数理解析研究所講究録 1348 巻 2003 年 163-172

On the quantized Noumi-Yamada systems

東北大学大学院理学研究科 名古屋 創 (Nagoya Hajime)

1 はじめに

野海・山田による $A_l^{(1)}$ 型高階 Painlevé 方程式 (野海・山田系) [5] はアフィン Weyl 群作用で不変な Poisson 構造を持つ. この事実に注目すれば, Poisson 括弧を交換子に置き換えるという意味での量子化があるべきである. また長谷川は量子群の理論を用いて梶原・野海・山田による拡大アフィン Weyl 群の表現 [3] の量子化を構成した [2]. これを量子 Painlevé 対称性ということにしよう. そもそも野海・山田系は $A_l^{(1)}$ 型拡大アフィン Weyl 群の表現から構成される離散系の連続極限の結果として得られたものである. 同様に $A_l^{(1)}$ 型量子 Painlevé 対称性から構成される離散系の連続極限が計算できれば, $A_l^{(1)}$ 型対称性を持つ非可換微分方程式が得られることになる. 実際この計算を $l=2n+1$ $(n=1,2,\ldots)$ の場合に実行することができ, $l=2n$ の場合の野海・山田系の量子化と呼ばれるべきものを得た. $l=2n+1$ の場合も Poisson 括弧を交換子に置き換えてやるとうまくいくことがわかった. 本稿では量子野海・山田系及びその Hamiltonian 構造と Lax 形式について説明する.

2 量子野海・山田系

$l=2,3,\ldots$ に対して, $\mathbb{C}$ 上の斜体 $\mathcal{K}_l$ を生成元

$$f_i, \alpha_i \quad (0\le i\le l), \tag{2.1}$$

と定義関係式

$$[f_i, f_{i+1}] = h \quad (h\in\mathbb{C}, 0\le i\le l), \tag{2.2}$$

$$[f_i, f_j] = 0 \quad (j\ne i\pm 1), \quad [f_i,\alpha_j]=0, \quad [\alpha_i,\alpha_j]=0 \tag{2.3}$$

で定義する. ただし, 添字は $\mathbb{Z}/(l+1)\mathbb{Z}$ の元と理解する. 上記の生成元と定義関係式で定義される非可換代数は Ore domain であることを示すことができ, Ore domain である非可換代数からはその商体を構成できることが知られている.

定理 2.1 $\mathcal{K}_l$ の $\mathbb{C}$-derivation ∂ を次で定めることができる.

(1) $l=2n$ のとき

$$\partial f_i = f_i\Big(\sum_{1\le r\le n} f_{i+2r-1}\Big) - \Big(\sum_{1\le r\le n} f_{i+2r}\Big)f_i + \alpha_i, \tag{2.4}$$

$$\partial\alpha_i = 0 \quad (0\le i\le l). \tag{2.5}$$

(2) $l=2n+1$ のとき

$$\begin{aligned}\partial f_i =& f_i\Big(\sum_{1\le r\le s\le n} f_{i+2r-1}f_{i+2s}\Big) - \Big(\sum_{1\le r\le s\le n} f_{i+2r}f_{i+2s+1}\Big)f_i \\ &+\Big(\frac{k}{2} - \sum_{1\le r\le n}\alpha_{i+2r}\Big)f_i + \alpha_i\Big(\sum_{1\le r\le n} f_{i+2r}\Big),\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\partial\alpha_i = 0 \quad (0 \le i \le l) \tag{2.7}$$

ただし, $k = \alpha_0 + \cdots + \alpha_l$ とする.

∂ が定義関係式を不変に保つことを直接計算することによって定理 2.1 を証明することができる. また, 次のことに注意する. $\partial f_i = [H, f_i]$ をみたすような Hamiltonian $H \in \mathcal{K}_l$ が存在すれば ∂ は well-defined である. なぜならば

$$\begin{aligned}\partial(f_if_j) - \partial(f_jf_i) &= \partial(f_i)f_j + f_i\partial(f_j) - \partial(f_j)f_i - f_j\partial(f_i)\\ &= [H, f_i]f_j + f_i[H, f_j] - [H, f_j]f_i - f_j[H, f_i]\\ &= [H, f_if_j] - [H, f_jf_i] = [H, [f_i, f_j]] = 0\end{aligned}$$

が成り立つからである. 実際このような Hamitonian が存在することを後で見る. また積の順序が定理のようになる理由も後に見る Hamiltonian から理解することができる.

2.1 アフィン Weyl 群対称性

次に量子野海・山田系が $A_l^{(1)}$ 型アフィン Weyl 群対称性を持つことを説明する.

命題 2.2 ([2]) $\mathcal{K}_l$ 上の 代数射 $s_0, \ldots, s_l, \pi$ を次で定めることができる:

$$\begin{aligned}&s_i(\alpha_i) = -\alpha_i, \qquad s_i(\alpha_j) = \alpha_j + \alpha_i \quad (j = i \pm 1), \qquad s_i(\alpha_j) = \alpha_j \quad (j \ne i, i \pm 1),\\ &s_i(f_i) = f_i, \qquad s_i(f_j) = f_j \pm \frac{\alpha_i}{f_i} \quad (j = i \pm 1), \qquad s_i(f_j) = f_j \quad (j \ne i, i \pm 1),\\ &\pi(\alpha_j) = \alpha_{j+1}, \qquad \pi(f_j) = f_{j+1}.\end{aligned} \tag{2.8}$$

定理 2.3 ([2]) 代数射 $s_0, \ldots s_l, \pi$ は拡大 $A_l^{(1)}$ 型アフィン Weyl $\widetilde{W} = \langle s_0, \ldots s_l, \pi\rangle$ の表現を定める. すなわち, 次の関係式を満たす:

$$s_i^2 = 1, \quad (s_is_j)^3 = 1 \quad (j = i \pm 1), \quad \pi^{l+1} = 1, \quad \pi s_i = s_{i+1}\pi. \tag{2.9}$$

定理 2.4 $\widetilde{W}$ の作用は斜体 $\mathcal{K}_l$ の derivation ∂ と可換である.

定理 2.4 は直接計算することによって確かめることができる. 実際, 計算を以下のように実行することができる. (計算手順は古典の場合と同様である.)

まず, Demazule 作用素 Δ_i $(i = 0, \ldots, l)$ を次で定義する.

$$\Delta_i(\varphi) = \frac{1}{\alpha_i}(s_i(\varphi) - \varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{K}_l). \tag{2.10}$$

定義より Δ_i は次の性質を持つことが容易にわかる.

$$\Delta_i(\varphi\psi) = \Delta_i(\varphi)\psi + s_i(\varphi)\Delta_i(\psi) \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{K}_l), \tag{2.11}$$

$$\Delta_i(\alpha_i) = -2, \quad \Delta_i(\alpha_{i\pm1}) = 1, \quad \Delta_i(\alpha_j) = 0 \quad (j \ne i, i \pm 1), \tag{2.12}$$

$$\Delta_i(f_i) = 0, \quad \Delta_i(f_{i\pm1}) = \pm\frac{1}{f_i}, \quad \Delta_i(f_j) = 0 \quad (j \ne i, i \pm 1). \tag{2.13}$$

定理 2.4の証明. $j = 0, \ldots, l$ に対して, F_i を式 (2.4), (2.6) の右側部分とする. このとき非可換性に注意すれば $\partial s_i(f_j) = s_i(\partial f_j)$ と

$$\Delta_i(F_j) = -\frac{u_{ij}}{f_i}F_i\frac{1}{f_i} \tag{2.14}$$

が同値であることが容易にわかる. π による回転対称性より (2.14) を $j=0$ に対して示せばよい:

$$\Delta_1(F_0)=\frac{1}{f_1}F_1\frac{1}{f_1},\quad \Delta_l(F_0)=-\frac{1}{f_1}F_1\frac{1}{f_1},\quad \Delta_i(F_0)=0\ (i\neq 1,l). \tag{2.15}$$

一例として, $\Delta_1(F_0)=\frac{1}{f_1}F_1\frac{1}{f_1}$ を示す. $l=2n$ のとき

$$\begin{aligned}\Delta_1(F_0)&=\Delta_1(f_0)\sum_{1\le r\le n}f_{2r-1}-\sum_{1\le r\le n}f_{2r}\Delta_1(f_0)-\frac{\alpha_1}{f_1}\Delta_1(f_0)-\Delta_1(f_2)f_0+\Delta_1(\alpha_0)\\&=-\frac{1}{f_1}\sum_{1\le r\le n}f_{2r-1}+\sum_{1\le r\le n}f_{2r}\frac{1}{f_1}+\frac{\alpha_1}{f_1}\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_1}f_0+1\\&=\frac{1}{f_1}(f_1\sum_{1\le r\le n}f_{2r}-(\sum_{2\le r\le n}f_{2r-1}-f_0)f_1+\alpha_1)\frac{1}{f_1}\\&=\frac{1}{f_1}F_1\frac{1}{f_1}.\end{aligned}$$

$l=2n+1$ のとき

$$\begin{aligned}\Delta_1(F_0)=&\Delta_1(f_0)\sum_{1\le r\le s\le n}f_{2r-1}f_{2s}+s_1(f_0)f_1\Delta_1(f_2)-\Delta_1(\sum_{1\le r\le s\le n}f_{2r}f_{2s+1})f_0\\&-s_1(\sum_{1\le r\le s\le n}f_{2r}f_{2s+1})\Delta_1(f_0)-\Delta_1(\alpha_2)f_0+s_1(\frac{k}{2}-\sum_{1\le r\le n}\alpha_{2r})\Delta_1(f_0)\\&+\Delta_1(\alpha_0)\sum_{1\le r\le n}f_{2r}+s_1(\alpha_0)\Delta_1(\sum_{1\le r\le n}f_{2r})\\=&-\frac{1}{f_1}\sum_{1\le r\le s\le n}f_{2r-1}f_{2s}+(f_0-\frac{\alpha_1}{f_1})-\frac{1}{f_1}\sum_{1\le r\le n}f_{2r+1}f_0\\&+\sum_{1\le r\le s\le n}f_{2r}f_{2s+1}\frac{1}{f_1}+\frac{\alpha_1}{f_1}\sum_{1\le r\le n}f_{2r+1}\frac{1}{f_1}-f_0-(\frac{k}{2}-\sum_{1\le r\le n}\alpha_{2r}-\alpha_1)\frac{1}{f_1}\\&+\sum_{1\le r\le n}f_{2r}+(\alpha_0+\alpha_1)\frac{1}{f_1}\\=&\frac{1}{f_1}\Bigg\{-(\sum_{1\le r\le s\le n}f_{2r-1}f_{2s})f_1+f_1(\sum_{1\le r\le s\le n}f_{2r}f_{2s+1})+\alpha_1\sum_{1\le r\le n}f_{2r+1}\\&-(\sum_{1\le r\le n}f_{2r+1}f_0)f_1+(\frac{k}{2}-\sum_{1\le r\le n}\alpha_{2r+1})f_1+f_1(\sum_{1\le r\le n}f_{2r})f_1\Bigg\}\frac{1}{f_1}\\=&\frac{1}{f_1}\Bigg\{f_1(\sum_{1\le r\le s\le n}f_{2r}f_{2s+1})-(\sum_{2\le r\le s\le n}f_{2r-1}f_{2s})f_1-(\sum_{1\le r\le n}f_{2r+1}f_0)f_1\\&+(\frac{k}{2}-\sum_{1\le r\le n}\alpha_{2r+1})f_1+\alpha_1\sum_{1\le r\le n}f_{2r+1}\Bigg\}\frac{1}{f_1}\\=&\frac{1}{f_1}F_1\frac{1}{f_1}.\end{aligned}$$

(2.15) の他の場合も同様に示すことができる. □

2.2 Hamiltonian

この節では, 量子野海・山田系が多項式 Hamiltonian を持つことを示す. 非可換定数 h が 0 であるとき, 量子の場合の Hamiltonian は古典の場合の Hamiltonian になっている. Hamiltonian を定義するための記号は [5] に従い, まずその記号を列挙する.

$i=1,\dots,l$ に対して, ϖ_i を A_l 型のルート系の i 番目の fundamental weight とする. すなわち

$$\begin{aligned}\varpi_i &= \frac{1}{l+1}\{(l+1-i)\sum_{r=1}^{i} r\alpha_r + i\sum_{r=i+1}^{l}(l+1-r)\alpha_r\}\\ &= \sum_{r=1}^{l}(\min\{i,r\}-\frac{ir}{l+1})\alpha_r \end{aligned} \tag{2.16}$$

とする. また $\varpi_0 = 0$ とおく.

Γ を $A_l^{(1)}$ 型の Dynkin 図形とし, その頂点には $\mathbb{Z}/(l+1)\mathbb{Z}$ の元によって順に番号が付けられているものとする. $j, j+1,\dots,j+m-1$ $(m\le l)$ の頂点からなる Γ の部分連結図形に対して, $\chi(C_{j,m})$ を次で定義する.

$$\chi(C_{j,m}) = \varpi_j - \varpi_{j+1} + \cdots + (-1)^{m-1}\varpi_{j+m-1}. \tag{2.17}$$

そして, Γ の真部分図形 C に対して, $\chi(C)$ を次で定義する.

$$\chi(C) = \sum_j \chi(C_{j,m_j}), \tag{2.18}$$

ここで右辺の和は C の全ての連結成分に対して取る.

$d\in\{1,\dots,l,l+1\}$ に対して S_d を次で定める.

$$S_d = \{K\subset\{0,1,\dots,l\}\,|\,|K| = d, \Gamma\backslash K = \sum_{j,m_j:even} C_{j,m_j}\}. \tag{2.19}$$

$C_{j,m}$ $(m\le l)$ に対して,

$$f_{C_{j,m}} = f_j f_{j+1}\cdots f_{j+m-1}. \tag{2.20}$$

とおく. このとき, $K\in S_d$ $(d=1,\dots,l)$ に対して f_K を次で定めることができる.

$$f_K = \prod_j f_{C_{j,m_j}}, \tag{2.21}$$

ここで右辺の積は K の全ての連結成分に対して取る.

定義 2.5 Hamiltonian H_0 を次で定める.

(1) $l=2$ のとき

$$H_0 = f_0f_1f_2 + hf_1 + \sum_{K\in S_1}\chi(K^c)f_K. \tag{2.22}$$

$l=2n, n\ge 2$ のとき

$$H_0 = \sum_{K\in S_3} f_K + \sum_{K\in S_1}\chi(K^c)f_K. \tag{2.23}$$

(2) $l=3$ のとき

$$H_0 = f_0f_1f_3f_2 + \frac{h}{2}(f_0+f_2)(f_1-f_3) + \sum_{K\in S_2}\chi(K^c)f_K + \left(\sum_{i=1}^{3}(-1)^{-1}\varpi_i\right)^2. \tag{2.24}$$

$l=2n+1, n\ge 2$ のとき

$$H_0 = \sum_{K\in S_4} f_K + \sum_{K\in S_2}\chi(K^c)f_K + \left(\sum_{i=1}^{l}(-1)^{-1}\varpi_i\right)^2. \tag{2.25}$$

$l=2n, n\geq 2$ のときと $l=2n+1, n\geq 2$ のときは見かけ上古典の場合と同様であり, $l=2,3$ の場合は補正項が加わっている. これは $l=2,3$ のときは 順に $K\in S_3$, $K\in S_4$ に対して f_K が定義できないからである.

命題 2.6 $l=2n$ のとき, 量子野海・山田系 (2.4), (2.5) は次のように表すことができる.

$$\partial f_j=\frac{1}{h}[H_0,f_j]+\delta_{j,0}k \quad (0\leq j\leq l). \tag{2.26}$$

$l=2n+1$ のとき, 量子野海・山田系 (2.6), (2.7) は次のように表すことができる.

$$\partial f_j=\frac{1}{h}[H_0,f_j]-(-1)^j\frac{k}{2}f_j+\delta_{j,0}kg_0 \quad (0\leq j\leq l) \tag{2.27}$$

ここで $g_0=f_0+f_2+\cdots+f_{l-1}$ とする.

証明. $i=0,\ldots,l$ に対して, $\mathbb{C}$-derivation ∂_i を次で定義する.

$$\partial_i f_j=\delta_{ij}. \tag{2.28}$$

このとき, $\varphi\in\mathcal{K}_l$ に対して次が成立する.

$$[\varphi,f_j]=h(\partial_{j-1}-\partial_{j+1})\varphi. \tag{2.29}$$

これらを用いて $[H_0,f_j]$ を計算する. $A_2^{(1)}$ と $A_3^{(1)}$ の場合は $[H_0,f_j]$ を容易に直接計算でき, (2.26) と (2.27) を得る.

$A_{2n}^{(1)}$ $(n\geq 2)$ の場合を考える. (2.23) から, $\frac{1}{h}[H_0,f_j]$ を次のように計算できる.

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}[H_0,f_j]&=(\partial_{j-1}-\partial_{j+1})H_0\\&=\sum_{K\in S_2(\Gamma\setminus\{j-1\})}f_K-\sum_{K\in S_2(\Gamma\setminus\{j+1\})}f_K+\chi(\Gamma\setminus\{j-1\})-\chi(\Gamma\setminus\{j+1\})\\&=f_j(\sum_{r=1}^{n}f_{j+2r-1})-(\sum_{r=1}^{n}f_{j+2r})f_j-\varpi_{j-1}+2\varpi_j-\varpi_{j+1}\\&=F_j-\delta_{j,0}k.\end{aligned}$$

したがって, (2.26) が正しいことが示された. $A_{2n+1}^{(1)}$ $(n\geq 2)$ の場合も同様に示すことができる. □

2.3 Heisenberg 方程式

この節では, 量子野海・山田系が Heisenberg 方程式として表せることを示す.

Case $A_{2n}^{(1)}$: f_i に対する新しい座標

$$(q;p;x)=(q_1,\ldots,q_n;p_1,\ldots,p_n;x) \tag{2.30}$$

を次で定める.

$$\begin{aligned}&q_j=f_{2j},\quad p_j=\sum_{r=1}^{j}f_{2r-1}\quad (j=1,\ldots,n),\\&x=f_0+f_1+\cdots+f_l.\end{aligned} \tag{2.31}$$

この座標変換の逆変換は次で与えられる.

$$f_0=x-\sum_{r=1}^{n}q_r-p_n,\quad f_1=p_1,\quad f_2=q_1,$$

$$f_{2j-1} = p_j - p_{j-1}, \quad f_{2j} = q_j \quad (j = 2, \ldots, n). \tag{2.32}$$

新しい座標に対する交換関係は次のようになる.

$$[p_i, q_j] = h\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = [p_i, x] = [q_i, x] = 0, \tag{2.33}$$

ただし $i, j = 1, \ldots, n$ とする. 前節で得た Hamiltonian H_0 を $(q; p; x)$ を用いて書いたものを H とする. このとき次が成り立つ.

$$\partial q_j = \frac{1}{h}[H, q_j], \quad \partial p_j = \frac{1}{h}[H, p_j], \quad \partial x = k, \tag{2.34}$$

ただし $j = 1, \ldots, n$ とする.

Case $A^{(1)}_{2n+1}$: まず最初に (2.27) から

$$g_0 = \frac{k}{2} g_0, \quad g_1 = \frac{k}{2} g_1 \tag{2.35}$$

が成り立つことに注意する. ただし $g_0 = f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n}$, $g_1 = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n+1}$ である. ゆえに,

$$\tilde{f}_{2r} = g_0 f_{2r}, \quad \tilde{f}_{2r+1} = g_0^{-1} f_{2r+1} \quad (r = 0, 1, \ldots, n), \tag{2.36}$$

とおくことによって

$$\partial \tilde{f}_j = \frac{1}{h}[H_0, \tilde{f}_j] + \delta_{j,0} g_0^2 \quad (j = 0, 1, \ldots, 2n+1). \tag{2.37}$$

を得る. 新しい座標

$$(q; p; x) = (q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n; x_0, x_1) \tag{2.38}$$

を次で定める.

$$\begin{aligned} q_j &= g_0 f_{2j}, \quad p_j = g_0^{-1} \sum_{r=1}^{j} f_{2r-1} \quad (j = 1, \ldots, n), \\ x_0 &= g_0 = f_0 + f_2 + \cdots + f_{2n}, \quad x_1 = g_1 = f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n+1}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

この座標変換の逆変換は次で与えられる.

$$\begin{aligned} f_0 &= x_0 - x_0^{-1} \sum_{r=1}^{n} q_r, \quad f_1 = x_0 p_1, \quad f_2 = x_0^{-1} q_1, \\ f_{2j-1} &= x_0 (p_j - p_{j-1}), \quad f_{2j} = x_0^{-1} q_j \quad (j = 2, \ldots, n). \end{aligned} \tag{2.40}$$

新しい座標に対する交換関係は次のようになる.

$$\begin{aligned} &[p_i, q_j] = h\delta_{ij}, \quad [q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \\ &[p_i, x_0] = [q_i, x_0] = [p_i, x_1] = [q_i, x_1] = [x_0, x_1] = 0, \end{aligned} \tag{2.41}$$

ただし $i, j = 1, \ldots, n$ とする. 前節で得た Hamiltonian H_0 を $(q; p; x)$ を用いて書いたものを H とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\partial q_j = \frac{1}{h}[H, q_j], \quad \partial p_j = \frac{1}{h}[H, p_j], \quad \partial x_0 = \frac{k}{2} x_0, \quad \partial x_1 = \frac{k}{2} x_1, \tag{2.42}$$

ただし $j = 1, \ldots, n$ とする.

上記の結果をまとめる.

定理 2.7 (1) $l=2n$ のとき, 量子野海・山田系は上記で定めた $(q;p;x)$, H を用いて Heisenberg 方程式として表すことができる:

$$\partial q_j = \frac{1}{h}[H, q_j], \quad \partial p_j = \frac{1}{h}[H, p_j], \quad \partial x = k, \tag{2.43}$$

ただし $j=1,\dots,n$ とする.

(2) $l=2n+1$ のとき, 量子野海・山田系は上記で定めた $(q;p;x)$, H を用いて Heisenberg 方程式として表すことができる:

$$\partial q_j = \frac{1}{h}[H, q_j], \quad \partial p_j = \frac{1}{h}[H, p_j], \quad \partial x_0 = \frac{k}{2}x_0, \quad \partial x_1 = \frac{k}{2}x_1, \tag{2.44}$$

ただし $j=1,\dots,n$ とする.

2.4 Hamiltonian の性質

Hamiltonian $H_1,\dots,H_l$ を次で定める.

$$H_j := \pi(H_{j-1}). \tag{2.45}$$

古典の場合, これらの Hamiltonian は W の作用に関していくつかの性質を持っていた. 量子の場合においても同様なことが成り立つ. 以下でそのことを示そう.

命題 2.8 アフィン Weyl 群の作用に関して, Hamiltonian は次の性質を持つ.

(1) $l=2n$ のとき

$$s_i(H_j) = H_j + \delta_{ij}k\frac{\alpha_j}{f_j} \quad (i,j=0,\dots,l). \tag{2.46}$$

(2) $l=2n+1$ のとき

$$s_i(H_j) = H_j + \delta_{ij}k\frac{\alpha_j}{f_j}g_j \quad (i,j=0,\dots,l) \tag{2.47}$$

ただし g_j の添え字は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の元と理解する.

証明. 回転対称性を表す π を用いることによって, $j=0$ の場合のみ示せばよい. $A_2^{(1)}$ と $A_3^{(1)}$ の場合, $\Delta_i(H_0)$ を計算し, (2.46) と (2.47) を順に得る. $A_{2n}^{(1)}$ $(n\geq 2)$ の場合, $\Delta_i(H_0)$ はつぎのように計算される.

$$\begin{aligned}
&\Delta_i\left(\sum_{K\in S_3} f_K + \sum_{K\in S_1}\chi(K^c)f_K\right)\\
=\;& \Delta_i(f_{i-1}f_if_{i+1}) + \Delta_i\left(f_if_{i+1}\sum_{r=1}^{n-1}f_{i+2r}\right) + \Delta_i\left(f_{i+1}\sum_{1\leq r\leq s\leq n-1}f_{i+2r}f_{i+2s+1}\right)\\
&+\Delta_i\left(\sum_{r=1}^{n-1}f_{i+2r+1}f_{i-1}f_i\right) + \Delta_i\left(\sum_{1\leq r\leq s\leq n-1}f_{i+2r}f_{i+2s+1}f_{i-1}\right)\\
&+\sum_{K\in S_1}\Delta_i(\chi(K^c))f_K + s_i(\chi(\Gamma\backslash\{i+1\}))\frac{1}{f_i} - s_i(\chi(\Gamma\backslash\{i-1\}))\frac{1}{f_i}\\
=\;& (-f_{i+1}+f_{i-1}-\frac{\alpha_i}{f_i}) + \sum_{r=1}^{n-1}f_{i+2r} + \frac{1}{f_i}\sum_{1\leq r\leq s\leq n-1}f_{i+2r}f_{i+2s+1} - \sum_{r=1}^{n-1}f_{i+2r+1}\\
&-\sum_{1\leq r\leq s\leq n-1}f_{i+2r}f_{i+2s+1}\frac{1}{f_i} + (\chi(\Gamma\backslash\{i+1\})+\alpha_i)\frac{1}{f_i} - (\chi(\Gamma\backslash\{i-1\})-\alpha_i)\frac{1}{f_i}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{r=1}^{2n}(-1)^{r-1}f_{i+r} \\
=\ &\frac{\alpha_i}{f_i}+(\varpi_{i-1}-2\varpi_i+\varpi_{i+1})\frac{1}{f_i}=\frac{\alpha_i}{f_i}+(\alpha_i+\delta_{i,0}k)\frac{1}{f_i}=\delta_{i,0}k\frac{1}{f_i}.
\end{aligned}
$$

従って (2.46) を得る. $A^{(1)}_{2n+1}$ $(n\geq 2)$ の場合も同様に示すことができる. □

命題 2.8 は, 量子野海・山田系がアフィン Weyl 群対称性を持つ事を, Hamiltonian に対する観点から見たものである.

命題 2.9 (1) $A^{(1)}_{2n}$ $(l=2n)$ の場合, $j=0,\ldots,2n$ に対して, 次が成立.

$$
H_{j+1}-H_j=k\sum_{r=1}^{n}f_{j+2r}-\frac{nk}{2n+1}x \tag{2.48}
$$

ただし $x=f_0+f_1+\cdots+f_{2n}$ とする.

(2) $A^{(1)}_{2n+1}$ $(l=2n+1)$ の場合, $j=0,\ldots,2n+1$ に対して, 次が成立.

$$
H_{j+1}-H_j=k\sum_{1\leq r\leq s\leq n}^{n}f_{j+2r}f_{j+2s+1}-\frac{nk}{2n+1}\sum_{K\in S_2}f_K+(-1)^j\frac{k}{4}\sum_{i=0}^{l}(-1)^i\alpha_i. \tag{2.49}
$$

証明. $l=2,3$ のとき, 直接計算することによって容易に示される. $l=2n$ $(l=2n,n\geq 2)$ のとき, 次が成立する.

$$
H_0=\sum_{K\in S_3}f_K+\sum_{i=0}^{2n}\chi(\{i\}^c)f_i, \tag{2.50}
$$

$$
H_1=\sum_{K\in S_3}f_K+\sum_{i=0}^{2n}\pi(\chi(\{i-1\}^c)f_i. \tag{2.51}
$$

ゆえに

$$
H_1-H_0=\sum_{i=0}^{2n}(\pi(\chi(\{i-1\}^c)-\chi(\{i\}^c))f_i \tag{2.52}
$$

が成り立つ. $\pi(\chi(\{i-1\}^c)-\chi(\{i\}^c)$ を定義から計算することによって,

$$
\pi(\chi(\{i-1\}^c)-\chi(\{i\}^c)=\begin{cases}\frac{-nk}{2n+1} & (i=0 \text{ or } i=\text{odd})\\ \frac{(n+1)k}{2n+1} & (i\neq 0, i=\text{even})\end{cases} \tag{2.53}
$$

を得る. それゆえ,

$$
H_1-H_0=\sum_{i=0}^{2n}\frac{-nk}{2n+1}f_i+\sum_{r=1}^{n}kf_{2r}=k\sum_{r=1}^{n}f_{j+2r}-\frac{nk}{2n+1}x \tag{2.54}
$$

が成立する. $l=2n+1$ $(n\geq 2)$ の場合も同様に示すことができる. □

3 Lax 形式

野海・山田系は線型方程式系の両立条件として得られ, Lax 形式としての表示を持つ [4]. この節では量子の場合においても同様に Lax 形式としての表示を持つことを示す.

$\mathcal{A}_l$ $(l\geq 2)$ を $\mathbb{C}$ 上の斜体で生成元が

$$
f_i,q_i,\epsilon_i,t\quad (0\leq i\leq l), \tag{3.1}
$$

で定義関係式が

$$[f_i, f_{i+1}] = [f_i, q_{i+1}] = [q_i, f_i] = h \quad (h \in \mathbb{C}), \tag{3.2}$$

$$[f_i, f_j] = 0 \quad (j \neq i \pm 1), \tag{3.3}$$

$$[f_i, \epsilon_j] = [q_i, \epsilon_j] = 0, \tag{3.4}$$

$$f_i - f_{i+1} = q_i - q_{i+2} \tag{3.5}$$

$$f_0 + f_1 + \cdots + f_l = t \tag{3.6}$$

であるようなものとする．ここで添え字は $\mathbb{Z}/(l+1)\mathbb{Z}$ の元とみる．

定義 3.1 $\mathcal{A}_l[z]$ を係数が $\mathcal{A}_l$ である多項式環とする．このとき，$L, B \in M_{n,n}(\mathcal{A}_l[z])$ を次で定める．

$$L = -\begin{bmatrix} \epsilon_1 & f_1 & 1 & & & \\ & \epsilon_2 & f_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ z & & & & \epsilon_l & f_l \\ zf_0 & z & & & & \epsilon_0 \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

$$B = \begin{bmatrix} q_1 & 1 & & & \\ & q_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & q_l & 1 \\ z & & & & q_0 \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

∂_z を $\mathcal{A}_l[z]$ の $\mathbb{C}$-derivation $\partial_z(z) = 1$ であるものとする．

命題 3.2 $\mathcal{A}_l$ の $\mathbb{C}$-derivation ∂_t が次の関係式

$$[z\partial_z - L, \partial_t - B] = 0, \tag{3.9}$$

を満たすとする．このとき，∂_t は f_i に対して量子野海・山田系を定める．すなわち，$l = 2n$ のとき

$$\partial_t f_i = \partial f_i, \tag{3.10}$$

であって，$l = 2n+1$ のとき

$$\partial_t f_i = \frac{2}{t}\partial f_i, \tag{3.11}$$

である．ただし $\alpha_0 = 1 - \epsilon_1 + \epsilon_0$, $\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ $(1 \leq i \leq l)$ であって $k = 1$ とする．

証明. 式 (3.9) は次の関係式と同値である．

$$\epsilon_i q_i = q_i \epsilon_i, \tag{3.12}$$

$$f_i - f_{i+1} = q_i - q_{i+2}, \tag{3.13}$$

$$\partial_t f_i = -f_i q_i + q_{i+1} f_i + \alpha_i. \tag{3.14}$$

式 (3.12) と (3.13) は (3.4) と (3.5) から順に従う．また式 (3.14) から (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) を用いて，q 変数を消去することができる．結果として式 (3.14) の右側部分は $l = 2n$ のとき (2.4) の ∂f_i の右側部分と等しく，また $l = 2n+1$ のときは (2.6) の ∂f_i の右側部分に $\frac{2}{t}$ をかけたものに等しい． □

参考文献

[1] J. E. Björk, Rings of Differential Operators, North-Holland Publishing Company, 1979

[2] K. Hasegawa, Deforming Noumi-Yamada-Kajiwara's realization of Weyl groups as rational transformations, preprint

[3] K. Kajiwara and M. Noumi and Y. Yamada, A study on the fourth q-Painlevé equation, J. Phys. A: Math. Gen., Vol. 34, 2001, 8563-8581

[4] M. Noumi and Y. Yamada, Affine Weyl group symmetries in Painlevé type equations, Toward the Exact WKB Analysis of Differentisl Equations, Linear or Non-Linear, Kyoto University Press

[5] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equation of type $A_l^{(1)}$, Funktial. Ekvac., Vol. 41, 1998, 483-503

[6] M. Noumi and Y. Yamada, Affine Weyl groups, discrete dynamical systems and Painlevé equations, Comm. Math. Phys., Vol. 199, 1998, 281-295