数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 62-69

等質なサブリーマン接触構造の同型群について

奈良女子大学大学院
北川 友美子 (Yumiko Kitagawa)
Division of Integrated Science, Nara Women's University

1 序

奇数次元多様体 M 上の分布 $E\subset TM$ が余次元 1 で非退化であるとき (M,E) を接触多様体とよぶ. E 上にリーマン計量 G が定義されているものを (E,G) と書いてサブリーマン接触構造とよび, (M,E,G) をサブリーマン接触多様体とよぶ.

サブリーマン接触多様体 (M,E,G) と (M',E',G') が isomorphic であるとは微分同型写像 $\varphi: M\to M'$ が存在して $\varphi_{*}E=E'$, $\varphi^{*}G'=G$ をみたすときをいう. 特に $(M,E,G)=(M',E',G')$ であるときそのような φ を自己同型写像 (automorphism) とよび, $\mathrm{Aut}(M,E,G):=\{\varphi: M\to M\mid\varphi: automorphism\}$ を自己同型群という. また, $\mathrm{Aut}(M,E,G)$ が M 上推移的であるとき, サブリーマン接触多様体 (M,E,G) は等質であるという.

ここでは, 等質なサブリーマン接触多様体の分類を問題にする. そのことは, その自己同型群 $\mathrm{Aut}(M,E,G)$ を考察することと密接に関係する. 等質なサブリーマン接触多様体の $\mathrm{Aut}(M,E,G)$ が群としてどれくらい多様性を持つかを調べたい. よく知られているように接触多様体 (M,E) の自己同型群は, 無限次元リー群であるが, サブリーマン接触多様体 (M,E,G) の自己同型群は, 接触構造 E のみでなくその上のリーマン計量 G をも不変にするという強い条件から, 有限次元リー群となると考えられる.

そこで自己同型群 $\mathrm{Aut}(M,E,G)$, あるいはそれに対応するリー環 L をより明示的に決定したい. そのためにそのリー環は接触リー環の部分リー環としてどのようにあらわれてくるかを調べ, 報告する.

(M,E,G) を $2n+1$ 次元のサブリーマン接触多様体とする. 点 $x_{0}\in M$ の近傍での局所座標 $(x^{1},\ldots,x^{n},y^{1},\ldots,y^{n},z)$ を用いて contact form ω を

$$\omega:=dz+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x^{i}dy^{i}-y^{i}dx^{i})$$

で表す. M の点 x_{0} での形式冪級数からなる formal function 全体の集合を $F(M)_{x_{0}}$ と書く.

形式的ベクトル場

$$\xi=\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{j=1}^{n}b_j\frac{\partial}{\partial y^j}+c\frac{\partial}{\partial z},\quad a_i,b_j,c\in F(M)_{x_0}$$

で

$$L_\xi\omega=\rho\omega\quad(\exists\rho\in F(M)_{x_0})$$

をみたすものを形式的無限小接触変換とよぶ．形式的無限小接触変換全体のなすリー環を C で表し，形式的接触リー環とよぶ．その構造についてはよく知られている [1]. 次に C の基本的な性質をあげておく．

$f\in F(M)_{x_0}$ にたいして

$$\begin{cases} <\xi_f,\omega>=f & \\ \xi_f\rfloor d\omega\equiv -df & \pmod{\omega}\end{cases}$$

によって，形式的ベクトル場 ξ が唯一つ定まり

$$L_\xi\omega=\rho\omega$$

をみたす．これにより，写像

$$F(M)_{x_0}\ni f\to\xi_f\in C$$

が得られるが，これは一対一上への写像である．

$$F(M)_{x_0}\supset H_p:=\text{linearspan}<\{x^\alpha y^\beta z^\gamma\mid|\alpha|+|\beta|+2|\gamma|-2=p\}>$$

を上の対応で C へ写す．これを $\mathfrak{c}_p$ と書くことにすると，C はベクトル空間として完全直和 $\hat{\bigoplus}_{p\in\mathbf{Z}}\mathfrak{c}_p$ と同型となり，C に重みつきの degree が入るがさらに次が成り立つ．

(i) $[\mathfrak{c}_p,\mathfrak{c}_q]\subset\mathfrak{c}_{p+q}$

(ii) $\mathfrak{c}_p=0\ (p<-2)$

(iii) $\dim\mathfrak{c}_{-2}=1,\dim\mathfrak{c}_{-1}=2n$
$[,]:\mathfrak{c}_{-1}\times\mathfrak{c}_{-1}\to\mathfrak{c}_{-2}$ は非退化．

(iv) $p\geq 0$, $x\in\mathfrak{c}_p$, $[x,y]=0$, $\forall y\in\mathfrak{c}_-(=\bigoplus_{q<0}\mathfrak{c}_q)$ ならば $x=0$ が成り立つ．

(v) graded Lie algebra $\bigoplus\mathfrak{c}_p$ は上の性質をみたすものの中で最大．

(vi) C は $\mathfrak{c}_p$ の完全直和 $\hat{\bigoplus}\mathfrak{c}_p$ にリー環として同型．

さて，$\mathrm{Aut}(M,E,G)$ のリー環を L とすると L は C の部分リー環である．

$C^p := \hat{\bigoplus}_{k\geq p}\mathfrak{c}_k$, $L^p := C^p \bigcap L$, $\mathfrak{l}_p := L^p/L^{p+1}$, $\mathfrak{l} := \bigoplus_{p\in\mathbf{Z}}\mathfrak{l}_p$
とおく．$\mathrm{Aut}(M,E,G)$ が M 上推移的ならば

(i) $\mathfrak{l}_{-2} = \mathfrak{c}_{-2}$

(ii) $\mathfrak{l}_{-1} = \mathfrak{c}_{-1}$

が成り立つ．さらに

$$\mathfrak{c}_0(g) := \{A \in \mathfrak{c}_0 \mid g(Au,v) + g(u,Av) = 0,\ u,v \in \mathfrak{c}_{-1}\}$$

とおくと，

(iii) $\mathfrak{l}_0 \subset \mathfrak{c}_0(g)$

である．但し，$g : \mathfrak{c}_{-1}\times\mathfrak{c}_{-1} \to \mathbf{R}$ を正定値内積とする．

そこで，最初の問題は $\mathfrak{c} = \bigoplus \mathfrak{c}_p$ の graded な部分リー環 $\mathfrak{l} = \bigoplus \mathfrak{l}_p$ で先の (i)(ii)(iii) をみたすものを決定することである．リー環 $\mathfrak{l}$ は有限次元であることが分かり，その最大次元も決まる．特に $\mathfrak{l}$ が最大次元をとるとき，そのリー環の構造ははっきりと定まる．第2の問題は，$\mathfrak{l}$ が確定したとき，フィルター付きリー環 L でその associated graded Lie algebra が $\mathfrak{l}$ に一致するものを決定または分類することである．ここでは特に3次元のサブリーマン接触多様体に限って考える．

2 Associated graded Lie algebra の決定

ここでは序章で述べた graded Lie algebra $\mathfrak{l}$ で (i)(ii)(iii) をみたすものを決定する．(M,E,g) をサブリーマン接触多様体とするとき，各点 $x \in M$ にたいして接触構造 E から graded Lie algebra $\mathfrak{h}(x) = \mathfrak{h}(x)_{-2} + \mathfrak{h}(x)_{-1}$ が自然に決まるが，その上にリーマン計量 $g : \mathfrak{h}(x)_{-1}\times\mathfrak{h}(x)_{-1} \to \mathbf{R}$ が定義された $(\mathfrak{h}(x), g_x)$ を考える．ここで，$\mathfrak{h}(x)_{-1} = E_x$, $\mathfrak{h}(x)_{-2} = T_xM/E_x$ であり，歪対称双線形写像 $\varphi : \mathfrak{h}(x)_{-1}\times\mathfrak{h}(x)_{-1} \to \mathfrak{h}(x)_{-2}$ が $\varphi(X,Y) := [X,Y]_x\ (mod E_x)$ で定義される．また，X,Y は，$u,v \in E_x$ について $X_x = u, Y_y = v$ となる E のセクションである．このような $(\mathfrak{h}(x), g_x)$ の標準形はどうなっているのだろうか．一般に，$2n$ 次元ベクトル空間 V と，その上の正定値内積 $\beta : V\times V \to \mathbf{R}$ と非退化な歪対称双線形写像 $\varphi : V\times V \to \mathbf{R}$ の組 (V,β,φ) について V の基 $\{e_1,\cdots,e_{2n}\}$ で，$\beta = \beta(e_i,e_j), A = \varphi(e_i,e_j)$ とするとき

$$\beta = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \mu_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_n \end{array}\right)$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ \hline 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \end{array}\right)$$

となるようなものが存在する．このことから，$(\mathfrak{h}(x), g_x)$ について，ある $\mathfrak{h}(x)_{-2}$ の基と $\mathfrak{h}(x)_{-1}$ の基により，上の意味での標準形で表現できる．そこで，$X_0 \in \mathfrak{c}_0(g)$ を標準形で表現することを考える．上述のことから分るように，ある実数 μ にたいして $\mathfrak{c}_{-2}$ の基 $\{f_0\}$ と $\mathfrak{c}_{-1}$ の基 $\{f_1, \cdots, f_{2n}\}$ で $[f_i, f_j] = 0$, $[f_i, f_{n+i}] = f_0$, $g(f_i, f_j) = \delta_{ij}$, $g(f_{n+i}, f_{n+j}) = \mu_{ij}\delta_{ij}$ となるようなものが存在する．これを用いると，

$$X_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \\ & \end{array}\right) + c \left(\begin{array}{c|ccc} 2 & & 0 & \\ \hline & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

と書ける．但し，

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

で $-{}^tA_{11} = A_{22}$．また，A_{12} と A_{21} はそれぞれ対称行列．さらに，

$$K = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \mu_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \mu_n \end{array}\right)$$

とするとき，${}^tAK + KA = 0$ をみたす．このことから X_0 のトレースは消えるので，$X_0 \in \mathfrak{c}_0(g)$ にたいして上の定数 $c = 0$ となる．そして次の命題が得られる．

Proposition 1 *Graded Lie algebra* $\mathfrak{l}$ についてその第一延長 $\mathfrak{l}_1$ より先は消える．すなわち $\mathfrak{l}$ は有限次元である．

証明の概略：$\mathfrak{l}_1$ の任意の元 x_1 について $x_1=0$ がいえればがよい．$x_0\in\mathfrak{c}_0(g)$ について，$\rho_{-1}(x_0):\mathfrak{l}_{-1}\to\mathfrak{l}_{-1}$ を $\rho_{-1}(x_0)(x_1):=[x_0,x_1]$ により定めると，x_0 の形から $trace(\rho_{-1}(x_0))=0$ となる．このことから，任意の $x_{-2}\in\mathfrak{l}_{-2}$ について $[x_0,x_{-2}]=0$ であることが分る．また，任意の $x_{-2}\in\mathfrak{l}_{-2}$, $x_{-1}\in\mathfrak{l}_{-1}$ について

$$[[x_1,x_{-2}],x_{-1}]+[[x_{-2},x_{-1}],x_1]+[[x_{-1},x_1],x_{-2}]=0$$

が成り立つ．ところが，$[x_{-2},x_{-1}]\in\mathfrak{l}_{-3}$ より，第二項目は消える．また，$[x_{-1},x_1]\in\mathfrak{l}_0$ なので，上述のことより $[[x_{-1},x_1],x_{-2}]=0$. だから任意の $x_{-1}\in\mathfrak{l}_{-1}$ について $[[x_1,x_{-2}],x_{-1}]=0$ が得られる．よって $[x_1,x_{-2}]=0$. ここで，$\Psi:\mathfrak{l}_{-1}\times\mathfrak{l}_{-1}\times\mathfrak{l}_{-1}\to\mathbf{R}$ を，$\Psi(u,v,w):=g([[x_1,u],v],w)$ で定めると，$[x_1,u]\in\mathfrak{c}_0(g)$ であることから，$\Psi(u,v,w)=-\Psi(u,w,v)$ である．また，$x_1,u,v\in\mathfrak{l}_{-1}$ にたいして Jacobi の恒等式，

$$[[x_1,u],v]+[[u,v],x_1]+[[v,x_1],u]=0$$

が成り立つが，第二項目が消えることから，$\Psi(u,v,w)=\Psi(v,u,w)$ であることが分る．このことより $\Psi(u,v,w)=0$ であり，リー環 $\mathfrak{l}$ が transitive であることから，$x_1=0$ が得られた.□

また，固有値 μ が定数で特に 1 のとき，

$$X_0=\left(\begin{array}{c|cc}0 & \multicolumn{2}{c}{0}\\ \hline \multirow{2}{*}{0} & A_{11} & A_{12}\\ & -A_{12} & A_{11}\end{array}\right)$$

と書ける．但し，A_{11} は歪対称で A_{12} は対称である．よって，X_0 の最大次元は n^2 で graded Lie algebra $\mathfrak{l}$ の最大次元は $(n+1)^2$ である．

3 Main Theorem

上述の最大次元 $(n+1)^2$ をとる graded Lie algebra $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_{-2}\oplus\mathfrak{l}_{-1}\oplus\mathfrak{l}_0$ の構造は以下のように決まる．

$\mathfrak{l}_{-2}=\mathbf{R}$, $\mathfrak{l}_{-1}=\mathbf{C}^n\simeq\mathbf{R}^{2n}$, $\mathfrak{l}_0=\mathfrak{u}(n)$ について，

(i) $[,]:\mathfrak{l}_{-2}\times\mathfrak{l}_0\to 0$

(ii) $[,]:\mathfrak{l}_0\times\mathfrak{l}_{-1}\to\mathfrak{l}_{-1}$

$[A,x]:=Ax\ (A\in\mathfrak{l}_0, x\in\mathfrak{l}_{-1})$

(iii) $[,]:\mathfrak{l}_0\times\mathfrak{l}_0\to\mathfrak{l}_0$

$[X,Y]:=XY-YX\ (X,Y\in\mathfrak{l}_0)$

(iv) $[,]:\mathfrak{l}_{-1}\times\mathfrak{l}_{-1}\to\mathfrak{l}_{-2}$

$[Z,W]:=Im<Z,W>$. 但し $<,>$ はエルミート内積.

このようにして，はっきり決まったリー環 $\mathfrak{l}$ にたいして grL と $\mathfrak{l}$ が同型となるような L はどれくらいあるのかということを考えたい．この様な問題の一般的な考察については [2] を参照されたい．

ここでは，$n=1$ のとき，すなわち次のような4次元の graded Lie algebra $\mathfrak{l}=\mathfrak{l}_{-2}\oplus\mathfrak{l}_{-1}\oplus\mathfrak{l}_0$ を考える．

$\mathfrak{l}_{-2}=<e_1>, \mathfrak{l}_{-1}=<e_2,e_3>, \mathfrak{l}_0=<e_4>$

$[e_4,e_2]=e_3$

$[e_4,e_3]=-e_2$

$[e_2,e_3]=e_1$

他は自明.

また，実数 κ にたいして

$\gamma_\kappa:\mathfrak{l}\times\mathfrak{l}\to\mathfrak{l}$ を

$$\gamma_\kappa(e_2,e_3):=[e_2,e_3]+\kappa e_4,$$

その他の i,j については,

$$\gamma_\kappa(e_i,e_j):=[e_i,e_j]$$

により定めると，$(\mathfrak{l},\gamma_\kappa)$ は，自然な方法で filtered Lie algebra となる．このとき，以下の定理が成り立つ．

Theorem 1 *Graded Lie algebra としての isomorphism* $\Phi_0:grL\to\mathfrak{l}$ *が存在するならば，*$\kappa\in\mathbf{R}$ *と，filtered Lie algebra としての isomorphism* $\Phi:L\to(\mathfrak{l},\gamma_\kappa)$ *で* $gr\Phi:grL\to\mathfrak{l}$ *が* Φ_0 *と一致するようなものが存在する．*

証明の概略：complementary subspace をとり，$L^p=\bar{\mathfrak{l}}\oplus L^{p+1}$ とする．$L=\bigoplus\bar{\mathfrak{l}}_p$ とし，$\bar{\mathfrak{l}}_{-2}=<\varepsilon_1>, \bar{\mathfrak{l}}_{-1}=<\varepsilon_2,\varepsilon_3>, \bar{\mathfrak{l}}_0=<\varepsilon_4>$ とする．このとき, $\bar{\gamma}:\bar{\mathfrak{l}}\times\bar{\mathfrak{l}}\to\bar{\mathfrak{l}}$ を,

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_i,\varepsilon_j):=\sum_k c_{ij}^k\varepsilon_k$$

で表すことを考える．ここで，c_{ij}^k は $\{\varepsilon_k\}$ に関するリー環 L の構造定数である．$\bar{\gamma}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$ は以下のようになっている．

$$\begin{aligned}
\bar{\gamma}(\varepsilon_1,\varepsilon_2) &= c_{12}^1\varepsilon_1+c_{12}^2\varepsilon_2+c_{12}^3\varepsilon_3+c_{12}^4\varepsilon_4\\
\bar{\gamma}(\varepsilon_1,\varepsilon_3) &= c_{13}^1\varepsilon_1+c_{13}^2\varepsilon_2+c_{13}^3\varepsilon_3+c_{13}^4\varepsilon_4\\
\bar{\gamma}(\varepsilon_1,\varepsilon_4) &= c_{14}^2\varepsilon_2+c_{14}^3\varepsilon_3+c_{14}^4\varepsilon_4\\
\bar{\gamma}(\varepsilon_2,\varepsilon_3) &= \varepsilon_1+c_{23}^2\varepsilon_2+c_{23}^3\varepsilon_3+c_{23}^4\varepsilon_4\\
\bar{\gamma}(\varepsilon_2,\varepsilon_4) &= -\varepsilon_3+c_{24}^4\varepsilon_4\\
\bar{\gamma}(\varepsilon_3,\varepsilon_4) &= \varepsilon_2+c_{34}^4\varepsilon_4
\end{aligned}$$

そこで，さらに complementary subspace を次のように取り直す.

$$\begin{aligned}\delta_1 &:= \varepsilon_1 + P_{12}\varepsilon_2 + P_{13}\varepsilon_3 + P_{14}\varepsilon_4 \\ \delta_2 &:= \varepsilon_2 + P_{24}\varepsilon_4 \\ \delta_3 &:= \varepsilon_3 + P_{34}\varepsilon_4 \\ \delta_4 &:= \varepsilon_4\end{aligned}$$

ここで，P_{ij} は関数である．この P_{ij} を上手く取ることにより，$\bar{\gamma}$ の基底 δ_i による表現は簡単になる．例えば,

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(\delta_1,\delta_2) &= \bar{\gamma}(\varepsilon_1 + P_{12}\varepsilon_2 + P_{13}\varepsilon_3\cdots,\varepsilon_2+\cdots) \\ &\equiv (c_{12}^1 - P_{13})\varepsilon_1(modL^{-1}) \\ &\equiv (c_{12}^1 - P_{13})\delta_1(modL^{-1})\end{aligned}$$

と書ける．ここで，$c_{12}^1 = P_{13}$ とおけば δ_i に関する構造定数 d_{12}^1 は消すことができる．さらに，P_{12} を上手く取ると, $d_{13}^1 = 0$, P_{14} から $d_{12}^3 = 0$, P_{24} から $d_{23}^2 = 0$, P_{34} から $d_{23}^3 = 0$ とできる．

このようにして簡単になった表現を新たに，ε_i による表現と見ることにし，$\bar{\gamma}$ が Jacobi の恒等式を満たすことも考慮に入れると，最終的には,

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_2,\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + c_{23}^4\varepsilon_4,$$

その他の i,j については,

$$\bar{\gamma}(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = [\varepsilon_i,\varepsilon_j]$$

となることが分った．これは filtered Lie algebra $(L,\bar{\gamma})$ と $(\mathfrak{l},\gamma_\kappa)$ が isomorphism で写りあうことを表している．このことから，定理の主張であった $\kappa \in \mathbf{R}$ と filtered Lie algebra としての isomorphism $\Phi : L \to (\mathfrak{l},\gamma_\kappa)$ で，$gr\Phi : grL \to \mathfrak{l}$ が graded Lie algebra としての isomorphism $\Phi_0 : grL \to \mathfrak{l}$ と一致するようなものの存在が言えた.□

Remark 1

Filtered Lie algebra $(\mathfrak{l},\gamma_\kappa)$ の同型類は次の三つに分かれる．

(i) $\kappa > 0$ のとき，$(\mathfrak{l},\gamma_\kappa)$ は $(\mathfrak{u}(2),\{F^p\})$ と同型．但し，F^p を filtration $\mathfrak{u}(2) = F^{-2} \supset F^{-1} \supset F^0$ で,

$$F^{-2} = \{\begin{pmatrix}\lambda i & -\bar{\xi} \\ \xi & \eta i\end{pmatrix} | \eta,\lambda \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C}\}$$

$$F^{-1} = \{\begin{pmatrix}0 & -\bar{\xi} \\ \xi & \eta i\end{pmatrix} | \eta \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C}\}$$

$$F^0 = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta i \end{pmatrix} | \eta \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C}\}$$

とする.

(ii) $\kappa = 0$ のとき，$(\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ は graded Lie algebra $\mathfrak{l}_{-2} \oplus \mathfrak{l}_{-1} \oplus \mathfrak{o}(2)$ と同型.

(iii) $\kappa < 0$ のとき，$(\mathfrak{l}, \gamma_\kappa)$ は $(\mathfrak{u}(1,1), \{F^p\})$ と同型. 但し，F^p は filtration $\mathfrak{u}(1,1) = F^{-2} \supset F^{-1} \supset F^0$ で,

$$F^{-2} = \{\begin{pmatrix} \lambda i & \xi \\ \bar{\xi} & \eta i \end{pmatrix} | \eta, \lambda \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C}\}$$

$$F^{-1} = \{\begin{pmatrix} 0 & \xi \\ \bar{\xi} & \eta i \end{pmatrix} | \eta \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C}\}$$

$$F^0 = \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \eta i \end{pmatrix} | \eta \in \mathbf{R}, \xi \in \mathbf{C}\}$$

である.

参考文献

[1] T.Morimoto, On the intransitive Lie algebras whose transitive parts are infinite and primitive, J Math. Soc. Japan, vol.29, No.1 (1977),35–65.

[2] T.Morimoto, Transitive Lie algebras admitting differential systems,Hokkaido Math. J, Vol.17,(1988),45–81