

複素球状領域の Bergman 核

佐賀大学・文化教育学部 藤田 景子 (Keiko Fujita)
 Faculty of Culture and Education,
 Saga University

はじめに

消極的な態度の私を再三にわたり研究集会に誘って下さり講演の機会を与えて下さった代表者の群馬大学工学部の斎藤三郎先生に感謝致します。

以下は、私のここ 2, 3 年の研究内容と国際基督教大学の森本光生教授との共同研究の概略を日本語で記載したものです。関心を持たれた方はレファレンスに記載の英文論文をご覧下さい。最も関係のある論文は [3] と [4] です。 N_p -ノルムに関しては [8] を、 N_p -ノルムを含むより一般のノルムに関しては [1] をご覧下さい。[2], [5], [7] では N_p -球上の正則関数、解析汎関数の特徴付けなどを中心に取り扱い、[2] ではフーリエ・ボレル変換、ベルグマン変換などにも触れました。

目次

1	導入	F-2
2	N_p-球	F-3
2.1	リーノルム	F-3
2.2	リー球	F-3
2.3	N_p -ノルム	F-4
2.4	N_p -ノルムとチェビシエフ多項式との関連	F-5
2.5	N_p -球	F-5
3	ベルグマン核	F-6
3.1	ハーディー空間 $HO(\tilde{B}_p^2(r))$ のベルグマン核	F-6
3.2	ハーディー空間 $HO_\Delta(\tilde{B}_p^2(r))$ の調和ベルグマン核	F-6
3.3	調和ベルグマン核の例	F-7
	参考文献	F-8

1 導入

複素ユークリッド空間 \mathbf{C}^{n+1} の有界領域 X 上の正則関数からなる空間でコンパクト一様収束の位相をいれた空間を $\mathcal{O}(X)$ で表す。

$$HO(X) = \left\{ f \in \mathcal{O}(X); \int_X |f(w)|^2 dV_X(w) < \infty \right\}$$

とおく。ただし $dV_X(w)$ は X 上の正規化したルベーグ測度である。

Δ で \mathbf{C}^{n+1} 上の複素ラプラス作用素を表す：

$$\Delta_z \equiv \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial z_{n+1}^2}.$$

関数 f が微分方程式 $\Delta_z f(z) = 0$ を満たすとき、 f を複素調和関数と呼ぶ。

ハーディー空間 $HO(X)$ の部分空間として

$$HO_\Delta(X) = \{f \in HO(X); \Delta_z f(z) = 0\}$$

を考える。以下、 $HO_\Delta(X)$ のベルグマン核を“調和”ベルグマン核と呼ぶ。

1次元のユークリッド球 $D(r) = \{z \in \mathbf{C}; |z| < r\}$ の場合、ハーディー空間 $HO(D(r))$ に対するベルグマン核 $B_r^1(z, w)$ および、 $HO_\Delta(D(r))$ に対する調和ベルグマン核 $B_{r,\Delta}^1(z, w)$ は次式で与えられる：

$$B_r^1(z, w) = \frac{r^4}{(r^2 - z\bar{w})^2}, \quad B_{r,\Delta}^1(z, w) = 1 + 2\frac{z\bar{w}}{r^2}. \quad (1)$$

2次元以上の場合には、ベルグマン核の存在が分かっているが、それを(1)のような具体的な式で求めることは難しい。複素ユークリッド球 $\tilde{B}_2^{n+1}(r)$ やリー球 $\tilde{B}^{n+1}(r)$ など特別な領域の場合には $HO(\tilde{B}_2^{n+1}(r))$ に対するベルグマン核 $B_{2,r}^{n+1}(z, \bar{w})$ や $HO(\tilde{B}^{n+1}(r))$ に対するベルグマン核 $B_r^{n+1}(z, \bar{w})$ は知られている。

$$B_{2,r}^{n+1}(z, \bar{w}) = \frac{r^{2n+4}}{(r^2 - z \cdot w)^{n+2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$B_r^{n+1}(z, \bar{w}) = \frac{r^{4n+4}}{(r^4 - 2r^2 z \cdot w + z^2 w^2)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

ここで $z \cdot w = z_1 w_1 + z_2 w_2 + \cdots + z_{n+1} w_{n+1}$, $z^2 = z \cdot z$ である。

$n \geq 2$ に対する(2)の証明は[6]にある。

(F-2)

2 N_p -球

2.1 リーノルム

複素ユークリッド空間 \mathbb{C}^{n+1} 上の点 $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$ に対して、Lie ノルム $L(z)$ は

$$L(z) = \sqrt{\|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2}}$$

で与えられる。ここで、 $\|z\|^2 = z \cdot \bar{z}$ である。 $z \in \mathbb{C}$ ならば $L(z) = |z|$ であり、 $z \in \mathbb{C}^2$ ならば、

$$L(z) = \max\{|z_1 \pm iz_2|\} \quad (3)$$

である。従って、リーノルム $L(z)$ は \mathbb{C}^2 の上限ノルム $\|\cdot\|_\infty$ と同値である。よって、リーノルムを 2 次元の上限ノルムの別の高次元化と考えることもできる。

2.2 リー球

$$\tilde{B}^{n+1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; L(z) < r\}$$

でリー球を定義する。(3) より、

$$\tilde{B}^2(r) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; \max\{|z_1 \pm iz_2|\} < r\}$$

だから、2 次元の場合、変数変換 $Z_1 = z_1 + iz_2, Z_2 = z_1 - iz_2$ によって、リー球は多重円板と同値であることが分かる:

$$\tilde{B}^2(r) \cong D_2(r) = \{Z = (Z_1, Z_2) \in \mathbb{C}^2; |Z_1| < r, |Z_2| < r\}.$$

従って、 $HO(\tilde{B}^2(r))$ に対するベルグマン核 $B_r^2(z, w)$ は 1 次元の結果 (1) から求めることができる。また、 $\Delta_z = 4 \frac{\partial^2}{\partial Z_1 \partial \bar{Z}_2}$ であることを考慮すれば、 $HO_\Delta(D_2(r)) = \{a + \sum b_k Z_1^k + \sum c_k Z_2^k\}$ であることが分かり、 $HO_\Delta(D_2(r))$ のベルグマン核 $B_{r,\Delta}^2(Z, W)$ も簡単に求めることができる。ベルグマン核 $B_r^2(z, w)$ と調和ベルグマン核 $B_{r,\Delta}^2(z, w)$ は

$$\begin{aligned} B_r^2(z, w) &= \frac{r^8}{(r^4 - 2r^2 z \cdot \bar{w} + z^2 \bar{w}^2)^2}, \\ B_{r,\Delta}^2(z, w) &= \frac{r^8 - z^2 \bar{w}^2 (4r^4 - 4r^2 z \cdot \bar{w} + z^2 \bar{w}^2)}{(r^4 - 2r^2 z \cdot \bar{w} + z^2 \bar{w}^2)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。

2.3 N_p -ノルム

$p \in \mathbf{R}$ に対して次の関数を考える:

$$\begin{aligned} N_p(z) &= \left(\frac{1}{2} \left(L(z)^p + (|z^2|/L(z))^p \right) \right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{\left(\|z\|^2 + \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2} \right)^{\frac{p}{2}} + \left(\|z\|^2 - \sqrt{\|z\|^4 - |z^2|^2} \right)^{\frac{p}{2}}}{2} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

$p \geq 1$ の時、この関数は p に関して単調増加であり、 $N_p(z)$ は \mathbf{C}^{n+1} 上のノルムとなる。([1] または [8] を見よ)。また、

$$L(z) = \lim_{p \rightarrow \infty} N_p(z)$$

であるから、 $N_\infty(z)$ をリーノルム $L(z)$ とみなす。

定義式より、 $p = 1, 2$ のときの N_p -ノルムは次式のように簡単になる。

$$N_1(z) = \sqrt{(\|z\|^2 + |z^2|)/2}, \quad N_2(z) = \|z\|. \quad (5)$$

また、

$$\sqrt{(\|z\|^2 + |z^2|)/2} = \sup\{|z \cdot w|; L(w) \leq 1\} = L^*(z)$$

であり、 N_1 -ノルムは双対リーノルムである。さらに、 $1/p + 1/q = 1$ をみたす p と q に対して $N_p^*(z) = N_q(z)$ であることも分かっている。つまり、 $2 \leq a \leq b$ のとき、

$$L^*(z) = N_1(z) \leq N_b^*(z) \leq N_a^*(z) \leq \|z\| \leq N_a(z) \leq N_b(z) \leq N_\infty(z) = L(z)$$

が成り立つ。2次元の場合、(3) より、

$$N_p(z) = \left(\frac{|z_1 + iz_2|^p + |z_1 - iz_2|^p}{2} \right)^{1/p}$$

となり、 N_p -ノルムは L_p -ノルム $\|\cdot\|_p$ と同値である。従って、我々が考察する N_p -ノルムは2次元の L_p -ノルムの別の高次元化であるということが出来る。

1次元の場合は、全ての実数 p に対して $N_p(z) = |z|$ となり、考察すべきことは何もない。従って、今後は $n \geq 1$ を仮定する。

2.4 N_p -ノルムとチェビシエフ多項式との関連

我々が考察する N_p -ノルムはチェビシエフ多項式を用いて表示することもできる。 k 次のチェビシエフ多項式 $T_k(x)$ は次式で定義されている:

$$T_k(x) = \frac{(x + i\sqrt{1-x^2})^k + (x - i\sqrt{1-x^2})^k}{2}.$$

次の様にチェビシエフ多項式を $\mathbf{C}^{n+1} \times \mathbf{C}^{n+1}$ の同次多項式に拡張する。

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{k,n}(z, w) &= (\sqrt{z^2})^k (\sqrt{w^2})^k T_k\left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} \cdot \frac{w}{\sqrt{w^2}}\right) \\ &= \frac{(z \cdot w + i\sqrt{z^2 w^2 - (z \cdot w)^2})^k + (z \cdot w - i\sqrt{z^2 w^2 - (z \cdot w)^2})^k}{2}. \end{aligned}$$

次に、自然数変数 k を実数 $\alpha \in \mathbf{R}$ に拡張した関数

$$\tilde{T}_{\alpha,n}(z, w) = \frac{(z \cdot w + \sqrt{(z \cdot w)^2 - z^2 w^2})^\alpha + (z \cdot w - \sqrt{(z \cdot w)^2 - z^2 w^2})^\alpha}{2}$$

を考える。このとき、 $\tilde{T}_{\alpha,n}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2} (L(z)^{2\alpha} + (|z^2|/L(z))^{2\alpha})$ だから、

$$N_p(z) = \left(\tilde{T}_{p/2,n}(z, \bar{z}) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad z \in \mathbf{C}^{n+1}$$

となり、 N_p -ノルムがチェビシエフ多項式を媒介に表示することができた。

2.5 N_p -球

さて、 $p \geq 1$ に対して、

$$\tilde{B}_p^{n+1}(r) = \{z \in \mathbf{C}^{n+1}; N_p(z) < r\}$$

で N_p -球 を定義する。(5) より $\tilde{B}_2^{n+1}(r)$ はユークリッド球

$$\tilde{B}_2^{n+1}(r) = \{z \in \mathbf{C}^{n+1}; \|z\| < r\},$$

である。

$$\bigcap_{p \geq 1} \tilde{B}_p^{n+1}(r) = \{z \in \mathbf{C}^{n+1}; L(z) < r\}$$

だから、 $\tilde{B}_\infty^{n+1}(r)$ をリー球 $\tilde{B}^{n+1}(r)$ とみなす。

(F-5)

3 ベルグマン核

記号の準備を省くためここでは 2 次元の場合のみ記載する。3 次元以上の場合に関しては、[2] を参照されたい。

以下では 2 次元の場合のみ考察するので、 $\tilde{T}_{k,1}(z, w)$ を $\tilde{T}_k(z, w)$ と書くことにする。特に 2 次元の場合には、

$$\Delta_z \tilde{T}_k(z, w) = \Delta_w \tilde{T}_k(z, w) = 0$$

となり、 $\tilde{T}_k(z, w)$ は $z \in \mathbb{C}^2$ または $w \in \mathbb{C}^2$ に関して k 次の同次調和多項式である。 $N(k, 1)$ で \mathbb{C}^2 の k 次の同次調和多項式の次元を表す。

$$N(0, 1) = 1, \quad N(k, 1) = 2, \quad k = 1, 2, \dots$$

である。

3.1 ハーディー空間 $HO(\tilde{B}_p^2(r))$ のベルグマン核

定理 3.1 ([3]) ハーディー空間 $HO(\tilde{B}_p^2(r))$ のベルグマン核 $B_{p,r}^2(z, w)$ は次の二重級数和で与えられる。

$$\begin{aligned} B_{p,r}^2(z, w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{[k/2]} \frac{N(k-2l, 1) \Gamma(\frac{2}{p})^2 \Gamma(\frac{2k+4}{p} + 1) (z^2)^l (\bar{w}^2)^l \tilde{T}_{k-2l}(z, \bar{w})}{\Gamma(\frac{4}{p} + 1) \Gamma(\frac{2k-2l+2}{p}) \Gamma(\frac{2l+2}{p}) 2^{\frac{2k}{p}} r^{2k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{\Gamma(\frac{2}{p})^2 \Gamma(\frac{2k+4}{p} + 1)}{\Gamma(\frac{4}{p} + 1) \Gamma(\frac{2k-2l+2}{p}) \Gamma(\frac{2l+2}{p}) 2^{\frac{2k}{p}} r^{2k}} (X_1)^{k-l} (X_2)^l, \end{aligned}$$

ここで

$$X_1 = z \cdot \bar{w} + i\sqrt{z^2 \bar{w}^2 - (z \cdot \bar{w})^2}, \quad X_2 = z \cdot \bar{w} - i\sqrt{z^2 \bar{w}^2 - (z \cdot \bar{w})^2} \quad (6)$$

とおいた。

3.2 ハーディー空間 $HO_{\Delta}(\tilde{B}_p^2(r))$ の調和ベルグマン核

定理 3.2 ([4]) ハーディー空間 $HO_{\Delta}(\tilde{B}_p^2(r))$ の調和ベルグマン核 $B_{p,r,\Delta}^2(z, w)$ は以下の無限級数和で与えられる。

$$B_{p,r,\Delta}^2(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N(k, 1) \Gamma(\frac{2}{p}) \Gamma(\frac{2k+4}{p} + 1)}{\Gamma(\frac{4}{p} + 1) \Gamma(\frac{2k+2}{p}) 2^{\frac{2k}{p}} r^{2k}} \tilde{T}_k(z, \bar{w}),$$

(F-6)

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2}{p})\Gamma(\frac{2k+4}{p} + 1)}{\Gamma(\frac{4}{p} + 1)\Gamma(\frac{2k+2}{p})2^{\frac{2k}{p}}r^{2k}} ((X_1)^k + (X_2)^k) \\
&= F_p\left(\frac{X_1}{2^{2/p}r^2}\right) + F_p\left(\frac{X_2}{2^{2/p}r^2}\right) - 1,
\end{aligned}$$

ただし X_1 と X_2 は (6) で与えられ、 $F_p(X)$ は次式で定義される関数である。

$$F_p(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{2}{p})\Gamma(\frac{2k+4}{p} + 1)}{\Gamma(\frac{4}{p} + 1)\Gamma(\frac{2k+2}{p})} X^k. \quad (7)$$

(7) 式において、 $p = \infty$ のとき、

$$F_{\infty}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)X^k = \frac{1}{(1-X)^2}$$

と無限級数和が求まるように、もし、他の p に対しても (7) が具体的な簡単な関数で表すことができれば、調和ベルグマン核 $B_{p,r,\Delta}^2(z,w)$ も簡単な形で表示できる。

3.3 調和ベルグマン核の例

例 1 (リー球)

$$\begin{aligned}
B_{r,\Delta}^2(z,w) &= F_{\infty}\left(\frac{X_1}{r^2}\right) + F_{\infty}\left(\frac{X_2}{r^2}\right) - 1 \\
&= \frac{1 - 4\frac{z^2}{r^2}\frac{\bar{w}^2}{r^2} + 4\left(\frac{z}{r} \cdot \frac{\bar{w}}{r}\right)\frac{z^2}{r^2}\frac{\bar{w}^2}{r^2} - \left(\frac{z^2}{r^2}\frac{\bar{w}^2}{r^2}\right)^2}{\left(1 - 2\frac{z}{r} \cdot \frac{\bar{w}}{r} + \frac{z^2}{r^2}\frac{\bar{w}^2}{r^2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

もちろん、§2.2 の (4) と同じである。

ここで、分子が $\frac{z}{r} \cdot \frac{\bar{w}}{r} \in \mathbb{C}$ と $\frac{z^2}{r^2}\frac{\bar{w}^2}{r^2} \in \mathbb{C}$ の 2 次の多項式であることも注意しておく。

例 2 (複素ユークリッド球)

$$\begin{aligned}
B_{2,r,\Delta}^2(z,w) &= F_2\left(\frac{X_1}{2r^2}\right) + F_2\left(\frac{X_2}{2r^2}\right) - 1 \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{X_1}{2r^2}\right)^3} + \frac{1}{\left(1 - \frac{X_2}{2r^2}\right)^3} - 1 \\
&= \frac{Q_{2,r}\left(\frac{z}{\sqrt{2r}} \cdot \frac{\bar{w}}{\sqrt{2r}}, \frac{z^2}{2r^2}\frac{\bar{w}^2}{2r^2}\right)}{\left(1 - 2\frac{z}{\sqrt{2r}} \cdot \frac{\bar{w}}{\sqrt{2r}} + \frac{z^2}{(\sqrt{2r})^2}\frac{\bar{w}^2}{(\sqrt{2r})^2}\right)^3},
\end{aligned}$$

(F-7)

ただし、 $Q_{2,r}(\frac{z}{\sqrt{2r}} \cdot \frac{\bar{w}}{\sqrt{2r}}, \frac{z^2}{2r^2} \frac{\bar{w}^2}{2r^2})$ は以下の式で定義される $\frac{z}{\sqrt{2r}} \cdot \frac{\bar{w}}{\sqrt{2r}} \in \mathbb{C}$ と $\frac{z^2}{2r^2} \frac{\bar{w}^2}{2r^2} \in \mathbb{C}$ の 3 次の多項式である：

$$Q_{2,r}(s, t) = 1 - 9t + 18ts - 3t^2 - 12ts^2 + 6t^2s - t^3.$$

例 3 (双対リ一球)

$$\begin{aligned} B_{1,r,\Delta}^2(z, w) &= F_1\left(\frac{X_1}{2^2 r^2}\right) + F_1\left(\frac{X_2}{2^2 r^2}\right) - 1 \\ &= \frac{1 + \frac{X_1}{2^2 r^2}}{\left(1 - \frac{X_2}{2^2 r^2}\right)^4} + \frac{1 + \frac{X_2}{2^2 r^2}}{\left(1 - \frac{X_1}{2^2 r^2}\right)^4} - 1 \\ &= \frac{Q_{1,r}\left(\frac{z}{2r} \cdot \frac{\bar{w}}{2r}, \frac{z^2}{4r^2} \frac{\bar{w}^2}{4r^2}\right)}{\left(1 - 2\frac{z}{2r} \cdot \frac{\bar{w}}{2r} + \frac{z^2}{(2r)^2} \frac{\bar{w}^2}{(2r)^2}\right)^4}, \end{aligned}$$

ただし、 $Q_{1,r}(\frac{z}{2r} \cdot \frac{\bar{w}}{2r}, \frac{z^2}{4r^2} \frac{\bar{w}^2}{4r^2})$ は以下の式で定義される $\frac{z}{2r} \cdot \frac{\bar{w}}{2r} \in \mathbb{C}$ と $\frac{z^2}{4r^2} \frac{\bar{w}^2}{4r^2} \in \mathbb{C}$ の 4 次の多項式である。

$$\begin{aligned} Q_{1,r}(s, t) &= 1 + 2s - 24t + 60st + 4t^2 \\ &\quad + 18st^2 - 80s^2t - 4t^3 + 48st^3 - 24s^2t^2 + 40s^3t - t^4. \end{aligned}$$

参考文献

- [1] M. Baran, Conjugate norms in C^n and related geometrical problems, *Dissertationes Mathematicae CCCLXXVII* (1998), 1-67.
- [2] K.Fujita, Bergman transformation for analytic functionals on some balls, *Microlocal Analysis and Complex Fourier Analysis*, World Scientific publisher, Singapore, 2002, 81-98.
- [3] K.Fujita, Bergman kernel for the Two-dimensional balls, to appear in *Complex Variable*.
- [4] K.Fujita, Harmonic Bergman kernel for some balls, to appear in *Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica*, 41(2003).
- [5] K.Fujita and M.Morimoto, On the double series expansion of holomorphic functions, *J. Math. Anal. Appl.* 272(2002), 335-348.

- [6] L.K.Hua, Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in Classical Domain, Moskow 1959, (in Russian); Translations of Math. Monographs vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1979.
- [7] M.Morimoto and K.Fujita, Analytic functions and analytic functionals on some balls, Proceedings of the Third ISAAC Congress, Kluwer Academic Publishers, 2003, 150-159.
- [8] M.Morimoto and K.Fujita, Between Lie norm and dual Lie norm, Tokyo J. Math., 24(2001), 499-507.