数理解析研究所講究録 第2085巻 2018年 43-54

On diagrams of simplified trisections and mapping class groups

慶應義塾大学　早野　健太
Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology,
Keio University

1. 序

本稿の目的は、trisection および trisection 写像の定義や基本的な性質と、[10] にある結果の一部の、日本語による概説を与えることである。4 次元閉多様体 X の trisection とは、4 次元ハンドル体 $\natural^k(S^1 \times D^3)$ と微分同相な 3 つの部分多様体による、X の分割のことで、Gay-Kirby [6] により導入された概念である。この分割は 3 次元多様体論における Heegaard 分解の類似物であり、実際 Heegaard 分解と同様、次のことが知られている ([6]) :

- 任意の有向連結閉 4 次元多様体が trisection を許容し、しかも各多様体に対しその trisection は "安定化" と呼ばれる操作の差を除いて一意的である。
- Trisection は trisection 図式と呼ばれる、曲面内の単純閉曲線の族により表すことができる。

一方で trisection は、trisection 写像と呼ばれる平面への安定写像を介して構成することもできるので、trisection の理論は実可微分写像の特異点論とも関わりを持つ。

本稿の 2 節ではまず trisection と trisection 図式、およびそれらの間の同値関係を定義する。Trisection 図式から、trisection を持つ 4 次元多様体を構成することができるが、図式から位相不変量を計算する方法についても説明する。次に 4 次元多様体から 2 次元多様体への写像に現れる特異点について簡単に説明した後、trisection 写像を定義する。

本稿の 3 節で主に扱われる対象である単純な trisection 写像とは、臨界値集合に二重点を持たない trisection 写像のことで、Baykur-佐伯 [4] により初めて導入されたものである。[4] では任意の有向 4 次元閉多様体が単純な trisection 写像を持つということが示されており、さらに有向特異レフシェッツ束から単純な trisection 写像を得るアルゴリズムも具体的に与えられている。本稿の 3 節では、曲面の写像類群の必要な性質をまとめた後、Baykur-佐伯のアルゴリズムから得られる単純な trisection 写像に対応する、trisection 図式を決定する方法について説明する。

2. Trisection の定義と基本的性質

以下特に断らない限り、多様体は全て可微分、連結、有向で、多様体の間の写像は全て可微分かつ固有 (つまりコンパクト集合の逆像はコンパクト)、さらに多様体の間の微分同相は全て向きを保つものとする。

2.A. 4 次元多様体の trisection　k, g を $0 \leq k \leq g$ なる整数とする。$\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の種数 g の Heegaard 分解は分解を保つ微分同相の差を除いて一意的であるということが知られている ([11])。この分解を $\sharp^k(S^1 \times S^2) = Y_{k,g}^+ \cup Y_{k,g}^-$ とする。$Y_{k,g}^+ \cap Y_{k,g}^- \cong \Sigma_g$ であるこ

とに注意する。X を 4 次元閉多様体、$X_1, X_2, X_3 \subset X$ を X の余次元 0 の閉部分多様体とする。各 $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ に対し、微分同相 $\phi_i : X_i \to \natural^k(S^1 \times D^3)$ で、$\phi_i(X_i \cap X_{i\pm1}) = Y^{\pm}_{k,g}$ となるものが存在するとき、分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ を X の $\boldsymbol{(g,k)}$**–trisection** という。このとき $X_1 \cap X_2 \cap X_3 = \partial(X_i \cap X_{i\pm1}) \cong \Sigma_g$ であることに注意する。2 つの trisection $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$、$X' = X'_1 \cup X'_2 \cup X'_3$ に対し、$k \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ と微分同相 $\Phi : X \to X'$ で、$\Phi(X_i) = X'_{i+k}$ となるものが存在するとき、2 つの trisection は**同値**であるという。

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g)$、$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_g)$、$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ を閉曲面 Σ_g の cut system であるとする (つまり $\alpha_1, \ldots, \alpha_g \subset \Sigma_g$ は互いに交わらない単純閉曲線で、$\Sigma_g \setminus (\cup_i \alpha_i)$ は $2g$ 個の穴があいた球面と同相になる。β, γ についても同様)。$(\Sigma_g; \alpha, \beta)$、$(\Sigma_g; \beta, \gamma)$、$(\Sigma_g; \gamma, \alpha)$ がいずれも $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の種数 g の Heegaard 図式となるとき、$(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ を $\boldsymbol{(g,k)}$**–trisection 図式**という。2 つの trisection 図式 $(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$、$(\Sigma_g; \alpha', \beta', \gamma')$ が Σ_g の自己微分同相、α, β, γ の巡回置換、および α, β, γ それぞれの handleslide[1] で移りあうとき、2 つの図式は**同値**であるという。

$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ を (g,k)–trisection とする。X は向きを持つからその余次元 0 の部分多様体である X_1 も向きを持ち、その境界の部分多様体として $X_1 \cap X_2$ には自然に向きが定まる。さらにこの向きから $X_1 \cap X_2 \cap X_3 (= \partial(X_1 \cap X_2))$ にも向きが定まる。この向きに対し、(向きを保つ) 微分同相 $\phi : X_1 \cap X_2 \cap X_3 \to \Sigma_g$ を一つとることにより、両者を同一視する。$X_1 \cap X_2$、$X_2 \cap X_3$、$X_3 \cap X_1$ はいずれも $\Sigma_g (\cong X_1 \cap X_2 \cap X_3)$ を境界とする種数 g のハンドル体であるから、これらの中で、互いに交わらない g 個の円板の境界となる Σ_g の cut system をとることができる。このようにして得られる 3 つの cut system を α、β、γ とすると、$(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ は (g,k)–trisection 図式となる。逆に (g,k)–trisection 図式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ が与えられると、次のように (g,k)–trisection を持つ 4 次元多様体を構成することができる：まず $D^2 \times \Sigma_g$ に $3g$ 個の 2–ハンドルを、$\{\exp(0)\} \times \alpha_i$、$\{\exp(2\pi i/3)\} \times \beta_i$、$\{\exp(4\pi i/3)\} \times \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, g)$ に沿って、$\{*\} \times \Sigma_g$ に沿う framing で貼り、その後 3 つの 3–ハンドルを、境界が $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の 3 つの非交和となるように貼る。最後に $\natural^k(S^1 \times D^3)$ を貼って境界を閉じれば X^4 が得られる。以上の構成により trisection の同値類と trisection 図式の同値類は 1 対 1 に対応するということがわかる。

4 次元閉多様体 X の (g,k)–trisection 図式 $(\Sigma_g; \alpha, \beta, \gamma)$ から、X の位相不変量を計算することを考える。まず X の Euler 標数は $2 + g - 3k$ で与えられる ([6])。また上で与えた trisection 図式から自然に得られる X のハンドル分解より、X の基本群は

$$\pi_1(\Sigma_g) / \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \beta_1, \ldots, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_g \rangle$$

と同型になるということがわかる。Wall の非加法性定理より、X の符号数は対称行列

$$\begin{pmatrix} O & M_{\alpha\beta} & M_{\alpha\gamma} \\ {}^tM_{\alpha\beta} & O & M_{\beta\gamma} \\ {}^tM_{\alpha\gamma} & {}^tM_{\beta\gamma} & O \end{pmatrix}$$

の符号数と一致する、ただし $M_{\delta\varepsilon} = (\delta_i \cdot \varepsilon_j)_{1 \le i,j \le g}$ である ([6])[2]。X がスピン構造を許容するかどうか、は以下の命題を用いて判定できる。

[1]つまり α 内の曲線は α 内の曲線の上にのみ handleslide させる。β と γ についても同様。

[2][5] で交差形式を得る方法も考えられている。

命題 2.1. X がスピン構造を持つための必要十分条件は、$q: H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で以下の 2 条件を満たすものが存在することである：

1. q は交差形式に関する 2 次形式、つまり任意の $\delta, \varepsilon \in H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に対し $q(\delta+\varepsilon) = q(\delta) + q(\varepsilon) + \delta \cdot \varepsilon$ が成立、
2. 任意の $i \in \{1, \ldots, g\}$ に対し $q([\alpha_i]) = q([\beta_i]) = q([\gamma_i]) = 0$。

証明. Σ_g のスピン構造全体と $H_1(\Sigma_g;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 上の交差形式に関する 2 次形式全体は 1 対 1 に対応する ([14])。Σ_g のスピン構造 $\mathfrak{s}$ に対し、対応する 2 次形式 $q_{\mathfrak{s}}$ は次のように定義される：

$$q_{\mathfrak{s}}([c]) = \begin{cases} 0 & (\mathfrak{s}|_c \text{ が } c \text{ を境界とする円板上のスピン構造に拡張できるとき}) \\ 1 & (\text{そうでないとき})。\end{cases}$$

ただし $c \subset \Sigma_g$ は単純閉曲線である。

まず条件を満たす 2 次形式 q が存在すると仮定する。この q に対応する Σ_g のスピン構造を $D^2 \times \Sigma_g$ に自然に拡張する。X は $D^2 \times \Sigma_g$ に、2–ハンドル、3–ハンドル、4–ハンドルを貼ると得られる。ここで 2–ハンドルは $3g$ 個あり、これらは $\{\exp(0)\} \times \alpha_i$、$\{\exp(2\pi i/3)\} \times \beta_i$、$\{\exp(4\pi i/3)\} \times \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, g)$ に沿って、$\{*\} \times \Sigma_g$ に沿う framing で貼られる。よって q に関する仮定より q に対応する $D^2 \times \Sigma_g$ 上のスピン構造は 2–ハンドルを貼って得られる多様体上のスピン構造に拡張することができる。一般にスピン構造はいつでも 3–ハンドル、4–ハンドル上に拡張することができるから、これまでに得たスピン構造を全体に拡張することにより X のスピン構造が得られる。逆に X のスピン構造があれば、それを $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ の近傍に制限したものに対応する 2 次形式は条件を満たす。 □

Trisection の例をいくつか与えておく。まず S^1 の閉部分多様体 X_l^1 $(l \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ を

$$X_l^1 = \{\exp(i\theta) \in S^1 \mid \theta \in [2(l-1)\pi/3, 2l\pi/3]\}$$

で定義する。このとき $S^1 = X_1^1 \cup X_2^1 \cup X_3^1$、$X_l^1 \cong D^1$、$X_{l-1}^1 \cap X_l^1 \cong D^0 (= \{*\})$ であることに注意する。次に S^1 の懸垂 $S^1 \times [0,1]/\!\sim\, \cong S^2$ ($\sim$ は境界の各連結成分を 1 点に同一視する同値関係) をとり、その部分多様体 X_l^2 も X_l^1 の懸垂としてとる。このとき $X_l^2 \cong D^2$、$X_{l-1}^2 \cap X_l^2 \cong D^1$、$X_1^2 \cap X_2^2 \cap X_3^2 \cong S^0$ となる。同様にして懸垂を 2 回とることにより S^3 の分割 $S^3 = X_1^3 \cup X_2^3 \cup X_3^3$、$S^4$ の分割 $S^4 = X_1^4 \cup X_2^4 \cup X_3^4$ が得られる。構成より $S^4 = X_1^4 \cup X_2^4 \cup X_3^4$ は S^4 の $(0,0)$–trisection となる。実際 $X_l^4 \cong D^4 = \natural^0(S^1 \times D^3)$ (つまり $k = 0$)、$X_{l-1}^4 \cap X_l^4 = D^3$、$X_1^4 \cap X_2^4 \cap X_3^4 \cong S^2 = \Sigma_0$ (つまり $g = 0$) である。この trisection に対応する図式は $(S^2; \emptyset, \emptyset, \emptyset)$ である。また $Y_l = X_l^3 \times S^1$ とすると、$S^3 \times S^1 = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$ は $S^3 \times S^1$ の $(1,1)$–trisection である。実際 $Y_l \cong D^3 \times S^1$ (つまり $k = 1$)、$Y_{l-1} \cap Y_l = (X_{l-1}^3 \cap X_l^3) \times S^1 \cong D^2 \times S^1$ であり、$Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = (X_1^3 \cap X_2^3 \cap X_3^3) \times S^1 \cong S^1 \times S^1 = \Sigma_1$ (つまり $g = 1$) である。さらにこの自然な同一視のもと、$S^1 \times S^1$ 内の単純閉曲線 $S^1 \times \{*\}$ は、$Y_{l-1} \cap Y_l$ $(l = 1, 2, 3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ 内の円板の境界となるので、ここで得られた $S^3 \times S^1$ の trisection に対応する図式は、$S^1 \times S^1$ 内

の平行な3つの単純閉曲線からなる。以上2つの例に対しては、trisectionの定義にあるϕ_iとして自然な微分同相をとればよい。一方で以下で与える$\mathbb{CP}^2$のtrisectionに対しては、ϕ_iを取る際に少し工夫を要する。

$\mathbb{CP}^2$の部分多様体Z_l ($l \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$)を次のようにとる：

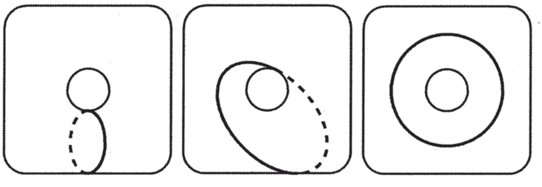
$$Z_l = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid |z_{l\pm 1}| \leq |z_l|\}.$$

このとき分割$\mathbb{CP}^2 = Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2$は$\mathbb{CP}^2$の$(1,0)$–trisectionである。以下でそれを確かめる。$l \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$に対して$U_l = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid z_l \neq 0\}$とし、微分同相$\varphi_l : U_l \to \mathbb{C}^2$を

$$\varphi_l([z_0 : z_1 : z_2]) = \left(\frac{z_{l+1}}{z_l}, \frac{z_{l-1}}{z_l}\right)$$

で定義する。このとき$\varphi_l(Z_l) = D^2 \times D^2 \cong D^4$ (つまり$k=0$)、$\varphi_0(Z_0 \cap Z_1 \cap Z_2) = S^1 \times S^1$ (つまり$g=1$)である。以下φ_0により$Z_0 \cap Z_1 \cap Z_2$と$S^1 \times S^1$を同一視する。

$S^3 = \partial(D^2 \times D^2)$の種数1のHeegaard分解として、$Y_{0,1}^- \cup Y_{0,1}^+$、$Y_{0,1}^- = D^2 \times S^1$、$Y_{0,1}^+ = S^1 \times D^2$を考える。$\varphi_l(Z_l \cap Z_{l+1}) = S^1 \times D^2 = Y_{0,1}^+$、$\varphi_l(Z_l \cap Z_{l-1}) = D^2 \times S^1 = Y_{0,1}^-$であるから、$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$がtrisectionの定義にある条件を満たす。また単純閉曲線$\{*\} \times S^1$、$S^1 \times \{*\} \subset Z_0 \cap Z_1 \cap Z_2$はそれぞれ$Z_0 \cap Z_1$、$Z_2 \cap Z_0$内の円板の境界となる。よってこれらがそれぞれ$\alpha_1$、$\gamma_1$となる。$\varphi_1(Z_1 \cap Z_2) = S^1 \times D^2$であるから、円周$\varphi_1^{-1}(\{1\} \times S^1)$は$Z_1 \cap Z_2$内の円板の境界となる。この円周の$\varphi_0$による像は$\{(w, w) \in S^1 \times S^1 \mid w \in S^1\}$であり、これが$\beta_1$となる。曲面の向きに注意しながらこの図式を描くと図1のようになる。



(1) α_1　(2) β_1　(3) γ_1

図 1: $\mathbb{CP}^2$のtrisection図式。

2.B. 4次元多様体から2次元多様体への写像　Xを4次元多様体、Σを2次元多様体、$f : X \to \Sigma$を可微分写像とし、fの臨界点集合を$\mathrm{Crit}(f) \subset X$と表し、$p \in \mathrm{Crit}(f)$とする。$p$、$f(p)$のまわりの実局所座標$(U, \varphi)$、$(V, \psi)$で、$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(t, x, y, z) = (t, x^2 + y^2 \pm z^2)$となるものが存在するとき、$f$を**折り目特異点**という。局所座標表示に現れる符号が$+$であるとき、その折り目特異点は**定値**であるといい、そうでないとき**不定値**であるという。本稿では図2(1)、2(2)にあるように、不定値折り目特異点の像を実線で表すのに対し、定値折り目特異点の像は破線で表すものとする。折り目特異点は局所的には3次元多様体上のMorse特異点の自明な1助変数族とみなすことができる。特に折り目特異点の像に横断的な道の逆像にはMorse関数が自然に定義され、道に向きを与えると対応す

る Morse 関数の臨界点の指数が定まる。本稿ではこの指数が 2 (不定値の場合) あるいは 3 (定値の場合) になるように、折り目特異点の像に co-orientation を与える (図 2(1)、2(2) 参照)。不定値折り目特異点の像に横断的な道が与えられると、対応する Morse 関数により誘導されるハンドル分解の接着円周がイソトピーの差を除いて一つ定まる (図 2(1) の一般ファイバー内の単純閉曲線)。この円周を不定値折り目特異点の**消滅サイクル**という。

p、$f(p)$ のまわりの実局所座標 (U,φ)、(V,ψ) で、$\varphi(p)=0$、$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(t,x,y,z)=(t,x^3+tx+y^2-z^2)$ となるものが存在するとき、f を (不定値) **カスプ特異点**[3] という。図 2(3) にあるように、カスプ特異点の両側には不定値折り目特異点が現れ、対応する 2 つの消滅サイクルの幾何的交点数は 1 になる。

p、$f(p)$ のまわりの向きに適合する局所座標 (U,φ)、(V,ψ) で、$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}(z,w)=z^2+w^2$ となるものが存在するとき、f を**レフシェッツ特異点**という。不定値折り目特異点の場合と同様に、レフシェッツ特異点を含む特異ファイバーも一般ファイバー内の単純閉曲線が 1 点につぶれるように退化する。この単純閉曲線 (図 2(4)) をレフシェッツ特異点の**消滅サイクル**という。本稿では図 2(4) のように、レフシェッツ特異点の像は×の印で表すものとする。

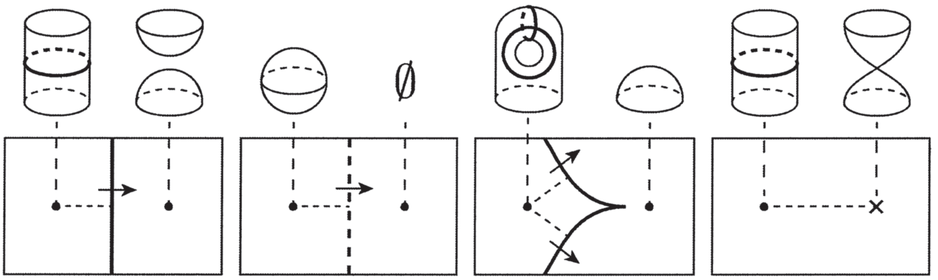


図 2: 本稿で扱う特異点の周りのファイバーの様子。

折り目特異点とカスプ特異点は (写像芽として) 安定であるが、レフシェッツ特異点はそうではない[4]。また $\partial X=\emptyset$ のとき、$f:X\to\Sigma$ が安定であることの必要十分条件は、1. $\mathrm{Crit}(f)$ が折り目とカスプからなり、2. f のカスプへの制限は単射であり、3. f の折り目への制限は、2 重点が全て横断的で、その像にカスプの像を含まないはめ込みとなることである ([12] の結果を使えば示せる。多様体間の写像は全て固有と仮定していることに注意)。

定義 2.2. X,Σ,f を上と同様とする。

1. $f:X\to\Sigma$ が以下の条件を満たすとき f を**特異レフシェッツ束**であるという。
   - $\mathrm{Crit}(f)$ は不定値折り目とレフシェッツ特異点のみからなる。

---
[3] 折り目と同様定値カスプ特異点も定義することができるが、本稿では扱わない。
[4] 実際レフシェッツ特異点の $\mathcal{A}_e$–余次元は ∞ である。

- f のレフシェッツ特異点全体への制限は単射。
- f の不定値折り目への制限は、2重点が全て横断的で、その像にレフシェッツ特異点の像を含まないはめ込み。

さらに特異レフシェッツ束 $f : X \to S^2$ が以下を満たすとき**単純**であるという。

- f のファイバーは全て連結。
- f の不定値折り目全体の集合 Z は連結で、$f|_Z$ は埋め込み。この条件より $S^2 \setminus f(Z)$ は2つの開円板からなることに注意する。
- f のレフシェッツ特異点の像は、$S^2 \setminus f(Z)$ の2つの連結成分のうち、一般ファイバーの種数が大きい方に含まれる。

2. 安定写像 $f : X \to \mathbb{R}^2$ の臨界値集合が図3のようになるとき、f を $\boldsymbol{(g,k)}$**–trisection 写像**という。ただし図3の白い箱の中にはカスプの像は含まれず、また折り目の像は p_0 を中心とした円周に直交する接ベクトルは持たない。さらに隣り合う白い箱の間には k 個の折り目の像による道と、$g-k$ 個のカスプを唯一つ含む道があり、その間に折り目の像の二重点は存在しない。図3の白い箱の中に折り目の像の二重点が現れないとき、f は**単純**であるという。

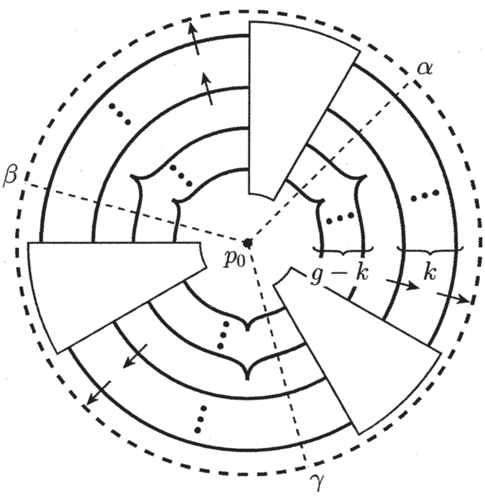


図3　trisection 写像の臨界値集合。

$f : X \to \mathbb{R}^2$ を trisection 写像とし、道 α、β、γ を図3のようにとる。これらの道により f の像は3つの閉領域 D_1, D_2, D_3 に分割されるが、$X_i = f^{-1}(D_i)$ とすると、$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ は X の (g,k)–trisection となる。また3つの道の共通の始点 p_0 上のファイバーは Σ_g と同一視することができるが、この同一視のもと、α, β, γ から定まる g 個の消滅サイクルの組 $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_g), \overline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_g), \overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$ を Σ_g 内の単純閉曲線とみなせば、$(\Sigma_g, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma})$ は分解 $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ に対応する (g,k)–trisection 図式となる。

3. 単純な trisection 写像の例とその図式

この節では [4] にある構成法により得られる単純な trisection 写像の図式について論じる。単純な trisection 写像から対応する図式を得るためには、その消滅サイクルを決定する必要があるが、その際に単純な trisection 写像のモノドロミーを調べる必要がある。まず次節で、モノドロミーを決定するために必要な、曲面の写像類群の諸性質をまとめておく。

3.A. 曲面の写像類群と不定値折り目の像に沿うモノドロミー Σ を曲面、$V_1,\ldots,V_k\subset\Sigma$ をその離散部分集合、$c_1,\ldots,c_l$ を Σ 内の単純閉曲線とする。$\Phi(V_i)=V_i$ を満たす微分同相 $\Phi:\Sigma\to\Sigma$ 全体からなる群を $\mathrm{Diff}^+(\Sigma;V_1,\ldots,V_k)$ と表し、

$$\begin{aligned}&\mathrm{Mod}(\Sigma;V_1,\ldots,V_k)(c_1,\ldots,c_l)\\&=\left\{[\varphi]\in\pi_0\left(\mathrm{Diff}^+(\Sigma;V_1,\ldots,V_k)\right)\middle|\,\varphi(c_i)=c_i\ (i=1,\ldots,l)\right\}\end{aligned}$$

とする。$\mathrm{Mod}(\Sigma;V_1,\ldots,V_k)(c_1,\ldots,c_l)$ には代表元の合成を考えることにより群構造を与える。Σ に c_i に沿った手術を施して得られる曲面を Σ_{c_i} とする (つまり Σ_{c_i} は $\Sigma\setminus\nu(c_i)$ に閉円板を 2 枚貼ることにより得られる、ここで $\nu(c_i)$ は c_i の管状近傍)。手術において貼られる円板の中心を $v_0,v_0'\in\Sigma_{c_i}$ とする。このとき手術準同型

$$\begin{aligned}\Phi_{c_i}^*:&\mathrm{Mod}(\Sigma;V_1,\ldots,V_k)(c_1,\ldots,c_l)\to\\&\mathrm{Mod}(\Sigma_{c_i};\{v_0,v_0'\},V_1,\ldots,V_k)(c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_l)\end{aligned}$$

を以下のように定義する : $\xi\in\mathrm{Mod}(\Sigma;V_1,\ldots,V_k)(c_1,\ldots,c_l)$ に対しその代表元 $\varphi\in\xi$ で $\nu(c_i)$ を保つものをとる。この φ に対し $\tilde{\varphi}:\Sigma_{c_i}\to\Sigma_{c_i}$ を、$\varphi|_{\Sigma\setminus\nu(c_i)}$ を $\{v_0,v_0'\}$ を保つように拡張して得られる微分同相とする。このとき $\Phi_{c_i}^*([\varphi])=[\tilde{\varphi}]$ と定める。$\Phi_{c_i}^*$ は矛盾なく定義されている準同型で、その核は t_{c_i} により生成される ([2, Lemma 3.1][5] 参照).

$$F_{v_0,v_0'}:\mathrm{Mod}(\Sigma_{c_i};\{v_0,v_0'\},V_1,\ldots,V_k)(c_1,\ldots,c_l)\to\mathrm{Mod}(\Sigma_{c_i};V_1,\ldots,V_k)(c_1,\ldots,c_l)$$

を忘却準同型とし、$\Phi_{c_i}=F_{v_0,v_0'}\circ\Phi_{c_i}^*$ とする。この準同型も手術準同型と呼ぶ。

$f:X\to\Sigma$ を 4 次元多様体 X から曲面 Σ への可微分写像、$\mathcal{S}\subset\mathrm{Crit}(f)$ を不定値折り目からなる円周とする。$f|_{\mathcal{S}}$ は埋め込みで、$\nu(f(\mathcal{S}))$ を $f(\mathcal{S})$ の管状近傍としたとき、$f^{-1}(\nu(f(\mathcal{S})))$ には $\mathcal{S}$ 以外の臨界点がないとする。$\nu(f(\mathcal{S}))\setminus f(\mathcal{S})$ は 2 つの連結成分を持つが、そのそれぞれから p_0,q_0 をとる。α、β を p_0、q_0 を基点に持ち、$H_1(\nu(f(\mathcal{S}));\mathbb{Z})$ の同じ元を代表する $\nu(f(\mathcal{S}))\setminus f(\mathcal{S})$ 内のループとする。p_0 から q_0 への、二重点を持たない道 $\gamma\subset\nu(f(\mathcal{S}))$ を、$f(\mathcal{S})$ と 1 点で横断的に交わるようにとる。$f(\mathcal{S})$ と γ の交点において、$f(\mathcal{S})$ の co-orientation と γ の向きは一致しているとする。このとき γ に対応する $\mathcal{S}$ の消滅サイクル $c\subset\Sigma=f^{-1}(p_0)$ と、同一視 $f^{-1}(q_0)\cong\Sigma_c$ が定まる。以上のもと、α に沿うモノドロミー $\mu\in\mathrm{Mod}(\Sigma)$ は $\mathrm{Mod}(\Sigma)(c)$ に含まれ、β に沿うモノドロミーは $\Phi_c(\mu)$ となる ([1, 2] 参照)。

---

[5] [2] では $k=0$、$l=1$ の場合しか言及されていないが、一般の場合についても同様に証明できる

3.B. 単純な trisection 写像とその図式 まず [4] で与えられている、単純特異レフシェッツ束 $f: X \to S^2$ から X 上の単純な trisection を得る方法[6] を概観しておく (詳しくは [4] を参照)。$f: X \to S^2$ の種数は g で、k 個のレフシェッツ特異点を持つとする。S^2 内の互いに交わらない 2 つの円板 D_1 と D_2 を、D_1 が f の臨界値を全て含むようにとり、$A = \overline{S^2 \setminus (D_1 \cup D_2)}$ とする。A はアニュラスであるから $S^1 \times [-1,1]$ と同一視できる。さらに A、D_2 は f の臨界値を含まず、A の境界の片側は D_2 の境界となっていることから、$f^{-1}(A)$ と $S^1 \times [-1,1] \times \Sigma_{g-1}$ との間の微分同相 Φ で、$f \circ \Phi$ が $S^1 \times [-1,1]$ への射影となるものがとれる。以下、この微分同相により $f^{-1}(A)$ と $S^1 \times [-1,1] \times \Sigma_{g-1}$ とを同一視する。$h: \Sigma_{g-1} \to \mathbb{R}$ を Σ_{g-1} 上の Morse 関数で、指数 0 と 2 の臨界点を一つずつ、指数 1 の臨界点を $2g-2$ 個持ち、最大値と最小値がそれぞれ 2 と 1 であるものとする。$\varphi: [-1,1] \times \Sigma_{g-1} \to [1,3]$ を $\varphi(t,x) = 1 + (1-t^2)h(x)$ で定義する[7]。この φ を用いて $f_1: X \to \mathbb{R}^2$ を次のように定義する：f_1 は $f^{-1}(D_i)$ $(i = 1,2)$ 上 $f|_{f^{-1}(D_i)}$ と D_i から単位円板 $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ への微分同相との合成で、$f^{-1}(A)$ 上 $\mathrm{id}_{S^1} \times \varphi$ と $S^1 \times [1,3]$ から $\mathbb{R}^2$ 内の (単位円板の外側の) アニュラスへの微分同相との合成とする。

f_1 の臨界値集合は図 4(1) のようになる (外向きの co-orientation をもつ、不定値折り目の像からなる円周が $2g-1$ 個ある)。まず図 4(1) の最も内側にある不定値折り目の円周と、そのすぐ外側の円周を交換するために R2–変形を 2 回施す。その結果臨界値集合は図 4(2) のようになる。レフシェッツ特異点の像が最も内側にある不定値折り目の像の外側にくるように (つまり臨界値集合が図 4(3) のようになるように) ホモトピーで変形した後、flip (燕の尾の普遍開折) を 2 回、R2–変形、unsink を施せば臨界値集合は図 4(5) のようになる。最後にレフシェッツ特異点の像を、最も内側にある不定値折り目の像の内側に移すホモトピーと、wrinkle を繰り返し施すことにより、単純な $(2g+k+1, 2g-1)$–trisection 写像が得られる。

以上の構成の過程で現れる、図 4(2),...,4(6) の臨界値集合を持つ写像をそれぞれ $f_2, \dots, f_6$ と表す。この構成で trisection 写像は得られたので、その図式を得ることを考える。そのためにはまず f_1 の消滅サイクルを決定する必要がある。

補題 3.1 ([10, Lemma 4.1] とその後の考察参照)**.** 図 4(1) の 2 番目に内側にあるアニュラス内の正則値 (図 4(1) 内の点) 上の一般ファイバーからみた、外側の不定値折り目特異点の消滅サイクルは、図 5 内の $2g-2$ 個の非分離的単純閉曲線である。また内側の折り目特異点の消滅サイクルは図 5 内の分離的単純閉曲線である。

以下、図 5 内の分離的単純閉曲線を c で表す。図 4(2) の、不定値折り目の像の間のアニュラスのうち、最も内側にあるものに含まれる正則値上の一般ファイバーは、図 5 に描かれている f_1 の一般ファイバーの左側にある、2 つの円板で手術を施すと得ることができる。このようにして得られる f_2 の一般ファイバーを Σ と表す。図 4(2) 内の 2 番目に内側にある折り目特異点の消滅サイクルは、図 5 内の手術を施す円板の境界と平行である。以下、この消滅サイクルを d で表す。

---

[6] [4] ではより一般の特異レフシェッツ束から (単純とは限らない)trisection 写像を得る方法が与えられている。

[7] ここで与えている φ は [4] で与えているものと少し異なるが、その後の議論に影響はない。

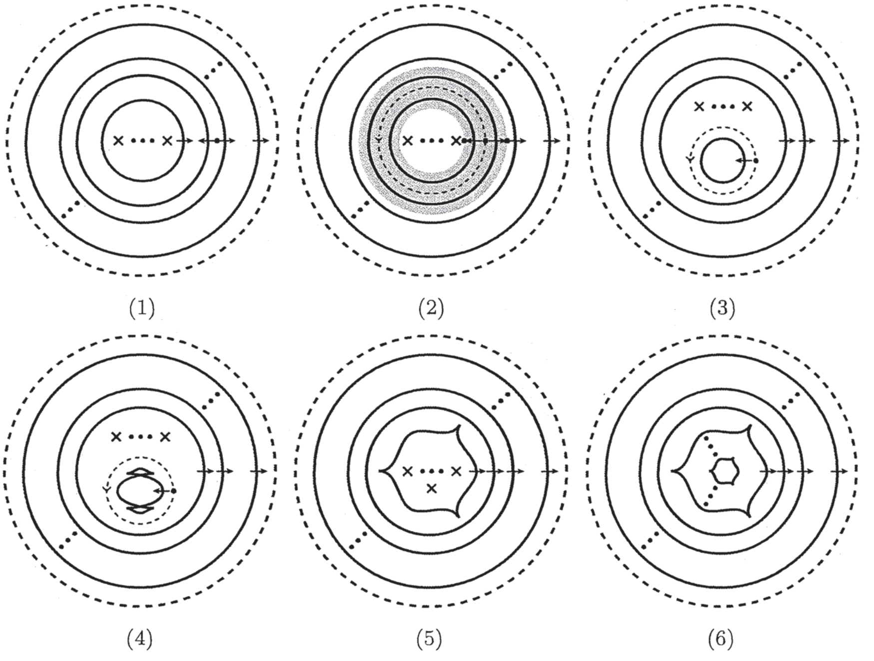


図 4: 単純特異レフシェッツ束からのホモトピーの過程で現れる写像の臨界値集合。

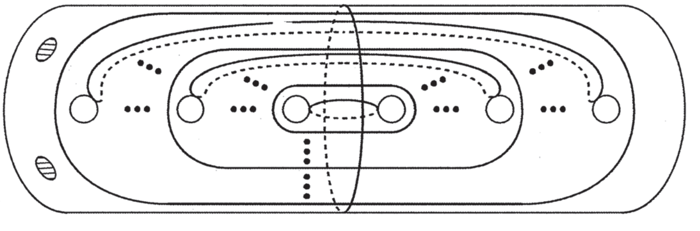


図 5: f_1 の消滅サイクル。

$f_2, \ldots, f_6$ の消滅サイクルは、図 4(2) の破線で表されたループに沿うモノドロミーに依存する。元々の単純特異レフシェッツ束の種数 g が 3 以上のとき、このモノドロミーを $\varphi_2 \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ で表し、種数が 2 以下のとき、図 4(2) の灰色のアニュラス上定義された f_2 の切断で、最も内側の (レフシェッツ特異点の像を含む) 領域上の一般ファイバーとは種数が大きい方の成分と交わるものを一つとり、この切断により持ち上げられたモノドロミーを考え、それを $\tilde{\varphi}_2 \in \mathrm{Mod}(\Sigma; x)$ と表す。$c_1, \ldots, c_k$ を (適当な Hurwitz path system に関する) f_2 のレフシェッツ特異点の消滅サイクルとする。これらの消滅サイクルは種数 g が 3 以上のとき Σ_c の単純閉曲線とみなすことができ、種数が 2 以下のときは $\Sigma_c \setminus \{x\}$ 内の単純閉曲線とみなせることに注意する。

命題 3.2 ([10, Propositions 4.2, 4.3]). 種数 g が 2 より大きいとき、 $\varphi \in \mathrm{Ker}(\Phi_d)$ が $\Phi_c(\varphi) = t_{c_k} \circ \cdots \circ t_{c_1} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_c)$ を満たせば、f_1 から f_2 を与える R2–変形で、結果として

現れるモノドロミー φ_2 が φ と一致するようなものが存在する。また種数 g が 2 以下のとき、 $\tilde{\varphi} \in \mathrm{Ker}(\Phi_d : \mathrm{Mod}(\Sigma, x)(d) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_d, x))$ が $\Phi_c(\tilde{\varphi}) = t_{c_k} \circ \cdots \circ t_{c_1} \in \mathrm{Mod}(\Sigma_c, x)$ を満たせば同様のことが言える。

[9, Figure 6] に示されている通り、図 6(1) 内の上側の (カスプ 2 つと折り目の交点を頂点として持つ) 三角形の内部にある正則値上の一般ファイバーは、Σ 内の円板の対に沿った手術により得られる。この曲面を $\tilde{\Sigma}$ で表す。図 6 内の黒い破線に沿うモノドロミーを

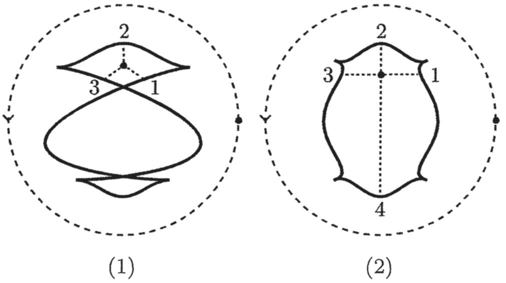


図 6: f_4 に R2–変形を施す前後の臨界値集合。

$\varphi_4 \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ と表す。$e_i \subset \tilde{\Sigma}$ を図 6(2) 内の i でラベル付けされた道から定まる消滅サイクルとする $(i = 1, 2, 3, 4)$。e_1, e_2, e_3 は容易に決定できるが ([9, Figure 6] を参照せよ)、以下に述べる通り、e_4 は φ_4 に依存する：

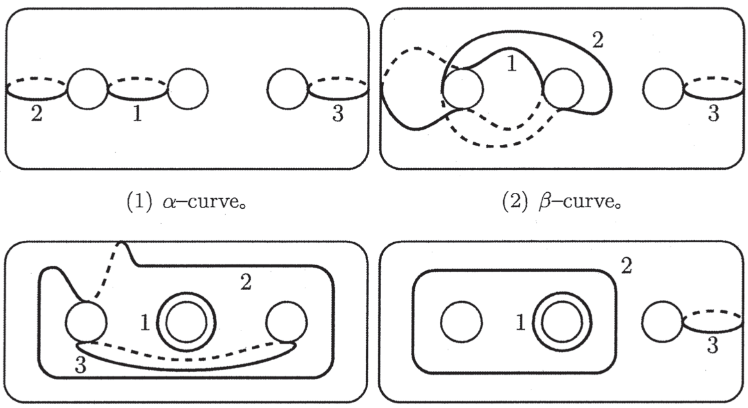
命題 3.3 ([9, Theorem 4.1] 参照)**.** 種数 g が 2 より大きいと仮定する。$\psi \in \mathrm{Ker}(\Phi_{e_3}) \cap \mathrm{Mod}(\tilde{\Sigma})(e_1)$ が $\Phi_{e_1}(\psi) = \varphi_4$ を満たせば、f_4 に施す R2–変形で、結果として得られる消滅サイクル e_4 が $\psi(e_2)$ となるものが存在する。

命題 3.2 と同様、種数 g が小さいときは、e_4 を得るためにモノドロミーを持ち上げる必要がある。補集合 $\tilde{\Sigma} \setminus (e_1 \cup e_3)$ は 2 つの連結成分を持つ。それらのうち、種数の大きい方を Σ_h、小さい方を Σ_l とする。$g = 2$ のとき、図 6 内の破線の内側上の切断で、Σ_l と交わるものを一つとり、$g = 1$ のときは同様の切断を 4 つ、3 つは Σ_l と交わり 1 つは Σ_h と交わるようにとる。これらの切断を用いて持ち上げられたモノドロミー $\tilde{\varphi}_4$ を考える。$g = 2$ のとき $\tilde{\varphi}_4 \in \mathrm{Mod}(\tilde{\Sigma}; x)(e_1, e_3)$ であり、$g = 1$ のとき $\tilde{\varphi}_4 \in \mathrm{Mod}(\tilde{\Sigma}; x_1, x_2, x_3, x_4)(e_1, e_3)$ である。

命題 3.4 ([9, Section 5] 参照)**.** $g = 2$ のとき、$\Phi_{e_1}(\tilde{\psi}) = \tilde{\varphi}_4$ を満たす $\tilde{\psi} \in \mathrm{Ker}(\Phi_{e_3}) \cap \mathrm{Mod}(\tilde{\Sigma}; x)(e_1)$ に対し、f_4 に施す R2–変形で、結果として得られる消滅サイクル e_4 が $\tilde{\psi}(e_2)$ となるものが存在する。また $g = 1$ のとき $\Phi_{e_1}(\tilde{\psi}) = \tilde{\varphi}_4$ を満たす $\tilde{\psi} \in \mathrm{Ker}(\Phi_{e_3}) \cap \mathrm{Mod}(\tilde{\Sigma}; x_1, x_2, x_3, x_4)(e_1)$ に対し同様のことが成立する。

$c_1, \ldots, c_k$ は自然に $\tilde{\Sigma}$ 内の単純閉曲線とみなすことができ、これらは f_5 のレフシェッツ特異点の消滅サイクルでもある。後は unsink と wrinkle による消滅サイクルの変化 (例えば [13] 参照) さえ追えば、f_6 の消滅サイクルが得られ、結果として単純な trisection 写像に対応する図式も得ることができる。

例 3.5. [3, 8] において、レフシェッツ特異点を持たない種数 1 の単純特異レフシェッツ束が分類されている。そのような特異レフシェッツ束の全空間は、$S^4, (S^2 \times S^2)\sharp(S^1 \times S^3), (S^2 \tilde{\times} S^2)\sharp(S^1 \times S^3), L_n, L'_n\ (n \geq 2)$ のいずれかと微分同相である。[10] において、前述の結果を用いて、これらの単純特異レフシェッツ束から得られる単純な $(3,1)$–trisection 写像に対応する図式が与えられている。この図式に含まれる単純閉曲線 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \ldots, \gamma_3$ のうち、γ_2, γ_3 以外は全空間によらず同じものとなるが、γ_2 と γ_3 は全空間に依存して変化する。例として $S^4, (S^2 \times S^2)\sharp(S^1 \times S^3)$ の図式は図 7 の通りとなる。



(1) α–curve。 (2) β–curve。

(3) S^4 の γ–curve。 (4) $(S^2 \times S^2)\sharp(S^1 \times S^3)$ の γ–curve。

図 7: 種数 1 の単純特異レフシェッツ束から得られる単純な trisection 写像の図式。α–curve と β–curve は全空間によらない。

参考文献

[1] R. İ. Baykur, *Topology of broken Lefschetz fibrations and near-symplectic four-manifolds,* Pacific J. Math. 240 (2009), no. 2, 201–230.

[2] R. İ. Baykur and K. Hayano, *Broken Lefschetz fibrations and mapping class groups*, Geom. Topol. Monogr. **19** (2015), 269–290.

[3] R. İ. Baykur and S. Kamada, *Classification of broken Lefschetz fibrations with small fiber genera*, J. Math. Soc. Japan, **67**(2015), no. 3, 877–901.

[4] R. İ. Baykur and O. Saeki, *Simplifying indefinite fibrations on 4–manifolds*, preprint, available at arXiv:1705.11169.

[5] P. Feller, M. Klug, T. Schirmer, and D. Zemke, *Calculating the homology and intersection form of a 4-manifold from a trisection diagram*, preprint, available at arXiv:1711.04762.

[6] D. Gay and R. Kirby, *Trisecting* 4*–manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), 3097–3132.

[7] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973, x+209.

[8] K. Hayano, *On genus*-1 *simplified broken Lefschetz fibrations*, Algebr. Geom. Topol. **11**(2011), 1267–1322.

[9] K. Hayano, *Modification rule of monodromies in an* R_2*-move*, Algebr. Geom. Topol. **14**(2014), 2181–2222.

[10] K. Hayano, *On diagrams of simplified trisections and mapping class groups*, preprint, available at arXiv:1711.02790.

[11] K. Johannson, *Topology and combinatorics of* 3*–manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1599, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[12] J. N. Mather, *Stability of* C^∞ *mappings. V. Transversality*, Advances in Math. **4**(1970), 301–336. 57.20

[13] Y. Lekili, *Wrinkled fibrations on near-symplectic manifolds*, Appendix B by R. İ. Baykur, Geom. Topol. **13**(2009), no. 1, 277–318.

[14] A. I. Stipsicz, *Spin structures on Lefschetz fibrations*, Bull. London Math. Soc. **33**(2001), no. 4, 466–472.