Local Euler obstructions の計算法について

By

田島 慎一*(Shinichi Tajima)

§1. 序

Local Euler obstruction は, 1970 年代に M. Kashiwara と R. D. MacPherson が独立に, 特異点を持つ variety の不変量として導入した概念である. 1973 年の M. Kashiwara の論文 [17] は, ホロノミー D-加群に対する指数定理を扱ったものであり, 1974 年の R. D. MacPherson の論文 [21] は, 特異点を持つ代数多様体に対し Chern class の理論を構成したものである. このように Local Euler obstruction は, 前者は線形偏微分方程式論, 後者は代数幾何学という数学的には一見全く異なる分野の問題を解決する際に重要な鍵となる概念として導入された. 概念の構成の仕方も全くことなっており, 両者の間に何らかの関係があると予想した者は, 当時一人もいなかったのではないかと思われる. ところがその後, 1981 年の J. K. Brylinski, A. S. Dubson と M. Kashiwara の論文 [5] において, M. Kashiwara が導入した概念と R. D. MacPherson が導入した概念が, 数学的には同一のものであることが示された.

この local Euler obstruction は, 特異点論の重要な不変量であり, 様々な応用や一般化がなされ, 現在も多くの研究者により盛んに研究されている. しかし, local Euler obstruction の値を求めることは, 実際には非常に困難である. 特異点論の専門家の間では, 一般には, local Euler obstruction の値を求めるアルゴリズムを構成することは不可能であろうとみなされているように思える.

本稿では, parametric Gröbner system と parametric local cohomology system を組み合わせて用いることで特異点を持つ超曲面の local Euler obstruction の値を exact に求めるアルゴリズムを構成することができることを紹介する. 計算アルゴリズムそれ自体は, 既に論文 [25], [37] に与えてあるので, 本稿では, これらのアルゴリズムを導出した際の基本的な考え方を紹介することを目的としたい.

2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 32S05; Secondary 14B05.
Key Words: polar multiplicity formula, parametric local cohomology system
Supported by 科研費基盤研究 (C)15K04891
*筑波大学数理物質系数学域

§ 2. 孤立特異点を持つ超曲面の local Euler obstruction

この節では, 孤立特異点を持つ超曲面に対し, その local Euler obstruction を求める計算法を紹介する. アルゴリズム導出の基礎となるのは, M. Kashiwara [17] と B. Teissier [38] の結果である. アルゴリズム構成の鍵となるのは, parametric local cohomology system を用いた計算手法である.

X は, $\mathbf{C}^n$ の原点 O の開近傍, $f(x)$ は X 上の正則関数とする. 正則関数 $f(x)$ が定める超曲面 $S = \{x \in X \mid f(x) = 0\} \subset X$ は, 原点 O を孤立特異点として持つとする. ここで, M. Kashiwara [17, 18, 19] による次の結果を思い出そう.

いま, H は, 原点 O を通る *generic* な超平面とする. このとき, 超曲面 S の特異点 O における local Euler obstruction $Eu_O(S)$ は

$$Eu_O(S) = 1 + (-1)^n \mu_O^{(n-1)}(f|_H)$$

で与えられる. ただし, ここで $\mu_O^{(n-1)}(f|_H)$ は, f を超平面 H に制限して得られる $H \cap X$ 上の正則函数 $f|_H$ の原点 $O \in H \cap X$ における Milnor 数を表す. (この公式につては, A. S. Dubson の論文 [6], [7] も参照されたい)

この結果により, どのような超平面 H が *generic* なる条件をみたすかあらかじめ分かるのであれば, *generic* な超平面 H をひとつ選び $f|_H$ の原点における Milnor 数を計算することで, local Euler obstruction の値を求めることが出来ることになる. この方法で問題となるのは, *generic* な超平面を どのよう選べばよいのかという点にある.

さて, 超平面 H が原点 O において超曲面 S に対し *generic* となる必要十分条件は, H. Whitney [39] の意味で, H が S の O における limiting tangent space のなす集合に属さないことである (特異点を持つ variety に関する transversality に相当する). したがって数学的には, 超曲面 S の Nash blow-up を求め, 特異点集合である原点 O での fiber を取ればそれが limiting tangent space のなす集合となることが分かる. 1991 年に D. O'Shea [30] が与えた計算アルゴリズムを用いることで, limiting tangent spaces を求めることが理論上は可能である. しかし, 実際には, 数式処理システムを用いても Nash blow-up の計算コストが高いため, D. O'Shea の提案した計算法では, 与えられた超曲面の孤立特異点における limiting tangent spaces を求めることは困難な場合が多い.

ここで, 次に, B. Teissier の結果を思い出そう. いま, 原点を通る超平面 H と射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ の点とを同一視して

$$\mu_O^{(n-1)}(S) = \min_{H \in \mathbb{P}^{n-1}} \mu_O^{(n-1)}(f|_H)$$

と定義する. さらに,

$$U = \{H \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \mu_O^{(n-1)}(S) = \mu_O^{(n-1)}(f|_H)\}$$

とおく. このとき B. Teissier は論文 [38]) において次が成り立つことを示した.

(i) U は $\mathbb{P}^{n-1}$ において Zariski open, dense である

(ii) $\mathbb{P}^{n-1} - U$ は limiting tangent spaces である.

従って, f を超平面 H の族に制限して得られる正則函数を, パラメータ付きの函数と見做しそれらの Milnor 数を求めることで, 超曲面 S の limiting tangent spaces を求めることが出来る. また, これら hyperplane sections の Milnor 数の最小値を求めれることで, local Euler obstruction を得ることが出来ることになる. 実際に上述の計算を実行するためには, 収束冪級数環におけるパラメータ付きのイデアルの colength を求めることが必要になる.

一般に, 収束冪級数環において与えられたイデアルの colength を求める際は, まず最初に古典的な T. Mora のアルゴリズムを用いてイデアルのスタンダード基底を構成し, 次に得られたスタンダード基底を用いて colength を求めるのが定石である. 本稿で扱っている問題では, イデアルがパラメータに依存するため, スタンダード基底の構造も必然的にパラメータに依存することになる. したがって仮に T. Mora の算法によりパラメータ付きのイデアルのスタンダード基底を構成することにすると, スタンダード基底を構成する過程でパラメータ空間の分割を行いながら S-多項式の計算を遂行していくことになる. 我々の知る限り, 現在まで収束冪級数環におけるパラメータ付きのイデアルに対し, 古典的な T. Moran の算法に基づいて パラメータ付きのスタンダード基底を構成するというアルゴリズムが実装されたという記録は無い.

さて, 論文 [35], [36] において示したように, Grothendieck local duality に基づくと, ヤコビイデアルに付随した local cohomology の計算を行うことで Milnor 数を求めることが出来る. この計算法は古典的な T. Mora の算法と異なり, イデアルがパラメータを含むような場合に拡張することが比較的容易である. 実際, 論文 [26] で, parametric local cohomology system の概念を導入し, パラメータ付きのイデアルに付随した local cohomology を扱う新たな枠組みとこれらの計算アルゴリズムを与えた. この計算法を $f|H$ が定めるパラメータ付きのヤコビイデアルに適用することで, hyperplane section の族の Milnor 数を計算することが出来る.

例を一つ紹介する.

例 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^5 + x_3^6 + x_1x_2x_3$ とする. パラメータ $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2$ を用いて $h_t(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, t_1x_1 + t_2x_2)$ とおく. 計算すると,

$$t_1 = t_2 = 0 \text{ のとき, } \mu_O^{(2)}(h_t) = 12, \qquad t_1 = 0, t_2 \neq 0 \text{ のとき, } \mu_O^{(2)}(h_t) = 5,$$
$$t_1 \neq 0, t_2 = 0 \text{ のとき, } \mu_O^{(2)}(h_t) = 6, \qquad t_1 \neq 0, t_2 \neq 0 \text{ のとき, } \mu_O^{(2)}(h_t) = 4,$$

を得る. これより $\mu^{(2)}(S) = 4$ がわかり, $Eu_O(S) = 1 - \mu^{(2)}(S) = 1 - 4 = -3$ を得る.

一般に, $\mathbb{P}^{n-1}$ の部分集合 U は, 射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ において open dense であるので, local Euler obstruction を求めるためには, すべての $f|_H$ に対してその Milnor 数を求め, lomiting tangent spaces を決定する必要は無い. 射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ の一つの cell $\mathbb{C}^{n-1}$ の open dense な segment 上でのみ, 局所コホモロジー計算を行って, 得られた空間のベクトル空間としての次元を求めれば Local Euler obstruction を求めるには十分である. 論文

[25] では, この点を考慮して, 計算の効率化を図ったアルゴリズムを与えた.

本稿の主題は limiting tangent spaces ではなく local Euler obstruction であるが, limiting tangent spaces はそれ自体, 特異点論の重要な不変量である. 論文 [28] では, parametric local cohomology system の応用として, limiting tangent spaces を求める計算アルゴリズムを与えた. この計算法は D. O'Shea の計算法より計算効率が良い.

§3. 一般の超曲面の local Euler obstruction

この節では, 特異点集合が零次元とは限らない一般の超曲面 S の場合を考察し, 注目した特異点における local Euler obstruction を求めるアルゴリズムを構成できることを述べる. アルゴリズム導出の基礎となるのは, D. T. Lê と B. Teissier が論文 [20] で与えた polar multiplicity formula である. アルゴリズム構成の鍵となるのは, comprehensive Gröbner system および parametric local cohomology system による計算手法である.

超曲面 $S \subset \mathbb{C}^n$ の特異点集合を $\Sigma = Sing(S)$ で表す. $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間の列からなる flag を $\mathcal{D}$ で表す.

$$\mathcal{D} : D_{n-1} \subset D_{n-2} \subset \cdots \subset D_2 \subset D_1 \subset \mathbb{C}^n, \ \mathrm{codim}(D_i) = i$$

Flag $\mathcal{D}$ に対し

$$\mathrm{proj}_k : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-k}$$

を考える. ただし, ここで $\mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_k) = D_{n-k}$ を満たすとする. この写像 proj_k を超曲面 S の非特異部分 $reg(S) = S - \Sigma$ に制限した $\mathrm{proj}_k|_{reg(S)}$ を π_k で表す.

$$\pi_k : reg(S) \longrightarrow \mathbb{C}^{n-k}$$

次に $crit(\pi_k) = \{x \mid x \text{ is a critical point of } \pi_k : reg(S) \to \mathbb{C}^{n-k}\}$ の閉包をとり

$$P_k(\mathcal{D}) = \overline{crit(\pi_k)} \subset S$$

と定める. $P_k(\mathcal{D})$ は polar variety と呼ばれる.

Lê-Teissie [20] は, flag $\mathcal{D} : D_{n-1} \subset D_{n-2} \subset \cdots \subset D_2 \subset D_1 \subset \mathbb{C}^n$ が, *generic* であれば,

$$Eu_O(S) = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k m_O(P_k(\mathcal{D}))$$

が成り立つことを示した. ここで

$$m_O(P_k(\mathcal{D})) = \text{intersection number}(D_{n-1-k}, P_k(\mathcal{D}))_O$$

である.

Lê-Teissier の公式を用いて local Euler obstruction を求めるとすると, まず, 超曲面 S に対し *generic* な flag $\mathcal{D}$ を選んで, 次にその polar variety を構成し, さらに intersection number を求めればよいことになる. この方法では, 一連の計算をはじめる前にあらかじめ *generic* な flag $\mathcal{D}$ を選ぶかあるいは, とりあえず一つの flag を選び, 計算の各段階で, 最初に選んだ flag が *generic* であるという条件と矛盾しないか否か確認しながら計算を行うことになる.

一般に, 与えられた flag が S に対し *generic* であることを知るということは, 特異点の構造が十分よくわかるということと等しいと考えられるため, 計算をはじめる前に *generic* な flag を選ぶということは極めて困難である. また, 計算の過程で, flag が *generic* であるか否かの criterion を確かめていくことは, 計算コストが高いと思われる. 即ち, 計算代数の通常の方法では, Lê-Teissier の polar multiplicity formula のみによって local Euler obstruction を求めることは困難であると考えられる.

さてここで前節の議論を思い出そう. ひとつの flag $\mathcal{D}$ を選んで, 計算をするのではなく, flag の族をとり, polar variety の族 とその intersection number を, 族を定める parameter 付きで計算することが出来れば, parameter 空間の open dense な segment 上での値を選ぶことで, locl Euler obstruction を求めることができることになる. さて, polar variety は, $crit(\pi_k)$ の閉包であるので, polar variety の族はイデアルの saturation を parameter 付で計算することで求めることができる. この箇所の計算は本来は収束冪級数環での計算であるが, parametric Gröbner system ([24]) を用いた多項式環でのイデアル計算を行うことで効率化を図ることができる. (次の intersection number の計算は局所的に行うので, この計算で正しい答えを得ることができることが保証される). また, parameter 付きで intersection number を求めるには, parameter 付きで局所コホモロジーを計算するアルゴリズムをもちいればよい ([34]).

Parametric system の概念に基づいた計算の枠組みを用いることで, local Euler obstruction を求めるアルゴリズムを構成することが出来る.

References

[1] K. Behrend, Donaldson-Thomas type invariants via microlocal geometry, Ann. Math. **170** (2009), 1307–1338.

[2] J.-P. Brasselet, Local Euler obstruction, old and new, in Brazilian Topology Meeting (Rio Claro 1998) World Scientific, 2000, 140–147.

[3] J.-P. Brasselet, M. G. Grulha Jr, Local Euler obstruction, old and new II, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **380** (2010), 23–45.

[4] J.-P. Brasselet, Lê Dũng Tráng and J. Seade, Euler obstruction and indices of vector fields, Topology **39** (2000), 1193–1208.

[5] J. L. Brylinski, A. Dubson et M. Kashiwara, Formule de l'indice pour les modules holonomes et obstruction d'Euler, C. R. Acad. Sci. Paris, série A **293** (1981), 573–576.

[6] A. S. Dubson, Classes caractéristiques des variétés singulières, C. R. Acad. Sci. Paris, série A **287** (1978), 237–240.

[7] A. S. Dubson, Calcul des invariants numériques des singularités et applications, Sonderforschungsbereich **40** (1981), Univ. Bonn.
[8] N. Dutertre and N. G. Grulha Jr, Lê-Greuel type formula for the Euler obstruction and applications, Adv. Math. **251** (2014), 127–146.
[9] L. Ernström, Duality for the local Euler Obstruction with Applications to Real and Complex Singularities, Thesis, 1993. MIT.
[10] L. Ernström, Topological Radon transforms and the local Euler obstruction, Duke Math. **76** (1994), 1–21.
[11] T. Gaffney, N. G. Grulha and M.A.S. Ruas, The local Euler obstruction and topology of the stabilization of associated determinantal varieties, arXiv:1611.00749v7 (2017)
[12] G. Gonzalez-Sprinberg, L'obstruction local d'Euler et le théorème de MacPherson, Astérisque **82-83** (1981), 7–32.
[13] G. Gonzalez-Sprinberg, Cycles maximal et invariant d'Euler local des singularités isolées de surfaces, Topology **21** (1982), 401–408.
[14] N. G. Grulha Jr, L'obstruction d'Euler locale d'une application, Annales de la Facultés des Sciences de Toulouse **17** (2008), 53–71.
[15] N. G. Grulha Jr, The Euler obstruction and Bruce-Roberts' Milnor number, Quart. J. Math. **60** (2009), 291—302.
[16] V. H. Jorge Pérez, D. Levcovitz and M. J. Saia, Invariants, equisingularity and Euler obstruction of map germs from C^n to C^n, J. reine angew Math. **587** (2005), 145–167.
[17] M. Kashiwara, Index theorem for maximally overdetermined systems of linear differential equations, Proc. Japan Acad. **49** (1973), 803–804.
[18] 柏原正樹, b-函数と超曲面の特異性, 三輪哲二記, 京都大学数理解析研究所講究録 **225** (1975), 16–53.
[19] M. Kashiwara, Systèmes d'Equations Micro-Différentielles – cours de Masaki Kashiwara, 1976-1977, Note de Teresa Monteiro Fernandes, Univ. Paris-Nord
[20] Lê Dũng Tráng and B. Teissier, Variétés polaires locales et classes de Chern de variétés singulières, Annals of Mhatematics **114** (1981), 457—491.
[21] R. D. MacPherson, Chern class for singular algebraic varieties, Ann. of Math. **100** (1974), 423—432.
[22] D. Massey, Characteristic cycles and the relative local Euler obstruction, arXiv:1704.04633v2
[23] Y. Matsui and K. Takeuchi, A geometric degree formula for A-discriminants and Euler obstructions of toric varieties, Adv. Math. 226 (2011), 2040–2064.
[24] K. Nabeshima, Stability conditions of monomial bases and comprehensive Gröbner systems. Proc. CASC2012, LNCS, **7442**, pages 248–259, Springer, 2012.
[25] K. Nabeshima and S. Tajima, Computing μ^*-sequences of hypersurface isolated singularities via parametric local cohomology systems, Acta Mathematica Vietnamica. **42**(2) (2017),
[26] K. Nabeshima and S. Tajima : Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals, Journal of Symbolic Computation. **82** (2017), 91–122,
[27] 鍋島克輔, 田島慎一, グレブナ基底を用いた収束冪級数環での拡張イデアル所属アルゴリズムについて,
京都大学数理解析研究所講究録,**2054** (2018), 118–125.
[28] K. Nabeshima and S. Tajima, A new method for computing limiting tangent spaces of isolated hypersurface singularity via algebraic local sohomology, to appear in Advanced

Studies in Pure Mathematics **78** (2018).

[29] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice and J. N. Tomazella, The Bruce-Roberts number of a function on a weighted homogeneous hypersurface, Quaterly J. Math. **64** (2013), 269–280.

[30] D. O'Shea, Computing limits of tangent spaces : singularites, computation and pedagogy, in Singularity Theory, Trieste 1991 , World Sci. (1995), 549–573.

[31] P. Pragacz, Characteristic Classes with Applications to Geometry, Topology and Number Theory, ssdnm.mimuw.edu.pl/pliki/wyklady/ssdnm-pp.pdf.

[32] J. I. Rodriguez and B. Wang, A numerical algorithm to compute Euler obstruction functions, arXiv: 1710.0431v1

[33] M. Sebastiani, Sur la formule de Gonzalez-Verdier, Bol. Soc. Braz. Mat. **16** (1985), 31–44.

[34] T. Shibuta and S. Tajima, An algorithm for computing the Hilbert-Samuel multiplicities and reductions of zero-dimensional ideals of Cohen-Macaulay local rings, srXiv: 1710.01435v1 [math.AC], submitted

[35] S. Tajima and Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, J. Symbolic Computation **44** (2009), 435–448.

[36] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, Adv. Studies in Pure Math., **56** (2009), 341–361.

[37] S. Tajima and K. Nabeshima, An implementation of the Lê -Teissier method for computing local Euler obstructions, submitted

[38] B. Teissier, Cycles evanescents, sections planes et conditions de Whitney, Astérisques **7-8**, Soc. Math. France. (1973), 285–362.

[39] H. Whitney, Tangents to an analytic variety, Ann. Math. **81** (1965), 496–549.