数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 10-15



# Lawson 対応している曲面のエンドの自己交叉性について

神戸大学大学院自然科学研究科 藤森 祥一 (Shoichi Fujimori)
Department of Mathematics, Kobe University

$M \subset \mathbb{C}$ を単連結 Riemann 面, $z_0 \in M$ とする. $M$ 上の有理型関数 $g$ と $M$ 上の正則 1 次微分形式 $\omega$ に対して, $g$ の極と $\omega$ の零点が一致し, $\omega$ の零点の位数が対応する $g$ の極の位数の 2 倍に等しいとする. このとき,

$$F_0 : M \ni z \mapsto \int_{z_0}^{z} \left(1-g^2, i(1+g^2), 2g\right) \omega \in \mathbb{C}^3$$

とおくと, $\Phi_0 := \mathrm{Re} F_0 : M \to \mathbb{R}^3$ は $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面となる (Weierstrass の表現公式). 一方, $F_1 : M \to SL(2, \mathbb{C})$ を

$$F_1^{-1} dF_1 = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega, \quad F_1(z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす写像とすると, $\Phi_1 := F_1 F_1^* : M \to \mathbb{H}^3$ は双曲空間 $\mathbb{H}^3$ 内の平均曲率 1 (CMC1) の曲面になる (Bryant の表現公式 [B, UY]). ただし $\mathbb{H}^3 = \mathbb{H}^3(-1) \cong \{AA^* \mid A \in SL(2, \mathbb{C}\}$ とみなす. $\Phi_0(M)$, $\Phi_1(M)$ の第 1 基本形式はともに

$$ds^2 = (1+g\bar{g})^2 \omega \bar{\omega} \tag{1}$$

で与えられる. すなわち, 1 つの対 $(g, \omega)$ (Weierstrass data と呼ばれる) に対して, $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面と $\mathbb{H}^3$ 内の CMC1 曲面で互いに等長的なものが, 局所的には構成することができる ([L] 参照). このような曲面の組を, ここでは **Lawson 対応している曲面**の組と呼ぶことにする.

$\Phi_0$, $\Phi_1$ に対して, Hopf 微分と呼ばれる $M$ 上の正則 2 次微分 $Q$ はともに

$$Q = \omega dg$$

で与えられる.

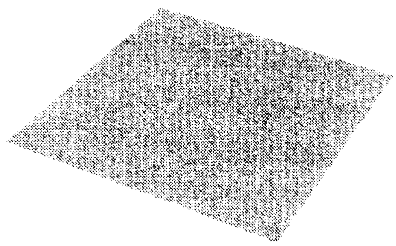
$(g, \omega)$ を単連結な CMC1 曲面 $\Phi_1 : M \to \mathbb{H}^3$ の Weierstrass data とする. このとき, 任意の $\theta \in [0, \pi)$ に対して, Weierstrass data $(g, e^{i\theta}\omega)$ から構成される極小曲面 $\Phi_{0,\theta} : M \to \mathbb{R}^3$ は, $\Phi_1$ と Lawson 対応してい

ることが (1) から分かる．逆に，[N, §177] より次の補題が成り立つことも確かめられる．

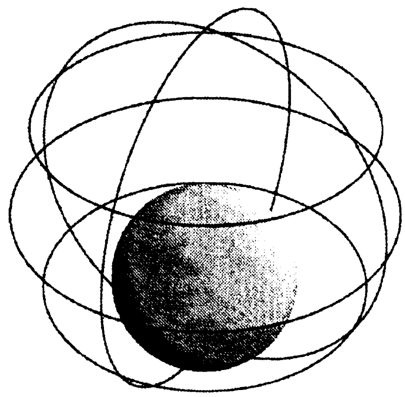
**補題 1.** $\Phi_1 : M \to \mathbb{H}^3$ を単連結な CMC1 曲面，$(g, \omega)$ を $\Phi_1$ の Weierstrass data，$\Phi_0 : M \to \mathbb{R}^3$ を $\Phi_1$ と Lawson 対応していると極小曲面とする．このとき，ある $\theta \in [0, \pi)$ が存在して，$(g, e^{i\theta}\omega)$ は $\Phi_0$ の Weierstrass data になる．

**例 2.** Lawson 対応している曲面の例を 4 組挙げる．各エンドの自己交叉性に注目されたい．

(i) $M = \mathbb{C}$，$(g, \omega) = (0, dz)$．このとき，$\Phi_0$，$\Phi_1$ のエンドはともに自己交叉をもたない．

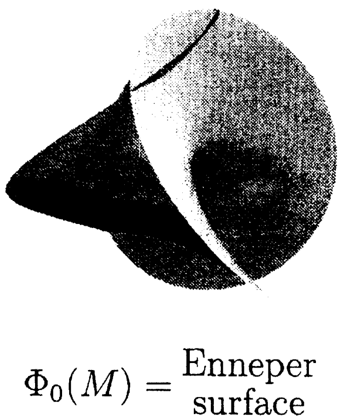


$\longleftrightarrow$

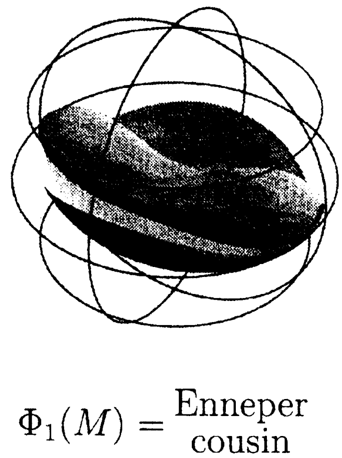


$\Phi_0(M) =$ 平面 $\Phi_1(M) =$ ホロ球面

(ii) $M = \mathbb{C}$，$(g, \omega) = (z, dz)$．このとき，$\Phi_0$，$\Phi_1$ のエンドはともに自己交叉をもつ．

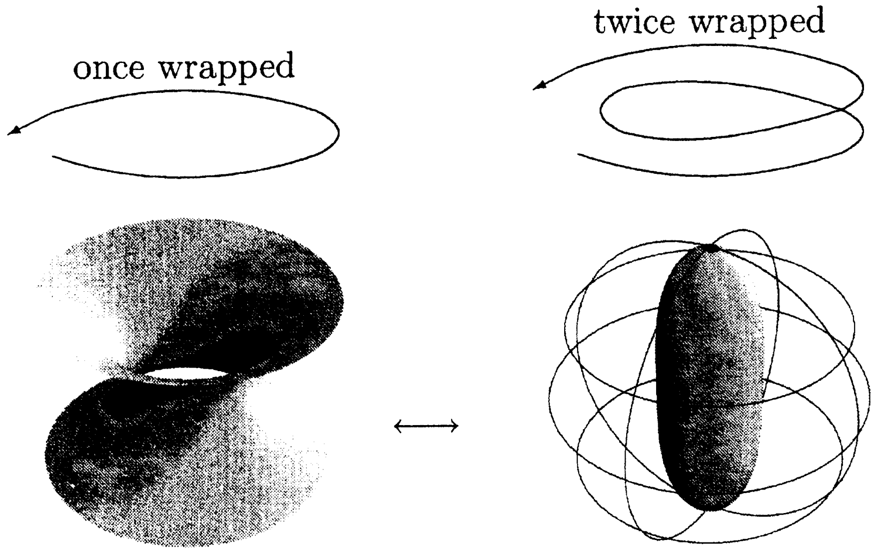


$\longleftrightarrow$



$\Phi_0(M) =$ Enneper surface $\Phi_1(M) =$ Enneper cousin

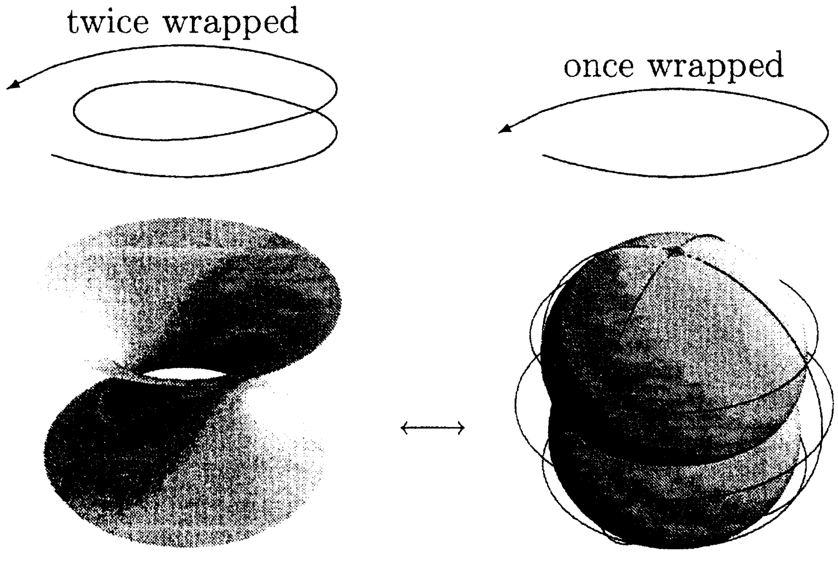
(iii) $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(g, \omega) = \left( z, \dfrac{n^2 - 1}{4} z^{-2} dz \right)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. このとき, $\Phi_0$ の各エンドは自己交叉をもたないが, $\Phi_1$ の各エンドは自己交叉をもつ.




$\Phi_0(M)$ =catenoid $\qquad$ $\Phi_1(M) =$ double cover of a catenoid cousin

$(n = 2)$

(iv) $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $(g, \omega) = \left( z^n, \dfrac{1 - n^2}{4n} z^{-1-n} dz \right)$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. このとき, $\Phi_0$ の各エンドは自己交叉をもつが, $\Phi_1$ の各エンドは自己交叉をもたない.




$\Phi_0(M) =$ double cover of a catenoid $\qquad$ $\Phi_1(M) =$ catenoid cousin

$(n = 2)$

Lawson 対応している曲面のエンドの自己交叉性について調べ, 次の結果を得た.

**定理 3.** ([F]) $\overline{M}$ をコンパクト Riemann 面, $M := \overline{M} \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ とする. $\Phi_1 : M \to \mathbb{H}^3$ を CMC1 固有はめ込み, $\Phi_0 : M \to \mathbb{R}^3$ を極小はめ込みとする. $\Phi_0$, $\Phi_1$ は Lawson 対応しており, $\Phi_0$, $\Phi_1$ の各エンドは自己交叉をもたないとする. このとき, $\Phi_0$, $\Phi_1$ の Hopf 微分はともに $\overline{M}$ 上正則になる.

**証明**. $\Delta_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \varepsilon\}$, $\Delta_\varepsilon^* = \Delta_\varepsilon \setminus \{0\}$ $(\varepsilon > 0)$ とする. $\varphi_1 : \Delta_\varepsilon^* \to \mathbb{H}^3$ を $\Phi_1$ の任意のエンドとする. $\varphi_0 : \Delta_\varepsilon^* \to \mathbb{R}^3$ を対応する極小曲面のエンドとする. [CHR, Theorem 10] より, $\varphi_1$ の全曲率は有限で, その Hopf 微分は原点で高々 2 位の極をもつから, [UY] より, $\varphi_1$ の Weierstrass data は

$$g(z) = z^\mu \hat{g}(z)\,, \quad \hat{g}(0) \neq 0\,, \qquad \omega = z^\nu \hat{w}(z)dz\,, \quad \hat{w}(0) \neq 0\,,$$

と表すことができる. ただし $\hat{g}$, $\hat{w}$ は $\Delta_\varepsilon$ 上の正則関数であり, $\mu$, $\nu \in \mathbb{R}$ は $\mu > 0$, $\nu \leq -1$, $\mu + \nu \in \mathbb{Z}$, $\mu + \nu \geq -1$ をみたす.

補題 1 より, ある $\theta \in [0, \pi)$ が存在して, $(g, e^{i\theta}\omega)$ は $\varphi_0$ の Weierstrass data になる. $g$ は $\varphi_0$ の Gauss 写像 と立体射影の合成写像と見なすことができる, すなわち, $G : \Delta_\varepsilon^* \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ を $\varphi_0$ の Gauss 写像とすると,

$$G(z) = \left( \frac{2\mathrm{Re}g(z)}{|g(z)|^2 + 1}, \frac{2\mathrm{Im}g(z)}{|g(z)|^2 + 1}, \frac{|g(z)|^2 - 1}{|g(z)|^2 + 1} \right)$$

が成り立つから, $g$ は $\Delta_\varepsilon^*$ 上 well-defined である. 故に $\mu \in \mathbb{N}$, 従って $-\nu \in \mathbb{N}$ が成り立つ.

$\varphi_0$ の第 1 成分, 第 2 成分はそれぞれ

$$\mathrm{Re} \int_{z_0}^{z} (1 - g^2) e^{i\theta} \omega\,, \quad -\mathrm{Im} \int_{z_0}^{z} (1 + g^2) e^{i\theta} \omega$$

であり, $g(0) = 0$ より $\lim_{z \to 0} G(z) = (0, 0, -1)$ である. よって $\varphi_0$ が自己交叉をもたないから $\nu = -2$ であり, また, $\varphi_0$ が $\Delta_\varepsilon^*$ 上 well-defined であるから $\hat{w}'(0) = 0$ である.

[ET, Lemma 2.4] より $\hat{g}(0)\hat{w}(0) = (1-\mu^2)/4\mu$ であるから, $\hat{g}(0) \neq 0$ かつ $\hat{w}(0) \neq 0$ より $\mu \neq 1$ である. さらに, [ET, Lemma 2.9] より

$$\hat{w}'(0) = \begin{cases} 2\hat{w}(0)^2\hat{g}(0) & (\mu = 2 \text{ のとき}), \\ 0 & (\mu \geq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから, $\hat{w}'(0) = 0$ より $\mu \neq 2$ である. 従って $\mu \geq 3$ が成り立つ.

よって, $\varphi_1$, $\varphi_0$ それぞれの Hopf 微分 $\omega dg$, $e^{i\theta}\omega dg$ の $z = 0$ における order は $\mu + \nu - 1 \geq 0$ となる. 従って, $\varphi_1$, $\varphi_0$ の Hopf 微分は $z = 0$ において極をもたない. □

この結果から次の系が導かれる.

**系 4.** ([F]) 上述の定理と同じ仮定の下で, 次の (I) から (III) の少なくとも 1 つが成り立てば, $\Phi_0(M)$ は平面であり, $\Phi_1(M)$ はホロ球面である:

(I) $\overline{M}$ の種数は 0,
(II) $M$ の全曲率は $-16\pi$ より大きい,
(III) $\Phi_1$ 自身が自己交叉をもたない.

**証明**. (I) $\overline{M}$ の種数が 0 ならば $\Phi_j$ $(j = 0, 1)$ の Hopf 微分は恒等的に 0 になる. よって $\Phi_j$ $(j = 0, 1)$ は全臍的になるから, $\Phi_0(M)$ は平面であり, $\Phi_1(M)$ はホロ球面である.

(II) $\overline{M}$ の種数を $\gamma$ とする. [JM, Theorem 4] より, $\Phi_0$ の各エンドが自己交叉をもたないための必要十分条件は

$$\int_M K dA = -4\pi(k + \gamma - 1) \tag{2}$$

が成り立つことである. ただし, $K$, $dA$ はそれぞれ $\Phi_0$ の Gauss 曲率, 面積要素とする.

[S] より, $k = 1$ ならば $\Phi_0$ は平面であり, $k = 2$ ならば $\Phi_0$ は catenoid であるが, catenoid の Hopf 微分は, 各エンドで 2 位の極をもつ. $k = 3$ のとき, (I) より $\gamma \geq 1$ であるが, [KS, Theorem 26] より, $\gamma = 1$ かつ $k = 3$ のとき, $\Phi_0$ の Hopf 微分は $\overline{M}$ 上正則にならない. 以上より, $k + \gamma < 5$ ならば, $\Phi_0$ は平面であるか, または $\Phi_0$ の Hopf 微分は $\overline{M}$ 上正則にならない. 定理 3 と (2) より, 結論を得る.

(III) $\Phi_1$ 自身が自己交叉をもたないならば, [CHR, Theorem 12] より, $\Phi_1$ はホロ球面であるか, または, $\Phi_1$ の Hopf 微分は各エンドで 2 位の極をもつ. よって, 定理 3 より, $\Phi_1$ はホロ球面であり, このとき, $\Phi_0$ は平面である. □

## 参考文献


[B] R. Bryant, *Surfaces of Mean Curvature One in Hyperbolic Space*, *Astérisque* **154-155** (1987), 321-347.

[CHR] P. Collin, L. Hauswirth and H. Rosenberg, *The geometry of finite topology Bryant surfaces*, Ann. of Math.(2) **153** (2001), 623-659.

[ET] R. Sá Earp and É. Toubiana, *On the geometry of constant mean curvature one surfaces in hyperbolic space*, Illinois J. Math.(2) **45** (2001), 371-401.

[F] S. Fujimori, *Minimal surfaces in Euclidean* 3*-space and there mean curvature* 1 *cousins in hyperbolic* 3*-space*, An. Acad. Bras. Ciênc., **75** (2003), 271–278.

[JM] L. Jorge and W. H. Meeks III, *The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature*, Topology, (2) **22** (1983), 203-221.

[KS] R. Kusner and N. Schmitt, *The spinor representation of minimal surfaces*, G.A.N.G. preprint [3.27].

[L] H. B. Lawson, *Complete minimal surfaces in* $S^3$, Ann. of Math.(2) **92** (1970), 335-374.

[N] J. C. C. Nitsche, Lectures on minimal surfaces, Vol.1, Cambridge University Press (1989).

[RUY] W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Period problems for mean curvature one surfaces in* $\mathbb{H}^3$ *(with application to surfaces of low total curvature)*, to appear in MSJ-IRI Tokyo proceedings.

[S] R. Schoen, *Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 791-809.

[UY] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature* 1 *in the hyperbolic* 3*-space*, Ann. of Math.(2) **137** (1993), 611-638.


*E-mail address*: `fujimori@math.kobe-u.ac.jp`