-1)(a^2+b^2)\widehat{G}_N+(2N-2)!!a\Big\}, \\ \widehat{G}_1=0. \end{cases}$$

このとき 5 以上の奇数 n に対して

$$V_{2,n}=\frac{2\tan^{-1}(b/a)}{b^{n-2}}-\frac{2}{(n-4)!!}\frac{\widehat{G}_{(n-1)/2}}{(a^2+b^2)^{(n-3)/2}}$$

が成り立つ．

参考文献

[1] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, "Harmonic function theory", Springer, New York, 1992.

[2] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger, "Residue currents and Bezout identities", Birkhäuser, Basel, 1993.

[3] B. Berndtsson and M. Passare, *Integral formulas and an explicit version of the fundamental principle*, J. Funct. Anal., **84** (1989), 358-372.

[4] A. S. Fokas, *A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs*, Proc. R. Soc. Lond. A, **453** (1997), 1411-1443.

[5] S. J. Gardiner, *The Dirichlet and Neumann problems for harmonic functions in half-spaces, J. London Math. Soc.* **24(2)**, no. 3(1981), 502-512.

[6] L. Hörmander, "An introduction to complex analysis in several variables, third edition (revised)", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1990.

[7] V. V. Karachik, *The generalized Neumann problem for harmonic functions in a half-space, Differ. Uravn.* **35(7)**(1999), 942-947. (Transl. *Differential Equations* **35(7)**, 949-955.)

[8] H. Yamane, *Fourier integral representation of harmonic functions in terms of a current*, J. Math. Soc. Japan., **54**(4) (2002), 901-909.

[9] H. Yamane, *Fourier-Ehrenpreis integral formula for harmonic functions*, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[10] A. Yger, *Formules de division et prolongement méromorphe*, Springer Lecture Notes in Math., **1295** (1987), 226-283.