数理解析研究所講究録 1352 巻 2004 年 25-37

再生核から見た多変数複素解析

名古屋大・多元数理　大沢健夫

Graduate School of Mathematics, Nagoya Univ.

1. 以下にあげるのは、Riemann の写像定理から Hörmander の有名な論文 "L^2 estimates and existence theorems for the $\bar\partial$ operator, Acta Math 113 (1965), 89-152" までの、Bergman 核と多変数複素解析に関連が深い研究を年代順に並べたものである.

1851　Riemann の写像定理

1907　Poincaré の観察 ($\Rightarrow \mathbb{D}^2 \not\simeq \mathbb{B}^2$)

'22 ~ '34　Bergmann 核、Bergman 計量、Bergman 核の境界挙動、Bergman-Weil の積分公式

('27　Caratheodory 計量、'32　複素多様体)

'31 ~ '53　岡・Cartan 理論

'31　Hodge・de Rham 理論

('32　Čech コホモロジー群)

'40　Weyl の直交射影の方法

'50 ～ '53　Garabedian, Spencer ： Bergman核が提供する諸問題の実解析的定式化（$\bar{\partial}$-Neumann問題）

'54　Grauert ： Stein多様体の完備Kähler性

'55　Bremermann： Bergman完備な領域（$\subset \mathbb{C}^n$）のStein性

（'53　小平の消滅定理　'54　秋月・中野の消滅定理）

'57　Kohn-Spencer 特異積分による$\bar{\partial}$-Neumann問題へのアプローチ，Newlander-Nirenbergの定理

'58　Morrey ： 'Grauertチューブ'上の$\bar{\partial}$作用素に対するL^2評価式（$\Rightarrow$ C^ω埋め込み定理）

'61　$\bar{\partial}$-Neumann問題のKohn解（強擬凸領域の場合）
秋月・中野の定理の完備Kähler多様体への一般化
（Andreotti-Vesentini）

'59, '62　複素多様体上のBergman計量、完備性判定条件
（小林昭七）

'62　Andreotti-Grauertの有限性定理

'65　ウェイトつきL^2評価式の方法

$\left\{\begin{array}{l}\text{Hörmander} \Rightarrow \text{Runge型近似定理、強擬凸領域上のBergman核の境界挙動の決定} \\ \text{Andreotti-Vesentini} \Rightarrow \text{消滅定理}\end{array}\right.$

この年譜からもわかるように、$\bar{\partial}$-Neumann問題はBergman核と最初から密接な関係にあった。それが定式化されてから解けるまでの約10年間は、R. Remmertが'黄金期'と呼んだ1949年から59年までの期間とほぼ一致する。しかしこの収獲期を経てもなお、Bergman核の解明への実質的な第一歩はHörmanderの仕事('65)を待たねばならなかった。

2. Bergmanが核関数を導入した経緯をBehnke-Thullenの本、"Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, 1934, 2nd ed. Erg. Math. 51 (1970) Springer"に沿って振り返っておこう。

Bergmanの正則写像論　Bergmanは$R_4(=\mathbb{C}^2)$上の領域のうち、変換 $W=f(w,z)=w+\cdots$, $Z=g(w,z)=z+\cdots$ によって互に移りあうものどうしを一つのクラスと考えた。その目的は一つ一つのクラスについてその代表領域を求め、さらに任意の領域$\mathcal{B}$に対して$\mathcal{B}$を代表領域へと写像する双正則対応を決定することであった。彼はこのために二つの原理を用いた。

i) 双正則対応は与えられた領域に対して一意的に定まる直交関数系に関連づけられる。

ii) その関数系は極値問題の解として特徴づけられる。

Bergmanの考察は多くの場合、領域上の核関数の概念に基礎づけられていた。領域 $\mathcal{B}$ 上の完全正規直交系 $\{p_\nu(w,z)\}$ に対する核関数とは、実関数 $K(w,z)=\sum|p_\nu(w,z)|^2$ をいう。このとき $K(w_0,z_0)=\mathrm{Max}\,|h(w_0,z_0)|^2$ が成立する。ただし $h(w,z)$ は $\mathcal{B}$ 上の正則関数で L^2 ノルムが 1 であるものを動くとする。特にこれより、核関数は完全正規直交系のとり方によらず、領域 $\mathcal{B}$ のみによって決まる関数である。

Bergmanは $K(w,z)$ について、とりわけその境界挙動を研究した。彼は領域の $\mathcal{L}evi$ 形式 $L(\varphi)$ と $K(w,z)$ との間に成り立つ関係を発見した。境界の一部 $\varphi(u,v,x,y)=0$ が2回連続的微分可能であり、そこで $L(\varphi)<0$ が成り立てば、$K(w,z)$ は境界点の近くで有界である。逆に $L(\varphi)\geq 0$ ならば、$K(w,z)$ は一般に $|\varphi|^{-1}$ に対して2位または3位の無限大である。

核関数を補助手段として、Bergmanはさらに双正則変換によって不変な計量を構成した。

B-Tの本(旧版)はこの文章で終わっている。

3. Bergman核の境界挙動に関する最初の一般的結果は前出のHörmanderの論文で確立された。その時の事情を彼は最近

の論文"A history of existence theorems for the Cauchy-Riemann complex in L^2 spaces, J. Geom. Analysis 13 (2003), 329-357" の中で次のように振り返っている.

私の論文(Acta Math. 1965)は、C^2級の強擬凸境界点における Bergman 核の漸近挙動に関する結果を含んでいるが、これについてはとっておきの裏話(special history)がある。核関数にその名を冠される Stefan Bergman は、長く Stanford 大学に在籍した。彼は一種独特の(rather special)人物で、噂によれば人々を拉致(corner)して核関数について語り聞かせるのを常としていた。彼の核関数への情熱は限りなく、そのため彼の話は延々と続くと言われていた。相当長い間、私は彼から逃げおおせていたのだが、それでもとうとう彼に拉致される日がやって来た。彼が特に私に話したかったのは核関数の境界挙動に関する論文(1932)についてだった。彼は始め、それを Acta Math. に投稿して Torsten Carleman に掲載を拒否された時の経緯についてくどくど語った。その恨みは30年たっても綿々として絶えることは無いのだった。次に彼は、Carleman の仕打ちがいかに不当なものだったかを私に納得させようと、論文の主結果を語り出した。それは $\mathbb{C}^2$ 内の領域の核関数の境界挙動に関するものであり、方法とし

ては領域を、変数を適当に変換した後、内と外から開球または2重円板で近似する可能性に頼っていた。彼の論文の明白な弱点は、そのような変数変換で領域全体で有効なものの存在がほとんど検証不可能なことだった。

とはいうものの、すべての C^2 級強擬凸境界点にたいしてそのまわりの局所座標を適当に選べば、境界は高次の無限小を除いて球に一致する。……　Bergmanから解放され歩いて帰宅する途中私はふと気付いた。（私の）新しい L^2 評価式、それこそがBergmanの漸近公式を n 変数への一般化もこめて正当化するために必要なものだということを。実際、この方法は $\bar{\partial}$ 作用素の最大閉拡張がスカラーに対して閉値域を持つ場合、よって特に $\mathbb{C}^n$ 内のすべての擬凸開集合に対して、任意の強擬凸境界点でBergmanの漸近公式が成り立つことを保証する。

このことを書き下したのがActa論文の第3.5節である。

4. Garabedian と Spencer はコンパクトな複素多様体上のHodge理論を開多様体へと一般化するため、境界をつけ加えることによって（有界）領域をコンパクト化し、その上で退化楕円型境界値問題である $\bar{\partial}$-Neumann問題を定式化したのだったが、Hörmander や Andreotti - Vesentini らは開多様体上の

$\bar\partial$方程式論を（少なくとも一旦は）境界値問題の枠組みから解放した．彼らの仕事はある意味で伝統的な解析学の精神から外れている．というのも，彼らは‘良い境界条件’を捜すことを最初から放棄しているからである。しかしこのためL^2評価式の方法がかえって身軽になり，応用への柔軟性を獲得したことを見逃してはならない。実際，L^2評価式を用いて方程式 $\bar\partial f = u$ を（条件 $\bar\partial u = 0$ の下で）解くことは，ある定数Cに対して不等式 $|(u, v)| \le C\|\bar\partial^* v\|$ がすべての $v \in \mathrm{Dom}\,\bar\partial^*$ に対して成り立つようなL^2ノルムを求めることに他ならず，そのためには‘$\bar\partial$データ’uに適合した計量を選ぶ必要が生ずる。Hörmander-Andreotti-Vesentini のL^2理論はこの点において Kohn の方法より利便性が高く，L^2評価つきの割算問題や拡張問題がこの方法で解かれている．(e.g. Skoda のL^2割算定理，大沢・竹腰・Manivel のL^2拡張定理，etc.）

ここでL^2理論の概観を復習しておこう．(M, g)を連結なn次元の完備 Hermite 多様体とし，$C^{p,q}(M)$でM上のC^∞級の(p, q)形式の集合，$C_0^{p,q}(M)$でコンパクトな台をもつ$C^{p,q}(M)$の元全体を表す。(E, h)をM上の Hermite 正則ベクトル束とし，$C^{p,q}(M, E)$でM上のC^∞級E値(p, q)形式の集合を表す．
$C_0^{p,q}(M, E) = \{u \in C^{p,q}(M, E) \mid \mathrm{supp}\, u \Subset M\}$ とおく。

$C_0^{p,q}(M)$（または$C_0^{p,q}(M, E)$）を計量g, hに関するL^2ノルム

で完備化したものを $L^{p,q}(M)$（または $L^{p,q}(M,E)$）で表す．

$(0,1)$ 型の複素外微分を $\bar{\partial}$ で表す．$\bar{\partial}$ は $L^{p,q}(M,E)$ にはその最大閉拡張として作用させる。E のファイバー計量 h を $\mathrm{Hom}(E,E^*)$ の C^∞ 級切断とみなし、$\bar{\partial}$ の複素共役を ∂ として作用素 $\partial_h = h^{-1}\circ\partial\circ h$ および $\Theta_h = \bar{\partial}\partial_h + \partial_h\bar{\partial}$ を考える。Θ_h は 0 階の作用素であり、従って $\mathrm{Hom}(E,E)$ を係数とする $(1,1)$ 形式を乗ずる作用に等しい。その形式を (E,h) の曲率形式と言い、Θ_h と同じ記号で表す．局所座標を用いれば Θ_h は $(1,1)$ 形式を成分にもつ行列となり

$$\Theta_h = \left(\sum_{\alpha,\beta} \Theta^{\mu}_{\alpha\bar{\beta}\nu}\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \right)_{\mu,\nu}$$

と書ける．また M の正則接ベクトル束を $T_M^{1,0}$ とすると、$h\circ\Theta_h$ は $T_M^{1,0}\otimes E$ の各ファイバー上の Hermite 形式を与える。

定義　$h\circ\Theta_h$ が $T_M^{1,0}\otimes E$ の各ファイバー上で正値（または半正値）のとき，(E,h) は中野の意味で正（または半正）であるという。このことを単に $\Theta_h > 0$（または $\Theta_h \geq 0$）で表す。

定理 1.（Hö-And-Ves）　M 上に C^∞ 級の皆既関数 φ があり，

$\partial\bar{\partial}\varphi > 0$ をみたすとき、任意の (E, h) に対して増加凸関数 λ が存在して、h を $he^{-\lambda(\varphi)}$ に変更した後に次が成り立つ。

$\forall p \geq 0 \quad \forall q > 0$ に対し

$$\mathrm{Ker}\,\bar{\partial} \cap L^{p,q}(M, E) = \{ v \in L^{p,q}(M, E) \mid \exists u \in L^{p,q-1}(M, E) \text{ s.t. } \bar{\partial} u = v \}$$

ただし φ が M 上の皆既関数であるとは、φ は実数値関数であり $\{x \in M \mid \varphi(x) < c\} \Subset M$ が $\sup \varphi$ 未満の任意の c に対して成立することをいう。

Bergman 核の境界挙動の評価に使われたのは次である。

定理２（Hörmander）　Ω を $\mathbb{C}^n$ 内の擬凸領域とし、ψ を Ω 上の多重劣調和関数とする。このとき Ω 上の可測な $(0, q)$ 形式 v（ただし $q > 0$）が $\bar{\partial} v = 0$ をみたし、かつ $\int_\Omega e^{-\psi}|v|^2 < \infty$ であるとすれば、Ω 上の可測な $(0, q-1)$ 形式 u が存在して、

$\bar{\partial} u = v$ かつ $\displaystyle\int_\Omega e^{-\psi}(1 + \|z\|^2)^{-2}|u|^2 \leq \int_\Omega e^{-\psi}|v|^2$ となる。

ただし積分は Lebesgue 測度に関するものとする。

これに先立って、Andreotti-Vesentini は次を得ていた。

定理３（Andreotti-Vesentini, 1961）　(M, g) は完備な Kähler 多様体、(E, h) は Hermite 正則直線束で、その曲率形式の g

に関する固有値がすべて正定数 c に等しいとする。このとき $p+q>n$ ならば次が成り立つ。

$\forall v \in L^{p,q}(M,E)\cap C^{p,q}(M,E)$ に対し、
$\exists u \in L^{p,q-1}(M,E)\cap C^{p,q-1}(M,E)$ s.t.
$\bar\partial u = v$ かつ $c\|u\|^2 \leq (p+q-n)\|v\|^2$.

定理2と定理3の関係は、後に Skoda, 中野, Demailly, 筆者らの仕事により明らかになった。要は定理3が $p=n$ の場合に限ってではあるが、g の完備性の仮定なしで、しかし M が完備 Kähler 計量をもつという前提で成立する。さらに M が Stein 多様体ならば、h を $he^{-\psi}$（ψ は M 上の任意の多重劣調和関数）に置きかえてもよい。定理3をここまで一般化すれば定理2はその系になる。

最近、Bo-Yong Chen (陳伯勇) 氏は多重複素グリーン関数に関する新しい結果と L^2 拡張定理を用いて次を示した。

定理4（陳伯勇 '03, preprint） M が有界な強多重劣調和皆既関数を持てば、M 上の Bergman 計量は完備である。

これは小林昭七氏により出された問題でもあった。

5. ちょうど20年前、DonnellyとFeffermanは新しいL^2評価式を示した（Ann. of Math. 118 (1983)）。その画期的な所は評価式がベクトル束の曲率の正値性の仮定なしに成立するという点にある。彼らがよりどころとしたのはKählerポテンシャルの勾配（gradient）であった。K. Diederichが示したように（cf. Math. Ann. 187 (1970)）、強擬凸領域のBergman計量についてはそれは有界になる。この性質を利用して彼らはL^2評価式を導き、L^2 $\bar\partial$コホモロジー群に関する注目すべき結果を得た。

定理5（Donnelly-Fefferman '83）Dを$\mathbb{C}^n$の有界な強擬凸領域、$H^{p,q}_{(2)}(D)$をBergman計量に関するDの(p,q)次L^2 $\bar\partial$コホモロジー群とすれば

$$H^{p,q}_{(2)}(D) \simeq \begin{cases} \{0\} & (p+q \neq n) \\ \ell^2 & (p+q=n) \end{cases}$$

が成立する。（$H^{p,q}_{(2)}(D) := \mathrm{Ker}\,\bar\partial \cap L^{p,q}(D) / \bar\partial L^{p,q-1}(D) \cap L^{p,q}(D)$）

L^2拡張定理の証明にはこの考え方に影響を受けた評価式が用いられたので、定理5はBergman核の境界挙動の解析（ただし弱擬凸の場合も含む）にも役立ったことになる。

定理5においては中間次L^2コホモロジー群の無限次元性も顕著な結果である．このことは開球の場合には少し前から知られており、一般の強擬凸領域の場合の証明はBergman計量の漸近挙動に関する結果を使ってそこに帰着させる。

1991年、JulgとKasparovは、連結な局所コンパクト群Gに付随する'K理論的な'環$R(G)$の特別なべき等元が、$G=SU(n,1)$の場合は単位元に等しいことを示すため、Dが開球の場合に$H^{p,q}_{(2)}(D)$ $(p+q=n)$を調和形式による表現を通じて∂D上のある種の微分形式のなす$Hilbert$空間と等長的に対応づけた。境界値の特徴づけはいわゆるRumin複体を用いてなされており、Poissonの公式に対応するものも存在する。このように、完備な（いわば境界が見えない）計量に対して境界対応が有用な形で定式化されたことは目覚しい。この観点からベクトル値Bergman核の境界挙動が解析できれば面白いだろう。そのためにはもう一人のBergmanともう一人のHörmanderが必要になるかもしれないが。

6. 1932年、チューリッヒでの国際数学者会議でG. Juliaは'複素変数関数論についての試論'の題で全体講演を行ない、その中で従来の'関数論'の枠組みを越えた所に多変数関数論の発展の可能性があることを示唆した。この予言は的中し、それか

ら30年の間に重要な発見が相次ぎ、多変数複素解析の基盤が確立された。その中でもっとも有名なのが正則凸性'31と上空移行原理'36に端を発する岡・Cartan理論であるが、それにRiemann-Roch-Hirzebruchの定理や方程式論を合わせた体系は、正にRiemannやPoincaréが描いた理想を体現している。

このような発展の結果、‘一般化された座標の間の幾何学的な関係’というものについての理解が格段に進んだと言えるだろう。しかし複素力学系の分野における近年の活況を見ても言えることだが、Juliaが意図したものは岡・Cartan理論だけではない。Bergman核は、Hörmanderの‘special history’からも分かるように、歴史的には他の理論に隠れて目立たなかった時期もあったようだが、最近その注目度は確実にupしている。その研究から数学の新しい分野が開かれる日も遠くないような気がする。（完）