数理解析研究所講究録 1352 巻 2004 年 106-113

α-parabolic Bergman spaces and their reproducing kernels

茨城大学理学部　下村勝孝 (Katsunori Shimomura)
(Faculty of Science, Ibaraki University)
名古屋大学多元数理科学研究科　鈴木紀明 (Noriaki Suzuki)
(Graduate School of Mathematics, Nagoya University)
大阪市立大学理学研究科　西尾昌治 (Masaharu Nishio)
(Department of Mathematics, Osaka City University)

ここでは, 上半空間上で定義された α-放物型作用素 $(0 < \alpha \leqq 1)$ の解からなる Bergman 空間と, その再生核について述べる.

0. 導入

元来の Bergman 空間 B^2 は, 複素平面の単位円板 $D = \{z; |z| < 1\}$ 上の正則 L^2 関数全体

$$B^2 := \{f \in L^2(D);\ \text{holomorphic}\ \}, \quad \|f\|_{B^2}^2 := \iint_D |f(z)|^2 dxdy$$

からなる Hilbert 空間であり, 再生核を持つ.

一方,

$$\text{正則} \longrightarrow \text{調和}$$

とした空間も考えられ, harmonic Bergman space と呼ばれて, W.C.Ramay, H.Yi, B.R.Choe, H.Koo, M.Yamada などの研究がある ([8],[10],[11]).

ここでは, さらに

$$\text{調和} \longrightarrow \alpha\text{-放物型}$$

とした空間, α-parabolic Bergman space を考える. 本稿では論文 [6] で得られた結果を, 再生核を軸にして紹介する ([6] では $n = 1$ の場合は除外されているが, その後に $n = 1$ でも結果が成立することが判明した). ここで扱う α-放物型は, 調和の場合と熱方程式の解の場合を二つとも含んでいることを注意しておく.

1. 定義

以下では $0<\alpha\leqq 1$ と自然数 n を固定し, **上半空間**

$$\mathbb{R}^{n+1}_{+} := \{(x,t); x\in\mathbb{R}^n, t>0\}$$

上で α-**放物型作用素**

$$L^{(\alpha)} := \frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_x)^{\alpha}$$

を考える. $\alpha=1$ の時は放物型作用素の熱作用素 $\dfrac{\partial}{\partial t}-\Delta_x$ である. $\alpha=\dfrac{1}{2}$ の時は調和関数と結び付いている.

定義 1. 上半空間 $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ 上の関数 u が α-**放物型** (α-**parabolic**) であるとは, 次の二条件

- u は $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ 上で連続
- distribution の意味で $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ 上 $L^{(\alpha)}u=0$ を満たす

を満足することと定義する.

$0<\alpha<1$ ならば $(-\Delta_x)^{\alpha}$ は局所作用素ではないので, その場合には u の定義域が x 方向は $\mathbb{R}^n$ 全体でなければならないことに注意する. また, $L^{(\alpha)}$ は実作用素なので, 以下では実数値関数のみに限って考えることにする.

定義 2. $1\leqq p\leqq\infty$ とする. $L^p(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$ の部分空間 $\boldsymbol{b}^p_{\alpha}$ を

$$\boldsymbol{b}^p_{\alpha} := \{u\in L^p(\mathbb{R}^{n+1}_{+})\,;\, u \text{ は } \alpha\text{-放物型 }\}$$

と定義し, α-**放物型 Bergman 空間** (α-**parabolic Bergman space**) と呼ぶ. ノルムは上半空間の L^p-ノルム

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^{n+1}_{+})} = \left(\iint_{\mathbb{R}^{n+1}_{+}} |u(x,t)|^p\,dxdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

で定義する.

2. 結果その1 – 完備性と再生核の存在

最初の主要な結果は, 次の point evaluation の有界性である.

定理 1. 任意の $t>0$ に対して, 正の数 $C(t)$ が存在して,

$$|u(x,t)|\leqq C(t)\|u\|_p$$

が全ての $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対して成り立つ. つまり, $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対して点 (x,t) での値 $u(x,t)$ を対応させる線型汎関数は, $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ 上で有界である.

定理1から, $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ の Cauchy 列が $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上で一様収束することが判り, 収束先は連続かつ α-放物型となる. よって次の系を得る.

系 1. 全ての $1 \leqq p \leqq \infty$ に対して, $\boldsymbol{b}_\alpha^p$ は $\|\cdot\|_p$ ノルムに関して完備となり, Banach 空間である.

特に $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ は point evaluation が有界な Hilbert 空間になるので, 再生核が存在する.

系 2. $\boldsymbol{b}_\alpha^2$ は再生核 Hilbert 空間 (RKHS) である.

3. 結果その1の鍵

前節の「結果その1」の鍵となるのが

○ $\dfrac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_x)^\alpha$ の基本解 $W^{(\alpha)}$ とその微分の評価式

○ 任意の $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対して

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(y,s)u(x-y,t-s)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} W^{(\alpha)}(x-y,t-s)u(y,s)\,dy$$

$(x, y \in \mathbb{R}^n,\ t > s > 0)$ が成り立つ.

の二つである. 二番目の性質は一種の半群性である. p 乗可積分性があればこの性質が成り立つ, という事をポテンシャル論的方法で明らかにするのが [6] の主題の一つでもあるが, この稿の主題からは外れるので, その詳細は省略する.

4. 基本解

α-放物型作用素 $L^{(\alpha)} = \dfrac{\partial}{\partial t} + (-\Delta_x)^\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$ の基本解は, 逆フーリエ変換

$$W^{(\alpha)} = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^{2\alpha}} e^{ix\cdot\xi}\,d\xi & (t > 0), \\ 0 & (t \leqq 0) \end{cases}$$

によって与えられる. 前に注意したように, $\alpha = 1$ の時は heat kernel

$$W^{(1)}(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (t > 0)$$

に一致し, $\alpha=\frac{1}{2}$ の時は Poisson kernel

$$W^{(1/2)}(x,t)=\Gamma(\frac{n+1}{2})\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}\quad (t>0)$$

に一致する.

$W^{(\alpha)}$ の減少度は,

$$W^{(\alpha)}(x,t)=O(|x|^{-n-2\alpha}),\quad (|x|\to\infty)$$

であり, また同次性

$$W^{(\alpha)}(x,t)=t^{-\frac{n}{2\alpha}}W^{(\alpha)}(t^{-\frac{1}{2\alpha}}x,1),\quad (t>0)$$

がある. この二つを, 微分も含んだ形で精密化したものが次の補題である.

補題 1. 非負の整数 k と, 多重指数 β に対して正の数 $C_{k,\beta}$ が存在し,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta W^{(\alpha)}(x,t)\right|\leqq C_{k,\beta}\frac{t^{1-k}}{(t+|x|^{2\alpha})^{\frac{n+|\beta|}{2\alpha}+1}}$$

を満たす.

補題 1 により, 次の定理を得る. これは, 定理 1 を拡張しかつ精密化するものである.

定理 2. 正の数 $C_{\alpha,n,p}$ が存在し,

$$|u(x,t)|\leqq C_{\alpha,n,p}t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{1}{p}}\|u\|_p$$

が全ての $u\in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対して成り立つ. 更に, 非負の整数 k と, 多重指数 β に対して正の数 $C_{\alpha,n,p,k,\beta}$ が存在し,

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta u(x,t)\right|\leqq C_{\alpha,n,p,k,\beta}t^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)\frac{1}{p}-(\frac{|\beta|}{2\alpha}+k)}\|u\|_p$$

が全ての $u\in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対して成り立つ.

5. 再生核 – α-放物型 Bergman 核

上半空間 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上の積分核

$$R_\alpha(x,t;y,s):=-2\frac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial t}(x-y,t+s)\quad ((x,t),(y,s)\in\mathbb{R}_+^{n+1})$$

を, α-**放物型 Bergman 核** (α-**parabolic Bergman kernel**) と呼ぶ. 形からすぐ判るように, R_α は対称である. α-放物型 Bergman 核による積分作用素も R_α で表す. すなわち,

$$R_\alpha f(x,t) := \iint_{\mathbb{R}^{n+1}_+} R_\alpha(x,t;y,s) f(y,s)\, dyds, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}_+.$$

その名の通り, この α-放物型 Bergman 核が, 系 2 で存在が判っていた $\boldsymbol{b}^2_\alpha$ の再生核である.

定理 3. (再生性)
(a) 各 $1 \leqq p < \infty$ に対して,

$$R_\alpha u = u$$

が全ての $u \in \boldsymbol{b}^p_\alpha$ について成り立つ.
(b) 各 $1 < p < \infty$ に対して, 線型作用素

$$R_\alpha : L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+) \to \boldsymbol{b}^p_\alpha$$

は有界かつ全射である. 特に, $p = 2$ の時には直交射影を与える.

6. $1 < p < \infty$ の場合の双対空間

定理 3 を用いて, 次の双対性が示される.

定理 4. (双対空間) $1 < p < \infty$ とすると,

$$(\boldsymbol{b}^p_\alpha)' \cong \boldsymbol{b}^q_\alpha$$

但し, q は p の共役指数, すなわち $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ である.

$p = 1$ の時に成り立たないのは, $\dfrac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial t}(\cdot, \cdot + s) \in L^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ $(p > 1)$ だが $\dfrac{\partial W^{(\alpha)}}{\partial t}(\cdot, \cdot + s) \notin L^1(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ であることが影響している.

7. 積分核 R^m_α

$m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ に対して, 積分核 R^m_α を

$$R^m_\alpha(x,t;y,s) := \frac{(-2)^m}{m!} s^m \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^m R_\alpha(x,t;y,s)$$

で定義し, R_α^m による積分作用素も R_α^m で表す.

$$R_\alpha^m f(x,t) := \iint_{\mathbb{R}_+^{n+1}} R_\alpha^m(x,t;y,s) f(y,s)\, dyds.$$

$R_\alpha^0 = R_\alpha$ である. R_α と違って R_α^m は (x,t) と (y,s) に関して非対称だが, R_α の代りに用いれば, 定理3の (b) を $p=1$ の場合に拡張できる. すなわち,

定理 4. $m \geqq 1$ とする.
(a) 各 $1 \leqq p < \infty$ に対して,

$$R_\alpha^m u = u$$

が全ての $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ について成り立つ.
(b) 各 $1 \leqq p < \infty$ に対して, 線型作用素

$$R_\alpha^m : L^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) \to \boldsymbol{b}_\alpha^p$$

は有界かつ全射である.

定理 5. m, k を非負整数, $1 \leqq p < \infty$ とするとき,

$$R_\alpha^m \Big(t^k \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^k u\Big) = \frac{(m+k)!}{(-2)^k m!} u$$

が全ての $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対して成り立つ.

定理 6. 任意の正の整数 k と, $1 \leqq p < \infty$ に対して正の数 $c_{k,p}$ が存在し,

$$c_{k,p}^{-1} \|t^k \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^k u\,\|_p \leqq \|u\|_p \leqq c_{k,p} \|t^k \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^k u\,\|_p$$

が全ての $u \in \boldsymbol{b}_\alpha^p$ に対して成り立つ.

8. α-放物型 Bloch 空間 − $p=1$ の場合の双対空間

定理4で除外されていた $\boldsymbol{b}_\alpha^1$ の双対空間を考える.

定義 3. 上半空間上の α-放物型関数からなる関数空間 $\mathcal{B}_\alpha$ を

$$\mathcal{B}_\alpha := \{u; \mathbb{R}_+^{n+1} \text{ 上 } \alpha\text{-放物型}, \ \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}_+^{n+1}} \Big(t\Big|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\Big| + t^{\frac{1}{2\alpha}} |\nabla_x u(x,t)|\Big) < \infty\}$$

と定義し, **α-放物型 Bloch 空間** (α-**parabolic Bloch space**) と呼ぶ. α-放物型 Bloch 空間はノルム

$$\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha} := |u(0,1)| + \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}_+} \left(t\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| + t^{\frac{1}{2\alpha}}|\nabla_x u(x,t)|\right)$$

に関して Banach 空間となる.

この $\mathcal{B}_\alpha$ が $\boldsymbol{b}^1_\alpha$ の双対空間となる. 但し, $\boldsymbol{b}^1_\alpha$ の関数 u は積分が必ず 0 になる

$$\iint_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(x,t)\,dxdt = 0$$

ので, $\mathcal{B}_\alpha$ を $\mathbb{R}$ (定数関数) で割る必要がある.

定理 7. ($\boldsymbol{b}^1_\alpha$ の双対空間) 次の同型関係が成立する.

$$(\boldsymbol{b}^1_\alpha)' \cong \mathcal{B}_\alpha/\mathbb{R}.$$

pairing は

$$\langle u, [v]\rangle := -2\iint_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(x,t)t\frac{\partial}{\partial t}v(x,t)\,dxdt$$

で与えられるが, u が $\sup_{\mathbb{R}^{n+1}_+}(1+t)(1+t+|x|^{2\alpha})^{\frac{n}{2\alpha}+1}|u(x,t)| < \infty$ を満たせば,

$$\langle u, [v]\rangle = \iint_{\mathbb{R}^{n+1}_+} u(x,t)v(x,t)\,dxdt$$

が成り立つ.

定理 4 から $1 < p < \infty$ ならば $\boldsymbol{b}^p_\alpha$ は反射的であるが, $\boldsymbol{b}^1_\alpha$ は反射的でない. $\boldsymbol{b}^1_\alpha$ の predual ($X' = \boldsymbol{b}^1_\alpha$ となる Banach 空間) は何であるかを問題とする.

定義 4. $\mathcal{B}_\alpha$ の部分空間 $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ を

$$\mathcal{B}_{\alpha,0} := \{u \in \mathcal{B}_\alpha; \lim_{|x|+t+t^{-1}\to\infty} \left(t\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| + t^{\frac{1}{2\alpha}}|\nabla_x u(x,t)|\right) = 0\}$$

と定義し, **α-放物型 little Bloch 空間** (α-**parabolic little Bloch space**) と呼ぶ. これが $\boldsymbol{b}^1_\alpha$ の predual を与える.

定理 8. ($\boldsymbol{b}^1_\alpha$ の predual) 同型関係

$$(\mathcal{B}_{\alpha,0}/\mathbb{R})' \cong \boldsymbol{b}^1_\alpha$$

が成り立つ.

注意 $\mathcal{B}_{\alpha,0}$ の定義中に現れる lim の条件 $|x|+t+t^{-1}\to\infty$ は、(x,t) が $\mathbb{R}^{n+1}_{+}$ の 1 点コンパクト化 $\mathbb{R}^{n+1}_{+}\cup\{\infty\}$ の無限遠点 ∞ に収束することと同じである。

参考文献

[1] J. Bliedtner and W. Hansen, Potential theory, Springer-Verlag, 1986.

[2] J. L. Doob, Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer-Verlag, 1984.

[3] M. Itô, On α-harmonic functions, Nagoya Math. J., 26 (1966), 205–221.

[4] M. Itô and M. Nishio, Poincaré type conditions of the regularity for the parabolic operator of order α, Nagoya Math. J., 115 (1989), 1–22.

[5] N. S. Landkof, Foundations of modern potential theory, Springer-Verlag, 1972.

[6] M. Nishio, The Wiener criterion of regular points for the parabolic operator of order α, Nagoya Math. J., 116 (1989), 163–179.

[7] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α-Parabolic Bergman spaces, submitted.

[8] W. C. Ramey and H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 348 (1996), 633–660.

[9] N. A. Watson, Parabolic equations on an infinite strip, Dekker, 1989.

[10] M. Yamada, Carleson inequalities in classes of derivatives of harmonic Bergman functions with $0<p\leq 1$, Hiroshima Math. J., 29 (1999), 161–174.

[11] H. Yi, Harmonic little Bloch functions on half-spaces, Math. Japonica, (1) 47, (1998), 21-28.