数理解析研究所講究録 1346 巻 2003 年 113-130

Riemann 等質空間における交叉積分公式

東京都立大学理学研究科　酒井 高司 (Takashi Sakai)
Depertment of Mathematics,
Tokyo Metropolitan University

1 Introduction

M と N は Riemann 等質空間 G/K の部分多様体で $\dim M+\dim N\geq\dim(G/K)$ を満たすものとする。一方の M を固定したまま他方の N を等長変換群 G の作用によって動かす。このとき共通部分が空でないならほとんど全ての $g\in G$ について $M\cap gN$ は再び部分多様体になるので、$g\in G$ に対して部分多様体としてのある積分不変量 $I(M\cap gN)$ を対応させると、これは G 上の関数とみなせる。そこで、積分

$$\int_{G}I(M\cap gN)dg$$

を考えることができる。この積分値を M と N の不変量を使って表す等式は交叉積分公式と呼ばれている。例えば $I(M\cap gN)=\mathrm{vol}(M\cap gN)$ としたとき、上の積分に関する等式は Poincaré の公式と呼ばれている。また、Euclid 空間 $\mathbb{R}^{n}$ 内の部分多様体 M^{p} と N^{q} について次のような公式が Chern [2] と Federer [3] によって示された。

$$\int_{M(\mathbb{R}^{n})}\mu_{2l}(M\cap gN)dg=\sum_{k=0}^{l}a(p,q,n,k,l)\mu_{2k}(M)\mu_{2(l-k)}(N)$$

ここで μ_{2i} は Weyl の管状近傍公式 ([10]) に現れる積分不変量であるが、詳しい説明は次章で行う。さらに C. S. Chen [1] は $\mathbb{R}^{3}$ 内の閉曲面 M と N について次のような公式を示した。

$$\begin{aligned}&\int_{M(\mathbb{R}^{3})}\left(\int_{M\cap gN}\kappa^{2}d\sigma\right)dg\\ &=\ \pi^{3}\mathrm{vol}(M)\int_{N}(2H^{2}+\|h\|^{2})d\sigma_{N}+\pi^{3}\mathrm{vol}(N)\int_{M}(2H^{2}+\|h\|^{2})d\sigma_{M}\end{aligned}$$

ここで κ は曲線 $M\cap gN$ の曲率を表し、H と h はそれぞれ M と N の平均曲率と第二基本形式を表している。

後に Howard [5] は第二基本形式に関する不変同次多項式から部分多様体の積分不変量を定義し、それによって Chern-Federer および C. S. Chen による交叉積分公式を統一的に述べることに成功した。彼は一般的な設定において交叉積分公式が二つの部分多様体の不変量によって表されることを示したが、その具体的な表示が知られている例は少ない。本論文では実空間形において 2 次の不変同次多項式から定まる積分不変量に関する交叉積分公式の具体的な表示を完全に決定する。これは Chern-Federer および C. S. Chen による交叉積分公式の拡張になる。

2 Riemann 等質空間における積分幾何学

ここでは、Howard による定理を中心に、Riemann 等質空間における交叉積分公式に関してこれまでに得られている結果について簡単に述べる。

G を Lie 群とし K をその閉部分群とする。このとき G に左不変かつ K の右からの作用で不変な Riemann 計量が入っているとすると、G/K は G 不変な計量が誘導され Riemann 等質空間となる。G/K の原点 o における接空間 $T_o(G/K)$ の部分空間 V_o に対して、ベクトル空間 $\mathrm{II}(V_o)$ を

$$\mathrm{II}(V_o) = \{h \mid h : V_o \times V_o \to V_o^{\perp}; \text{symmetric bilinear}\}$$

によって定義する。原点 $o \in G/K$ において V_o を接空間として持つ部分多様体の第二基本形式は $\mathrm{II}(V_o)$ の元とみなすことができる。$K(V_o)$ を V_o を固定する K の部分群とすると、$k \in K(V_o), h \in \mathrm{II}(V_o)$ について

$$(kh)(u,v) = k_* h(k_*^{-1}u, k_*^{-1}v) \qquad (u, v \in V_o) \tag{2.1}$$

と定義することによって、$K(V_o)$ は自然に $\mathrm{II}(V_o)$ に作用する。$\mathcal{P}$ をベクトル空間 $\mathrm{II}(V_o)$ 上の多項式 $\mathcal{P}$ とする。任意の $k \in K(V_o)$ と $h \in \mathrm{II}(V_o)$ について $\mathcal{P}(kh) = \mathcal{P}(h)$ を満たすとき $\mathcal{P}$ は $K(V_o)$ 不変であるという。

定義 2.1. Riemann 等質空間 G/K の部分多様体 M で、各点 $x \in M$ に対して $(g_x)_* V_o = T_x M$ となる $g_x \in G$ が存在するものを V_o 型部分多様体と呼ぶ。

注意 2.2. 実空間形 G/K においては任意の p 次元部分多様体が任意の p 次元部分空間 $V_o \subset T_o(G/K)$ について V_o 型である。

M が V_o 型部分多様体であるとすると、$(g_x)_* V_o = T_x M$ なる $g_x \in G$ によって $g_x^{-1} M$ は原点 o において V_o を接空間とするので、原点 o における第二基本形式は $h_o^{g_x^{-1}M} \in \mathrm{II}(V_o)$ である。もし g_x と異なる $g'_x \in G$ で $(g'_x)_* V_o = T_x M$ を満たすものが存在したとすると、ある $k \in K(V_o)$ によって $g'_x = g_x k$ となる。ゆえに、$h_o^{(g'_x)^{-1}M} = k^{-1} h_o^{g_x^{-1}M}$ となり、$\mathcal{P}$ が $\mathrm{II}(V_o)$ 上の $K(V_o)$ 不変な多項式であるならば $\mathcal{P}(h_o^{(g'_x)^{-1}M}) = \mathcal{P}(h_o^{g_x^{-1}M})$ となる。したがって、このとき

$$\mathcal{P}(h_x^M) = \mathcal{P}(h_o^{g_x^{-1}M})$$

によって$\mathcal{P}(h_x^M)$を定めることができる。$\mathcal{P}(h_x^M)$はM上の関数とみなすことができ、

$$I^{\mathcal{P}}(M)=\int_M \mathcal{P}(h_x^M)d\sigma_M \tag{2.2}$$

によって定義される$I^{\mathcal{P}}(M)$を$K(V_o)$不変多項式$\mathcal{P}$に関するMの積分不変量と呼ぶ。ただし、これは積分が収束するときしか定義できない。この積分の収束条件についての詳細はHoward [5] を参照のこと。$I^{\mathcal{P}}(M)$はGの作用によって不変であることを注意しておく。このようにして得られる不変量の例としては、$\mathcal{P}\equiv 1$のときのvol(M)や2乗平均曲率の積分量で定義されるWillmore汎関数などがある。

また、次のようなベクトル空間EII($T_o(G/K)$)を定義する。

$$\mathrm{EII}(T_o(G/K))=\{h \mid h: T_o(G/K)\times T_o(G/K)\to T_o(G/K);\text{symmetric bilinear}\}$$

EII($T_o(G/K)$)には(2.1)と同様にしてKが作用するので、EII($T_o(G/K)$)上のK不変多項式による部分多様体の積分不変量を(2.2)と同様に定義することができる。

ここまでの準備のもとでHowardによる交叉積分公式は次のように述べられる。

定理 2.3. (Howard) G/Kをn次元Riemann等質空間とし、Gはユニモジュラーであると仮定する。V_oとW_oはそれぞれp次元とq次元の$T_o(G/K)$の部分空間で、$p+q\geq n$であるとする。$\mathcal{P}$はEII($T_o(G/K)$)上のK不変なl次同次多項式で

$$\int_K \sigma(V_o^{\perp},k_*W_o^{\perp})^{1-l}dk<\infty \tag{2.3}$$

を満たすものとする。このとき次を満たす有限個の組$\{\mathcal{Q}_\alpha,\mathcal{R}_\alpha\}$が存在する。

(1) $\mathcal{Q}_\alpha$はII(V_o)上の$K(V_o)$不変同次多項式

(2) $\mathcal{R}_\alpha$はII(W_o)上の$K(W_o)$不変同次多項式

(3) $\deg\mathcal{Q}_\alpha+\deg\mathcal{R}_\alpha=l$

(4) G/K内の任意のV_o型部分多様体MとW_o型部分多様体Nについて次が成り立つ。

$$\int_G I^{\mathcal{P}}(M\cap gN)dg=\sum_\alpha I^{\mathcal{Q}_\alpha}(M)I^{\mathcal{R}_\alpha}(N) \tag{2.4}$$

注意 2.4. (2.3)において、$\sigma(V,W)$は$T_o(G/K)$の部分ベクトル空間VとWの間の角度を表す。条件(2.3)は不変同次多項式$\mathcal{P}$による積分不変量の収束に関する条件である。G/Kが実空間形の場合は$l\leq p+q-n+1$ならば条件(2.3)を満たす。

定理2.3の証明において、HowardはG上の積分を変形してK上の積分に帰着させている。このことから、次のような主張を得る。

定理 2.5. 定理2.3の設定の下、G'はGと同じ次元のユニモジュラーLie群であり、K'はG'の閉部分群でKと同じ次元であるとする。さらに、等長的な同型写

像 $\rho : K \to K'$ と線形同型写像 $\psi : T_o(G/K) \to T_{o'}(G'/K')$ で、任意の $k \in K$ について

$$\psi \circ k_* = \rho(k)_* \circ \psi$$

を満たすものが存在するとする。このとき ψ によって $\mathrm{EII}(T_o(G/K)), \mathrm{II}(V_o), \mathrm{II}(W_o)$ 上の不変多項式環からそれぞれ $\mathrm{EII}(T_{o'}(G'/K')), \mathrm{II}(\psi(V_o)), \mathrm{II}(\psi(W_o))$ 上の不変多項式環への同型写像が誘導され、G/K において成り立つ等式 (2.4) がこの同型写像によって G'/K' においても成り立つ。これは転送原理 (transfer principle) と呼ばれている。

また、定理 2.3 より次のような Crofton 型の交叉積分公式を得る。

命題 2.6. 定理 2.3 の設定の下、L_0 は G/K の W_o 型の閉部分多様体で次を満たすとする。

(a) $G(L_0) = \{g \in G \mid gL_0 = L_0\}$ は L_0 に推移的に作用する。

(b) 等質空間 $G/G(L_0)$ は G 不変測度 $d\mu_{G/G(L_0)}$ を持つ。

このとき $\deg \mathcal{Q}_i = i$ である V_o 上の $K(V_o)$ 不変同次多項式 $\{\mathcal{Q}_0, \cdots, \mathcal{Q}_l\}$ が存在し、G/K 内の任意の V_o 型部分多様体 M について

$$\int_{G/G(L_0)} I^{\mathcal{P}}(M \cap L) d\mu_{G/G(L_0)}(L) = \sum_{i=0}^{l} I^{\mathcal{Q}_i}(M)$$

が成り立つ。さらに、L_0 が全測地的であるとき上の等式は

$$\int_{G/G(L_0)} I^{\mathcal{P}}(M \cap L) d\mu_{G/G(L_0)}(L) = I^{\mathcal{Q}_l}(M)$$

となる。

定理 2.3 において $\deg \mathcal{P} = 0$ の場合を考える。$\mathcal{P}$ は定値関数であるから $I^{\mathcal{P}}(M \cap gN) = C\mathrm{vol}(M \cap gN)$ となる。条件 (3) より $\deg \mathcal{Q}_\alpha + \deg \mathcal{R}_\alpha = \deg \mathcal{P}$ とならなければならないので、等式 (2.4) はある定数 C' が存在して

$$\int_G \mathrm{vol}(M \cap gN) dg = C' \mathrm{vol}(M) \mathrm{vol}(N)$$

となることを主張しており、これは Poincaré の公式を意味している。

次に、G/K が実空間形で G がその等長変換群である場合を考える。このとき K は自然に直交群 $O(T_o(G/K))$ と同型になる。V_o を $T_o(G/K)$ の p 次元部分空間とすると、$K(V_o) \cong O(V_o) \times O(V_o^\perp)$ となる。$O(V_o) \times O(V_o^\perp)$ の表現と不変式については古典的によく研究されており、$\mathrm{II}(V_o)$ 上において奇数次の $K(V_o)$ 不変同次多項式は存在しないことが知られている。$\mathrm{II}(V_o)$ 上の $2l$ 次の不変同次多項式としては、

次で定義される $\mathcal{W}_{2l}$ がある。

$$\mathcal{W}_{2l}(h) = \sum_{\substack{1 \le i_1, \cdots, i_{2l} \le p \\ p+1 \le k_1, \cdots, k_l \le n}} \det \begin{bmatrix} h^{k_1}_{i_1 i_1} & h^{k_1}_{i_1 i_2} & \cdots & h^{k_1}_{i_1 i_{2l}} \\ h^{k_1}_{i_2 i_1} & h^{k_1}_{i_2 i_2} & \cdots & h^{k_1}_{i_2 i_{2l}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{k_l}_{i_{2l-1} i_1} & h^{k_l}_{i_{2l-1} i_2} & \cdots & h^{k_l}_{i_{2l-1} i_{2l}} \\ h^{k_l}_{i_{2l} i_1} & h^{k_l}_{i_{2l} i_2} & \cdots & h^{k_l}_{i_{2l} i_{2l}} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{W}_{2l}$ はシリンダーの第二基本形式上で消える不変同次多項式として特徴付けられる。不変同次多項式 $\mathcal{W}_{2l}$ によって実空間形内の p 次元部分多様体 M の積分不変量 $\mu_{2l}(M)$ を

$$\mu_{2l}(M) = I^{\mathcal{W}_{2l}}(M)$$

と定義する。積分不変量 μ_{2l} は Weyl の管状近傍公式の係数や一般化された Gauss-Bonnet の公式に現れる重要な不変量である ([4] 参照)。第二基本形式に関する不変多項式 $\mathcal{W}_{2l}$ は Gauss の公式によって曲率テンソルの成分に関する多項式に変形できるので、$\mu_{2l}(M)$ は M の内在的な不変量であることに注意する。この積分不変量 μ_{2l} について次の交叉積分公式が成り立つ。

定理 2.7. (Chern [2], Federer [3], Howard [5]) $0 \le 2l \le p+q-n$ とする。このとき定数 $a(p,q,n,k,l)$ が存在して、実空間形内の任意の p 次元部分多様体 M と q 次元部分多様体 N について

$$\int_G \mu_{2l}(M \cap gN)dg = \sum_{0 \le k \le l} a(p,q,n,k,l)\mu_{2k}(M)\mu_{2(l-k)}(N)$$

が成り立つ。

注意 2.8. 定数 $a(p,q,n,k,l)$ の値は Chern [2] および Nijenhuis [7] によって得られている。

2 次の $K(V_o)$ 不変同次多項式全体のなすベクトル空間は

$$\mathcal{Q}_1(h) = \sum_{k=p+1}^{n} \sum_{i,j=1}^{p} \left(h^k_{ij}\right)^2, \qquad \mathcal{Q}_2(h) = \sum_{k=p+1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} h^k_{ii} \right)^2$$

によって張られており、$2 \le p \le n-1$ のときこれらは独立になる。幾何学的には $\mathcal{Q}_1$ は第二基本形式のノルムの 2 乗を表し、$\mathcal{Q}_2$ は平均曲率の 2 乗の p^2 倍を表している。しかし、実は積分幾何的にはこれは基底の取り方が悪い。そこで次のように基底を変換する。

$$\mathcal{W}_2 = \mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1, \qquad \mathcal{U}_p = p\mathcal{Q}_1 - \mathcal{Q}_2$$

次数 2 の場合の定理 2.7 は部分多様体の次元に関する対称性から次のようになる。

定理 2.9. $2 \le p+q-n$ とする。このとき、定数 $a(p,q,n)$ が存在して、実空間形内の任意の p 次元部分多様体 M と q 次元部分多様体 N について

$$\int_G I^{\mathcal{W}_2}(M \cap gN)dg = a(p,q,n)I^{\mathcal{W}_2}(M)\mathrm{vol}(N) + a(q,p,n)\mathrm{vol}(M)I^{\mathcal{W}_2}(N)$$

が成り立つ。

一方、$\mathcal{U}_p$ は $\mathbb{R}^n$ 内の p 次元球面の第二基本形式上で消える不変同次多項式として特徴付けられる。このことから次の定理が導かれる。

定理 2.10. (Howard [5]) $2 \le p+q-n$ とする。このとき、定数 $b(p,q,n)$ が存在して、実空間形内の任意の p 次元部分多様体 M と q 次元部分多様体 N について

$$\int_G I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M \cap gN)dg = b(p,q,n)I^{\mathcal{U}_p}(M)\mathrm{vol}(N) + b(q,p,n)\mathrm{vol}(M)I^{\mathcal{U}_q}(N)$$

が成り立つ。

3 第二基本形式

X を n 次元 Riemann 多様体とし、M はその p 次元部分多様体であるとする。M の点 x における第二基本形式は対称双線型写像

$$h_x : T_xM \times T_xM \to T_x^{\perp}M$$

である。T_xX の基底 $e_1, \dots, e_n$ を $e_1, \dots, e_p$ が T_xM の基底で $e_{p+1}, \dots, e_n$ が $T_x^{\perp}M$ の基底となるように選ぶと、この基底により h_x の成分は

$$(h_x)_{ij}^k = \langle h_x(e_i, e_j), e_k \rangle \qquad 1 \le i, j \le p,\ p+1 \le k \le n$$

と表すことができる。ここで、$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は X の Riemann 計量を表す。

ここで、M と N が共に X の超曲面である場合を考える。M と N は x において横断的に交わり $M \cap N$ は $(n-2)$ 次元の部分多様体になっていると仮定する。M と N の第二基本形式をそれぞれ h^M と h^N で表し、$M \cap N$ の第二基本形式を h で表す。T_xX の正規直交基底 $e_1, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n$ を

$$e_1, \dots, e_{n-2} \in T_x(M \cap N), \quad e_{n-1} \in T_xM, \quad e_n \in T_x^{\perp}M$$

を満たすようにとる。また、$e_1, \dots, e_{n-2}, e'_{n-1}, e'_n$ も T_xX の正規直交基底で、こちらは

$$e_1, \dots, e_{n-2} \in T_x(M \cap N), \quad e'_{n-1} \in T_x(N), \quad e'_n \in T_x^{\perp}(N)$$

を満たすものとする。ここで、x における M と N の間の角度を ϕ で表す。つまり、ϕ は $\cos\phi = \langle e_n, e'_n\rangle$ によって定まる。このとき次の等式を得る。

$$e_{n-1} = \cos\phi e'_{n-1} - \sin\phi e'_n, \quad e_n = \sin\phi e'_{n-1} + \cos\phi e'_n \tag{3.1}$$
$$e'_{n-1} = \cos\phi e_{n-1} + \sin\phi e_n, \quad e'_n = -\sin\phi e_{n-1} + \cos\phi e_n \tag{3.2}$$

これらの基底を使って h の成分は次のように表すことができる。

$$h_{ij}^k = \langle h(e_i, e_j), e_k\rangle \qquad \text{or} \qquad h'^k_{ij} = \langle h(e_i, e_j), e'_k\rangle$$

i, j, k は $1 \leq i, j \leq n-2,\ n-1 \leq k \leq n$ の範囲である。さらに $1 \leq i \leq n-1$ において

$$h^n_{i,n-1} = \langle h^M(e_i, e_{n-1}), e_n\rangle \qquad h'^n_{i,n-1} = \langle h^N(e_i, e'_{n-1}), e'_n\rangle$$

とおく。このとき、正規直交基底の選び方から h^M と h^N は

$$h^M = \begin{bmatrix} h^n_{11} & \cdots & h^n_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ h^n_{n-1,1} & \cdots & h^n_{n-1,n-1} \end{bmatrix}, \quad h^N = \begin{bmatrix} h'^n_{11} & \cdots & h'^n_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ h'^n_{n-1,1} & \cdots & h'^n_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

と表すことができる。ここまでの記号の下で、次の補題が成り立つ。

補題 3.1. $1 \leq i, j \leq n-2$ において

$$\sin^2\phi h(e_i, e_j) = (h^n_{ij} - h'^n_{ij}\cos\phi)e_n + (h'^n_{ij} - h^n_{ij}\cos\phi)e'_n$$

証明 M と N は x において横断的に交わっているので e_n と e'_n は線形独立である。したがって、$T^\perp_x(M \cap N)$ は e_n と e'_n によって張られている。$h(e_i, e_j)$ は $T^\perp_x(M \cap N)$ のベクトルであるから、ある係数 α_{ij} と β_{ij} によって

$$h(e_i, e_j) = \alpha_{ij}e_n + \beta_{ij}e'_n \qquad (1 \leq i, j \leq n-2)$$

と e_n と e'_n の線型結合で表すことができる。(3.1) より

$$h(e_i, e_j) = \alpha_{ij}\sin\phi e'_{n-1} + (\alpha_{ij}\cos\phi + \beta_{ij})e'_n$$

となるので、次の等式を得る。

$$h'^n_{ij} = \langle h(e_i, e_j), e'_n\rangle = \alpha_{ij}\cos\phi + \beta_{ij} \tag{3.3}$$

同様に、(3.2) より

$$h^n_{ij} = \langle h(e_i, e_j), e_n\rangle = \alpha_{ij} + \beta_{ij}\cos\phi \tag{3.4}$$

を得る。(3.3) と (3.4) から

$$\begin{aligned}\sin^2\phi\alpha_{ij} &= h^n_{ij} - h'^n_{ij}\cos\phi\\ \sin^2\phi\beta_{ij} &= h'^n_{ij} - h^n_{ij}\cos\phi\end{aligned}$$

となり、補題が示された。

さらに、補題 3.1 より直ちに次の補題を得る。

補題 3.2. $1 \le i, j, k, l \le n-2$ において

$$\sin^2\phi\langle h(e_i, e_j), h(e_k, e_l)\rangle = h^n_{ij}h^n_{kl} + h'^n_{ij}h'^n_{kl} - \cos\phi(h^n_{ij}h'^n_{kl} + h'^n_{ij}h^n_{kl})$$

超曲面の場合には基底を主方向にとることによって第二基本形式は対角行列で表される。M の主方向を向いた T_xM の正規直交基底として $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ をとると、$\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, e_n$ は T_xX の正規直交基底になる。ここで、主方向ベクトル ξ_i $(1 \le i \le n-1)$ に対応する主曲率をそれぞれ κ_i で表すことにする。このとき

$$\langle h^M(\xi_i, \xi_j), e_n\rangle = \delta_{ij}\kappa_i \tag{3.5}$$

となる。この基底を使うと

$$e_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji}\xi_j \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

と表すことができるが、$(n-1)\times(n-1)$ 行列 (a_{ji}) は直交行列となることから、$a_{k,n-1} = v_k$ とおくと次の等式を得る。

$$v_j^2 + \sum_{i=1}^{n-2} a_{ji}^2 = 1, \quad v_jv_k + \sum_{i=1}^{n-2} a_{ji}a_{ki} = 0 \quad (j \ne k) \tag{3.6}$$

よって、(3.5) より

$$h^n_{n-1,n-1} = \langle h^M(e_{n-1}, e_{n-1}), e_n\rangle = \sum_{i,j=1}^{n-1} v_iv_j\langle h(\xi_i, \xi_j), e_n\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} v_j^2\kappa_j \tag{3.7}$$

となる。同様にして、$i = 1, 2, \cdots, n-2$ について次を得る。

$$h^n_{ii} = \sum_{j,k=1}^{n-1} a_{ji}a_{ki}\langle h^M(\xi_j, \xi_k), e_n\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji}^2\kappa_j \tag{3.8}$$

$$h^n_{i,n-1} = \sum_{j,k=1}^{n-1} a_{ji}v_k\langle h^M(\xi_j, \xi_k), e_n\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ji}v_j\kappa_j \tag{3.9}$$

4 係数の決定

G/K を実空間形とし、V_o を $T_o(G/K)$ の p 次元部分空間とすると、2 章で述べたように $\mathcal{W}_2$ と $\mathcal{Q}_p$ は $\mathrm{II}(V_o)$ 上の 2 次の不変同次多項式の基底をなす。したがって、定理 2.9 と定理 2.10 より、係数 $a(p,q,n)$ と $b(p,q,n)$ が得られれば 2 次の不変同次多項式による積分不変量に関する交叉積分公式が完全に決定されたことになる。注意 2.8 で述べたように $a(p,q,n)$ の値は Chern と Nijenhuis により得られている。Howard は、不変同次多項式の基底が具体的に分かる場合は等式 (2.4) を基底を使って表し、両辺をある部分多様体について計算して比較することによって係数を決定することができると述べている。実際、Chern は $\mathbb{R}^n$ 内において $M = S^p, N = S^q$ の場合について定理 2.7 の両辺を具体的に計算することによって $a(p,q,n,k,l)$ の値を得ている。しかし、現実的には一般にこの方針で係数を決定することは困難である。ここでは、まず前章で準備した超曲面の第二基本形式に関する補題を用いて、実空間形内の二つの超曲面について、2 次の不変同次多項式に関する交叉積分公式を直接的に求める。その後、定理 2.9 と定理 2.10 を使って帰納的に超曲面の場合に帰着させ、一般次元の部分多様体に関する交叉積分公式の具体的な表示を得る。

定理 4.1. ([6]) M と N を n 次元実空間形 G/K の超曲面とする。$M, N, M \cap gN$ の第二基本形式と平均曲率をそれぞれ h^M, h^N, h と H^M, H^N, H で表す。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_G \left(\int_{M \cap gN} \|h\|^2 d\sigma \right) dg \qquad (4.1)\\
&= C(n)\mathrm{vol}(N) \int_M \left((n^2-2n-1)\|h^M\|^2 + (n-1)^2 (H^M)^2 \right) d\sigma_M \\
&\quad + C(n)\mathrm{vol}(M) \int_N \left((n^2-2n-1)\|h^N\|^2 + (n-1)^2 (H^N)^2 \right) d\sigma_N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_G \left(\int_{M \cap gN} H^2 d\sigma \right) dg \qquad (4.2)\\
&= \frac{C(n)}{(n-2)^2}\mathrm{vol}(N) \int_M \left(2\|h^M\|^2 + (n^2-2n-2)(n-1)^2 (H^M)^2 \right) d\sigma_M \\
&\quad + \frac{C(n)}{(n-2)^2}\mathrm{vol}(M) \int_N \left(2\|h^N\|^2 + (n^2-2n-2)(n-1)^2 (H^N)^2 \right) d\sigma_N
\end{aligned}$$

ここで $C(n)$ は n によって定まる定数で、次で与えられる。

$$C(n) = \frac{\mathrm{vol}(SO(n-1))\mathrm{vol}(S^{n-2})^2}{(n-1)(n+1)\mathrm{vol}(S^{n-3})}$$

ここでは等式 (4.1) だけ証明する。等式 (4.2) も同様の方針で示すことができる。G/K は n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ で G が向きを保つ等長変換群である場合を考える。

転送原理 (定理 2.5) によりこの場合に示された交叉積分公式は他の実空間形においても成り立つ。M と N をともに G/K の超曲面であるとする。このとき、補題 3.2 より次の補題を得る。

補題 4.2.

$$\begin{aligned}\sin^2\phi\|h\|^2 &= \|h^M\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2}(h^n_{i,n-1})^2 - (h^n_{n-1,n-1})^2 \\ &\quad + \|h^N\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2}(h'^n_{i,n-1})^2 - (h'^n_{n-1,n-1})^2 - 2\cos\phi\sum_{i,j=1}^{n-2} h^n_{ij}h'^n_{ij}\end{aligned}$$

補題 4.3. (Santaló [9] p.262 (15.35)) $M, N, M\cap gN$ の位置密度をそれぞれ dT_M, dT_N, dT で表す。このとき次が成り立つ。

$$dT\wedge dg = \sin^{n-1}\phi\, d\phi\wedge dT_M\wedge dT_N$$

ここで ϕ は M と N の間の角度を表している。

補題 4.2 と補題 4.3 より

$$\begin{aligned}&\|h\|^2 dT\wedge dg \\ &= \begin{pmatrix} \|h^M\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2}(h^n_{i,n-1})^2 - (h^n_{n-1,n-1})^2 \\ + \|h^N\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2}(h'^n_{i,n-1})^2 - (h'^n_{n-1,n-1})^2 \\ - 2\cos\phi\sum_{i,j=1}^{n-2} h^n_{ij}h'^n_{ij}\end{pmatrix}\sin^{n-3}\phi\, d\phi\wedge dT_M\wedge dT_N\end{aligned} \tag{4.3}$$

となる。(4.3) 式の左辺を積分すると

$$\mathrm{vol}(SO(n-2))\int_G\left(\int_{M\cap gN}\|h\|^2 d\sigma\right)dg$$

となる。一方、(4.3) 式の右辺の積分において

$$\int_0^\pi \sin^{n-3}\phi\cos\phi\, d\phi = 0$$

であるから、(4.3) 式の右辺は 1 行目と 2 行目だけ積分すればよい。

$$c_n = \int_0^\pi \sin^{n-3}\phi\, d\phi = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\dfrac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} = \frac{\mathrm{vol}(S^{n-2})}{\mathrm{vol}(S^{n-3})} \tag{4.4}$$

とおくと、(4.3) 式の右辺の 1 行目の積分は

$$c_n \int \left(\|h^M\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2}(h^n_{i,n-1})^2 - (h^n_{n-1,n-1})^2 \right) dT_M \int dT_N$$

となる。M と N の体積要素をそれぞれ $d\sigma_M$ と $d\sigma_N$ で表し、dk で $SO(n-1)$ の不変測度を表すとすると、M と N の位置密度 dT_M と dT_N は

$$dT_M = dk \wedge d\sigma_M, \qquad dT_N = dk \wedge d\sigma_N$$

と表される。ゆえに

$$\begin{aligned}
&\int \left(\|h^M\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n-2}(h^n_{i,n-1})^2 - (h^n_{n-1,n-1})^2 \right) dT_M \qquad (4.5)\\
&= \mathrm{vol}(SO(n-1)) \int_M \|h^M\|^2 d\sigma_M \\
&\quad - \int_M \int_{SO(n-1)} \left(2\sum_{i=1}^{n-2}(h^n_{i,n-1})^2 + (h^n_{n-1,n-1})^2 \right) dk \wedge d\sigma_M
\end{aligned}$$

となる。(3.6) と (3.9) より

$$\sum_{i=1}^{n-2}(h^n_{i,n-1})^2 = \sum_{j=1}^{n-1}(1-v_j^2)v_j^2\kappa_j^2 - 2\sum_{j<k} v_j^2 v_k^2 \kappa_j \kappa_k \tag{4.6}$$

となり、また (3.7) より

$$(h^n_{n-1,n-1})^2 = \sum_{j=1}^{n-1} v_j^4 \kappa_j^2 + 2\sum_{j<k} v_j^2 v_k^2 \kappa_j \kappa_k \tag{4.7}$$

を得る。したがって (4.5) 式の右辺において

$$\begin{aligned}
&\int_{SO(n-1)} \left(2\sum_{i=1}^{n-2}(h^n_{i,n-1})^2 + (h^n_{n-1,n-1})^2 \right) dk \\
&= \mathrm{vol}(SO(n-2)) \int_{S^{n-2}} \left(\sum_{j=1}^{n-1}(2-v_j^2)v_j^2\kappa_j^2 - 2\sum_{j<k} v_j^2 v_k^2 \kappa_j\kappa_k \right) dv \\
&= \frac{\mathrm{vol}(SO(n-2))\mathrm{vol}(S^{n-2})}{(n-1)(n+1)} \left((2n-1)\sum_{j=1}^{n-1}\kappa_j^2 - 2\sum_{j<k}\kappa_j\kappa_k \right)
\end{aligned}$$

となる。2 行目の等号は $SO(n-1)$ 上の積分を $SO(n-2)$ をファイバーとして S^{n-2} 上の積分にしており、3 行目の等号は Weyl [10] による次の積分による。

$$\int_{S^{n-2}} v_1^{2i_1} \cdots v_{n-1}^{2i_{n-1}} dv = \mathrm{vol}(SO(n-2)) \frac{(2i_1-1)!! \cdots (2i_{n-1}-1)!!}{(n-1)(n+1)\cdots(n+2p-3)}$$

ここで $p=\sum_{k=1}^{n-1} i_k$ である。

$$\begin{aligned}\|h^M\|^2 &= \sum_{j=1}^{n-1}\kappa_j^2\\ (n-1)^2(H^M)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n-1}\kappa_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{n-1}\kappa_j^2 + 2\sum_{j<k}\kappa_j\kappa_k\end{aligned}$$

であるから

$$(2n-1)\sum_{j=1}^{n-1}\kappa_j^2 - 2\sum_{j<k}\kappa_j\kappa_k = 2n\|h^M\|^2-(n-1)^2(H^M)^2$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}&\int\left(\|h^M\|^2-2\sum_{i=1}^{n-2}(h^n_{i,n-1})^2-(h^n_{n-1,n-1})^2\right)dT_M\\ &\quad= \frac{\mathrm{vol}(SO(n-1))}{(n-1)(n+1)}\int_M\left((n^2-2n-1)\|h^M\|^2+(n-1)^2(H^M)^2\right)d\sigma_M\end{aligned}$$

となる。同様の計算によって

$$\begin{aligned}&\int\left(\|h^N\|^2-2\sum_{i=1}^{n-2}(h'^n_{i,n-1})^2-(h'^n_{n-1,n-1})^2\right)dT_N\\ &\quad= \frac{\mathrm{vol}(SO(n-1))}{(n-1)(n+1)}\int_N\left((n^2-2n-1)\|h^N\|^2+(n-1)^2(H^N)^2\right)d\sigma_N\end{aligned}$$

を得る。よって (4.3) 式の右辺の積分は

$$\begin{aligned}&\frac{c_n\mathrm{vol}(SO(n-1))^2}{(n-1)(n+1)}\mathrm{vol}(N)\int_M\left((n^2-2n-1)\|h^M\|^2+(n-1)^2(H^M)^2\right)d\sigma_M\\ +\ &\frac{c_n\mathrm{vol}(SO(n-1))^2}{(n-1)(n+1)}\mathrm{vol}(M)\int_N\left((n^2-2n-1)\|h^N\|^2+(n-1)^2(H^N)^2\right)d\sigma_N\end{aligned}$$

となり、等式 (4.1) が示された。

系 4.4. 定理 4.1 において $n=3$ の場合は二つの等式は一致し

$$\begin{aligned}\int_G\left(\int_{M\cap gN}\kappa^2 ds\right)dg &= \pi^3\mathrm{vol}(N)\int_M\left(\|h^M\|^2+2(H^M)^2\right)d\sigma_M\\ &\quad+\pi^3\mathrm{vol}(M)\int_N\left(\|h^N\|^2+2(H^N)^2\right)d\sigma_N\end{aligned}$$

となる。ここで κ は曲線 $M\cap gN$ の曲率を表している。これは Chen の公式に他ならない。

定理 4.1 によって実空間形内の超曲面における 2 次の不変同次多項式に関する交叉積分公式が完全に決定されたことになる。言い変えると次の系を得る。

系 4.5.

$$
\begin{aligned}
a(n-1,n-1,n) &= (n+1)(n-3)C(n) = \frac{(n-3)\mathrm{vol}(SO(n-1))\mathrm{vol}(S^{n-2})^2}{(n-1)\mathrm{vol}(S^{n-3})} \\
b(n-1,n-1,n) &= n(n-3)C(n) = \frac{n(n-3)\mathrm{vol}(SO(n-1))\mathrm{vol}(S^{n-2})^2}{(n-1)(n+1)\mathrm{vol}(S^{n-3})}
\end{aligned}
$$

系 4.5 により、問題は一般の p と q について $a(p,q,n)$ と $b(p,q,n)$ を決定することに帰着される。ここでは $b(p,q,n)$ だけ求めるが、$a(p,q,n)$ も全く同様の手法によって得られる。

ここからは G/K が n 次元球面 S^n である場合を考える。M を S^n 内のコンパクト超曲面で $I^{\mathcal{U}_{n-1}}(M) \neq 0$ であるとする。このような M としては、例えば Clifford トーラス $S^m(\sqrt{m/(n-1)}) \times S^{n-m-1}(\sqrt{(n-m-1)/(n-1)})$ などを考えればよい。全測地的な $S^q \subset S^n$ においては $I^{\mathcal{U}_q}(S^q) = 0$ であるから、定理 2.10 より

$$
\int_{SO(n+1)} I^{\mathcal{U}_{q-1}}(M \cap gS^q)dg = b(n-1,q,n)I^{\mathcal{U}_{n-1}}(M)\mathrm{vol}(S^q) \tag{4.8}
$$

が成り立つ。一般の $g \in SO(n+1)$ について $M \cap gS^q$ は gS^q 内の $(q-1)$ 次元部分多様体となる。gS^q 内において部分多様体 $M \cap gS^q$ と gS^{q-1} について交叉積分公式を考えると定理 2.10 より

$$
\begin{aligned}
&\int_{SO(q+1)} I^{\mathcal{U}_{q-2}}((M \cap gS^q) \cap hgS^{q-1})dh \\
&\quad = b(q-1,q-1,q)I^{\mathcal{U}_{q-1}}(M \cap gS^q)\mathrm{vol}(S^{q-1})
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

となる。したがって (4.8) と (4.9) より

$$
\begin{aligned}
&b(n-1,q,n)I^{\mathcal{U}_{n-1}}(M)\mathrm{vol}(S^q) \\
&= \frac{1}{b(q-1,q-1,q)\mathrm{vol}(S^{q-1})} \\
&\quad \times \int_{SO(n+1)} \left(\int_{SO(q+1)} I^{\mathcal{U}_{q-2}}((M \cap gS^q) \cap hgS^{q-1})dh \right) dg \\
&= \frac{1}{b(q-1,q-1,q)\mathrm{vol}(S^{q-1})} \\
&\quad \times \int_{SO(q+1)} \left(\int_{SO(n+1)} I^{\mathcal{U}_{q-2}}(M \cap hgS^{q-1})dg \right) dh \\
&= \frac{\mathrm{vol}(SO(q+1))}{b(q-1,q-1,q)\mathrm{vol}(S^{q-1})} \int_{SO(n+1)} I^{\mathcal{U}_{q-2}}(M \cap gS^{q-1})dg \\
&= \frac{\mathrm{vol}(SO(q+1))}{b(q-1,q-1,q)\mathrm{vol}(S^{q-1})} b(n-1,q-1,n)I^{\mathcal{U}_{n-1}}(M)\mathrm{vol}(S^{q-1})
\end{aligned}
$$

となる。$I^{\mathcal{U}_{n-1}}(M) \neq 0$ としているので、系 4.5 で得られた結果を用いると次の漸化式を得る。

$$\begin{aligned} b(n-1,q-1,n) &= \frac{b(q-1,q-1,q)\mathrm{vol}(S^q)}{\mathrm{vol}(SO(q+1))}b(n-1,q,n) \\ &= \frac{q(q-3)}{(q-1)(q+1)}\frac{\mathrm{vol}(S^{q-2})^2}{\mathrm{vol}(S^{q-1})\mathrm{vol}(S^{q-3})}b(n-1,q,n) \end{aligned}$$

これより次を得る。

$$\begin{aligned} & b(n-1,q,n) \\ &= \frac{(q+1)(q-1)(q-2)}{(n+1)(n-1)(n-2)}\frac{\mathrm{vol}(SO(n-1))\mathrm{vol}(S^{n-2})\mathrm{vol}(S^{q-1})}{\mathrm{vol}(S^{q-2})} \end{aligned} \tag{4.10}$$

さて、次に M を S^n 内の $(p+1)$ 次元大円 S_0^{p+1} に含まれる p 次元部分多様体で $I^{\mathcal{U}_p}(M) \neq 0$ であるものとする。このとき定理 2.10 より

$$\int_{SO(n+1)} I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M \cap gS^q)dg = b(p,q,n)I^{\mathcal{U}_p}(M)\mathrm{vol}(S^q) \tag{4.11}$$

が成り立つ。S^n 内の q 次元大円 S^q 全体のなす空間は Grassmann 多様体 $G_{q+1}(\mathbb{R}^n)$ と同一視することができるので、$L_0 = S^q$ として上の等式の Crofton 型を考える。$G_{q+1}(\mathbb{R}^n) = SO(n+1)/S(O(q+1)\times O(n-q))$ であるから

$$\begin{aligned} & \int_{SO(n+1)} I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M \cap gS^q)dg \\ &= 2\mathrm{vol}(SO(q+1))\mathrm{vol}(SO(n-q)) \int_{G_{q+1}(\mathbb{R}^{n+1})} I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M \cap S^q)d\mu(E^{q+1}) \end{aligned} \tag{4.12}$$

となる。右辺における S^q は $\mathbb{R}^n$ 内の $(q+1)$ 次元部分空間 E^{q+1} に含まれる q 次元球面を表している。

補題 4.6. (Chern [2]) E_0^q を $\mathbb{R}^n$ 内の q 次元部分空間とする。f は $\mathbb{R}^n$ 内の p 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体 $G_p(\mathbb{R}^n)$ 上の可積分関数で $E^{p+q-n} = E^p \cap E_0^q$ だけで値が決まるものとする。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \int_{G_p(\mathbb{R}^n)} f(E^p)d\mu(E^p) \\ &= \frac{\mathrm{vol}(SO(n))\mathrm{vol}(SO(p+q-n))}{\mathrm{vol}(SO(p))\mathrm{vol}(SO(q))}\int_{G_{p+q-n}(E_0^q)} f(E^{p+q-n})d\mu(E^{p+q-n}) \end{aligned}$$

今、M は S_0^{p+1} に含まれると仮定しているので、$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とみてその $S_0^{p+1} = S^n \cap E_0^{q+2}$ となる $\mathbb{R}^n$ 内の $q+2$ 次元部分空間を E_0^{p+2} とすると、$I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M \cap S^q)$

の値は $E^{q+1}\cap E_0^{p+2}$ だけで決まる。したがって、補題4.6より、(4.12) の右辺の積分は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{q+1}(\mathbb{R}^{n+1})} I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M\cap gS^q)d\mu(E^{q+1}) \qquad (4.13)\\
&= \frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))\mathrm{vol}(SO(p+q-n+2))}{\mathrm{vol}(SO(q+1))\mathrm{vol}(SO(p+2))}\\
&\quad\times\int_{G_{p+q-n+2}(E_0^{p+2})} I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M\cap gS^{p+q-n+1})d\mu(E^{p+q-n+2})
\end{aligned}$$

右辺の Crofton 型の積分は

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{p+q-n+2}(E_0^{p+2})} I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M\cap gS^{p+q-n+1})d\mu(E^{p+q-n+2})\\
&= \frac{1}{2\mathrm{vol}(SO(p+q-n+2))\mathrm{vol}(SO(n-q))}\int_{SO(p+2)} I^{\mathcal{U}_{p+q-n}}(M\cap gS^{p+q-n+1})dg\\
&= \frac{b(p,p+q-n+1,p+1)}{2\mathrm{vol}(SO(p+q-n+2))\mathrm{vol}(SO(n-q))} I^{\mathcal{U}_p}(M)\mathrm{vol}(S^{p+q-n+1})
\end{aligned}$$

となる。以上の議論により次の関係式を得る。

$$b(p,q,n) = \frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))\mathrm{vol}(S^{p+q-n+1})}{\mathrm{vol}(SO(p+2))\mathrm{vol}(S^q)} b(p,p+q-n+1,p+1)$$

よって、(4.10) より次の結論を得る。

定理 4.7. ([8]) 定理2.9および定理2.10において,

$$\begin{aligned}
a(p,q,n) &= \frac{p+q-n-1}{p-1}\frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))\mathrm{vol}(S^{p+q-n})}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q)}\\
b(p,q,n) &= \frac{(p+q-n+2)(p+q-n-1)}{(p+2)(p-1)}\frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))\mathrm{vol}(S^{p+q-n})}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^q)}
\end{aligned}$$

5 共通部分が曲線の場合

前章で実空間形における2次の不変同次多項式に関する交叉積分公式を決定したが、これは共通部分が2次元以上の場合についてであった。共通部分が曲線となる場合、不変多項式 Q_1 と Q_2 は一致し、これらは曲率の2乗になる。ここでは前章と同様の手法により、共通部分が曲線になる場合の交叉積分公式の具体的な形を決定する。

M^p と N^{n-p+1} をそれぞれ n 次元実空間形 G/K 内の部分多様体とする。このとき共通部分 $M\cap gN$ はほとんど全ての $g\in G$ について曲線となる。曲線 $M\cap gN$ の全2乗曲率を積分不変量とし

$$I^{\kappa}(M\cap gN) = \int_{M\cap gN}\kappa^2 d\sigma$$

と表す。このとき定理 2.3 より次を得る。

命題 5.1. 定数 $c(p,n), d(p,n)$ が存在して次が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\int_G I^\kappa(M\cap gN)dg \qquad (5.1)\\ &= \left(c(p,n)I^{\mathcal{W}_2}(M)+d(p,n)I^{\mathcal{U}_p}(M)\right)\mathrm{vol}(N)\\ &\quad +\mathrm{vol}(M)\left(c(n-p+1,n)I^{\mathcal{W}_2}(N)+d(n-p+1,n)I^{\mathcal{U}_{n-p+1}}(N)\right)\end{aligned}$$

系 4.4 より次が分かる。

$$c(2,3)=2\pi^3,\qquad d(2,3)=\frac{3}{2}\pi^3 \tag{5.2}$$

G/K が球面 S^n で M はその超曲面である場合を考える。このとき (5.1) 式より

$$\begin{aligned}&\int_{SO(n+1)} I^\kappa(M\cap gS^2)dg \qquad (5.3)\\ &= \left(c(n-1,n)I^{\mathcal{W}_2}(M)+d(n-1,n)I^{\mathcal{U}_{n-1}}(M)\right)\mathrm{vol}(S^2)\end{aligned}$$

が成り立つ。$g\in SO(n+1)$ を固定して gS^3 内の 2 次元部分多様体 $M\cap gS^3$ と gS^2 について交叉積分公式を考えると、(5.1) より

$$\begin{aligned}&\int_{SO(4)} I^\kappa((M\cap gS^3)\cap hgS^2)dh \qquad (5.4)\\ &= \left(c(2,3)I^{\mathcal{W}_2}(M\cap gS^3)+d(2,3)I^{\mathcal{U}_2}(M\cap gS^3)\right)\mathrm{vol}(S^2)\end{aligned}$$

(5.4) の両辺を $g\in SO(n+1)$ について積分すると、左辺は

$$\mathrm{vol}(SO(4))\int_{SO(n+1)} I^\kappa(M\cap gS^2)dg$$

となり、右辺においては

$$\int_{SO(n+1)} I^{\mathcal{W}_2}(M\cap gS^3)dg = a(n-1,3,n)I^{\mathcal{W}_2}(M)\mathrm{vol}(S^3) \tag{5.5}$$

$$\int_{SO(n+1)} I^{\mathcal{U}_2}(M\cap gS^3)dg = b(n-1,3,n)I^{\mathcal{U}_{n-1}}(M)\mathrm{vol}(S^3) \tag{5.6}$$

となる。したがって、(5.3), (5.5), (5.6) から M の積分不変量に関する等式が得られるが、これは任意の超曲面 M について成り立つので多項式レベルで一致していなければならない。よって、係数を比較することによって次を得る。

$$\begin{aligned}c(n-1,n) &= \frac{c(2,3)a(n-1,3,n)}{\mathrm{vol}(SO(3))}=\frac{1}{2(n-2)}\frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^{n-1})}\\ d(n-1,n) &= \frac{d(2,3)b(n-1,3,n)}{\mathrm{vol}(SO(3))}=\frac{3}{2(n+1)(n-2)}\frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^{n-1})}\end{aligned}$$

次に M を $S_0^{p+1}\subset S^n$ 内の超曲面とする。$L_0=S^{n-p+1}$ として (5.1) 式を Crofton 型にすると

$$\begin{aligned}&\int_{G_{n-p+2}(\mathbb{R}^{n+1})} I^\kappa(M\cap S^{n-p+1})d\mu(E^{n-p+2}) \qquad (5.7)\\ =\;& \frac{\mathrm{vol}(S^{n-p+1})}{2\mathrm{vol}(SO(n-p+2))\mathrm{vol}(SO(p-1))}\left(c(p,n)I^{\mathcal{W}_2}(M)+d(p,n)I^{\mathcal{U}_p}(M)\right)\end{aligned}$$

を得る。$M\subset S_0^{p+1}$ としているので、補題 4.6 により左辺における $G_{n-p+2}(\mathbb{R}^{n+1})$ 上の積分は $G_3(E_0^{p+2})$ 上の積分に帰着でき

$$\begin{aligned}&\int_{G_{n-p+2}(\mathbb{R}^{n+1})} I^\kappa(M\cap S^{n-p+1})d\mu(E^{n-p+2}) \qquad (5.8)\\ =\;& \frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))\mathrm{vol}(SO(3))}{\mathrm{vol}(SO(p+2))\mathrm{vol}(SO(n-p+2))}\int_{G_3(E_0^{p+2})} I^\kappa(M\cap S^2)d\mu(E^3)\end{aligned}$$

となる。右辺における Crofton 型の積分は

$$\begin{aligned}&\int_{G_3(E_0^{p+2})} I^\kappa(M\cap S^2)d\mu(E^3) \qquad (5.9)\\ =\;& \frac{\mathrm{vol}(S^2)}{2\mathrm{vol}(SO(3))\mathrm{vol}(SO(p-1))}\left(c(p,p+1)I^{\mathcal{W}_2}(M)+d(p,p+1)I^{\mathcal{U}_p}(M)\right)\end{aligned}$$

となる。(5.7), (5.8), (5.9) より次の関係式を得る。

$$\begin{aligned}c(p,n) &= \frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))\mathrm{vol}(S^2)}{\mathrm{vol}(SO(p+2))\mathrm{vol}(S^{n-p+1})}c(p,p+1)\\ d(p,n) &= \frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))\mathrm{vol}(S^2)}{\mathrm{vol}(SO(p+2))\mathrm{vol}(S^{n-p+1})}d(p,p+1)\end{aligned}$$

定理 5.2. 命題 5.1 において

$$\begin{aligned}c(p,n) &= \frac{2\pi}{p-1}\frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^{n-p+1})}\\ d(p,n) &= \frac{6\pi}{(p+2)(p-1)}\frac{\mathrm{vol}(SO(n+1))}{\mathrm{vol}(S^p)\mathrm{vol}(S^{n-p+1})}\end{aligned}$$

参考文献

[1] C. S. Chen, *On the Kinematic Formula of Square of Mean Curvature Vector*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1973), 1163–1169.

[2] S. S. Chern, *On the Kinematic Formula in Integral Geometry*, J. Math. Mech. **16** (1966), 101–118.

[3] H. Federer, *Curvature measure*, Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1959), 418–491.

[4] A. Gray, *Tubes*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1990.

[5] R. Howard, *The kinematic formula in Riemannian homogeneous spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., No.509, **106** (1993), vi+69pp.

[6] H. J. Kang, T. Sakai and Y. J. Suh, *Kinematic formulas for hypersurfaces in real space forms*, Univ. of Tsukuba, Mathematical Research Note, Nos. 2003-003.

[7] A. Nijenhuis, *On Chern's kinematic formula in integral geometry*, J. Diff. Geo. **9** (1974), 475–482.

[8] T. Sakai, *Kinematic formula in real space forms*, preprint.

[9] L. A. Santaló, *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, Reading, Mass (1976).

[10] H. Weyl, *On the volume of tubes*, Amer. J. Math., **61** (1939), 461–472.