数理解析研究所講究録 第2089巻 2018年 5-18

Von Neumann 環における量子ダイバージェンス

日合 文雄

1 はじめに

数学と物理の量子確率・量子統計と関連する分野では，従来より Kullback-Leibler ダイバージェンスの量子版 (=非可換版) である相対エントロピーが基本的な役割を果たしてきた．近年の量子情報理論の急速な発展において，相対エントロピー以外の種々の量子ダイバージェンスが使われるようになった．とりわけ，相対エントロピーを特別な場合として含むレニィ・ダイバージェンスとその変形であるサンドイッチ・レニィ・ダイバージェンスの族は，量子仮説検定の漸近的な誤り確率の記述において決定的な役割をもつことが分かってきた．量子情報理論の現状では，ほとんどの場合，有限次元の $B(\mathcal{H})$ (つまり行列環) で議論される．しかし，無限次元の $B(\mathcal{H})$ や von Neumann 環の場合での量子ダイバージェンスの理論を整備しておくことは，将来の量子情報理論の発展において意味があることと思われる．純粋に数学の問題としても面白いテーマである．

この小論では，一般の von Neumann 環の設定での量子ダイバージェンスについて概説する．1 節で，有限次元の場合の種々の量子ダイバージェンスについて簡単に紹介する．これらについての詳細な論考は論文[1] [2] にある．2 節で，標準 f-ダイバージェンスと極大 f-ダイバージェンスの von Neumann 環の場合への拡張について説明する．途中，von Neumann 環の標準形，相対モジュラー作用素，非可換 L^p-空間についても簡単に触れる．4 節で，レニィ・ダイバージェンスとサンドイッチ・レニィ・ダイバージェンスの von Neumann 環の場合への拡張について，Jenčová と Berta-Scholz-Tomamichel の最近の論文に基づいて説明する．

2 有限次元の $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の場合

この節では，Hilbert 空間は $\mathcal{H}$ は有限次元とする．したがって，$\mathcal{H}$ 上の (有界) 作用素の全体 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は行列環 $\mathbb{M}_n$ $(n = \dim \mathcal{H})$ と同一視できる．$\mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ は $\mathcal{H}$ 上の正作用素の全体とする．以下，$\rho, \sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対する各種の量子ダイバージェンスについて簡単に解説する．

2.1 標準 f-ダイバージェンス

Tr は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の通常のトレース汎関数とし，Hilbert-Schmidt 内積を $\langle X, Y\rangle_{\mathrm{HS}} := \mathrm{Tr}\, X^*Y$ $(X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ とする．

$f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ は凸関数とし，

$$f(0^+) := \lim_{t\searrow 0} f(t), \qquad f'(\infty) := \lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} \quad \in (-\infty, \infty]$$

[1]F.H., M. Mosonyi, D. Petz and C. Bény, Quantum f-divergences and error correction, *Rev. Math. Phys.* **23** (2011), 691–747. (arXiv:1008.2529v6, 2017)

[2]F.H. and M. Mosonyi, Different quantum f-divergences and the reversibility of quantum operations, *Rev. Math. Phys.* **29** (2017), 1750023. (arXiv:1604.03089)

と定める．$\rho, \sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ が $\rho, \sigma > 0$ のとき，(標準)f-ダイバージェンス $S_f(\rho\|\sigma)$ を

$$S_f(\rho\|\sigma) := \langle \sigma^{1/2}, f(L_\rho R_{\sigma^{-1}})\sigma^{1/2}\rangle_{\mathrm{HS}} = \mathrm{Tr}\,\sigma^{1/2} f(L_\rho R_{\sigma^{-1}})(\sigma^{1/2})$$

と定める．ここで，L_ρ は ρ による左掛け算，$R_{\sigma^{-1}}$ は σ^{-1} による右掛け算，i.e., $L_\rho X := \rho X$, $R_{\sigma^{-1}} X := X\sigma^{-1}$ $(X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$．一般の $\rho, \sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対しては

$$S_f(\rho\|\sigma) := \lim_{\varepsilon\searrow 0} S_f(\rho + \varepsilon I\|\sigma + \varepsilon I)$$

により拡張できる．スペクトル分解 $\rho = \sum_a aP_a$, $\sigma = \sum_b Q_b$ を用いると．直接的に

$$S_f(\rho\|\sigma) = \sum_{a>0}\sum_{b>0} bf(ab^{-1})\mathrm{Tr}\,P_a Q_b + f(0^+)\mathrm{Tr}\,(I - s(\rho))\sigma + f'(\infty)\mathrm{Tr}\,\rho(I - s(\sigma))$$

と表すことができる．ただし，$s(\rho)$ は ρ のサポート射影 (i.e., ρ の値域への直交射影) を表す．

2.2　レニィ・ダイバージェンス

$\alpha \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ のとき，(従来の) レニィ・ダイバージェンスは

$$\begin{aligned} D_\alpha(\rho\|\sigma) &:= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\log \mathrm{Tr}\,\rho^\alpha\sigma^{1-\alpha} & (\rho^0 \le \sigma^0 \text{ または } 0<\alpha<1 \text{ のとき}) \\ +\infty & (\rho^0 \not\le \sigma^0 \text{ かつ } \alpha > 1 \text{ のとき}) \end{cases} \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\log\bigl(\mathrm{sign}(\alpha-1)S_{f_\alpha}(\rho\|\sigma)\bigr) \end{aligned}$$

と定義される．ここで，$f_\alpha(t) := \mathrm{sign}(\alpha-1)t^\alpha$.

2.3　サンドイッチ・レニィ・ダイバージェンス

$\alpha \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ のとき，

$$\widetilde{D}_\alpha(\rho\|\sigma) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\log \mathrm{Tr}\,\bigl(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}\rho\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}\bigr)^\alpha & (\rho^0 \le \sigma^0 \text{ または } 0<\alpha<1 \text{ のとき}), \\ +\infty & (\rho^0 \not\le \sigma^0 \text{ かつ } \alpha > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義されるサンドイッチ・レニィ・ダイバージェンスは，量子情報の最近の発展において重要な役割を果たしている．

2.4　極大 f-ダイバージェンス

$\rho, \sigma > 0$ のとき，極大 f-ダイバージェンスを

$$\widehat{S}_f(\rho\|\sigma) := \langle \sigma^{1/2}, f(\sigma^{-1/2}\rho\sigma^{-1/2})\sigma^{1/2}\rangle_{\mathrm{HS}} = \mathrm{Tr}\,\sigma f(\sigma^{-1/2}\rho\sigma^{-1/2})$$

と定義し，一般の $\rho, \sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+$ に対しては

$$\widehat{S}_f(\rho\|\sigma) := \lim_{\varepsilon\searrow 0}\widehat{S}_f(\rho + \varepsilon I\|\sigma + \varepsilon I)$$

により拡張する．

命題 **2.1.** [3] $\rho^0 \le \sigma^0$ のとき，

$$\widehat{S}_f(\rho\|\sigma) = S_f^{\max}(\rho\|\sigma) := \inf\bigl\{S_f(p\|q) : p, q \in \mathbb{C}_+^n,\ \Phi(p) = \rho,\ \Phi(q) = \sigma,\\ \Phi : \mathbb{C}^n \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ は } CPTP \text{ 写像}\bigr\}.$$

2.5 測定 f-ダイバージェンス

測定 (または極小)f-ダイバージェンスは

$$S_f^{\mathrm{meas}}(\rho\|\sigma) = S_f^{\min}(\rho\|\sigma) := \sup\bigl\{S_f(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) :\ \Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C}^n \text{ は CPTP}\bigr\}.$$

注意 **2.2.** S_f が CPTP(完全正でトレースを保存する) 写像の下での単調性を満たす限り，

$$S_f^{\mathrm{meas}}(\rho\|\sigma) \le S_f(\rho\|\sigma) \le \widehat{S}_f(\rho\|\sigma).$$

2.6 可逆性の問題

$\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{K})$ はトレースを保存する正 (線形) 写像とすし，$D(\rho\|\sigma)$ は単調性 (またはデータ処理不等式)

$$D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) \le D(\rho\|\sigma).$$

を満たすダイバージェンスとする．このとき，

$$D(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) = D(\rho\|\sigma) < +\infty$$

ならば，$\Psi(\Phi(\rho)) = \rho$ および $\Psi(\Phi(\sigma)) = \sigma$ を満たすトレースを保存する逆向きの正写像 $\Psi : \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が存在するかというのが可逆性の問題である．大雑把に言うと，f が作用素凸関数なら，S_f について可逆性が成立するが，$\widehat{S}_f$ については可逆性より弱い結果しかいえない．この問題については論文 [1,2] に詳しい説明がある．

3 標準 f-ダイバージェンスと極大 f-ダイバージェンス: von Neumann 環の場合

この節では，前節で取り上げた標準 f-ダイバージェンスと極大 f-ダイバージェンスの von Neumann 環の場合への拡張について解説する．最初に，von Neumann 環の標準形と相対モジュラー作用素について簡単に説明する．

3.1 Von Neumann 環の標準形

Von Neumann 環 M, その表現 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ 上の共役線形な等距離対合 J $(J^2 = I)$, $\mathcal{H}$ の自己双対な凸錘 (自然な正錘と呼ばれる) $\mathcal{P}$ の 4 つ組 $(M, \mathcal{H}, J, \mathcal{P})$ で，次の条件を満たすものを M の標準形という:

[3]K. Matsumoto, A new quantum version of f-divergence, Preprint, 2014; arXiv:1311.4722.

(1) $JMJ = M'$,

(2) すべての $c \in M \cap M'$ に対し，$JcJ = c^*$,

(3) すべての $\xi \in \mathcal{P}$ に対し，$J\xi = \xi$,

(4) すべての $a \in M$ に対し，$aJaJ\mathcal{P} \subset \mathcal{P}$.

Von Neumann 環の標準形の存在は冨田理論を基礎に論文[4] [5] [6] で示された．上の特徴付けは論文[6] による．標準形 $(M, \mathcal{H}, J, \mathcal{P})$ の基本性質として，

- 一意性．$(M, \mathcal{H}, J, \mathcal{P})$ と $(\widetilde{M}, \widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{J}, \widetilde{\mathcal{P}})$ は標準形とする．$*$ 同型写像 $\Phi : M \to \widetilde{M}$ により M と $\widetilde{M}$ が同型ならば，ユニタリ $u : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ が一意に存在して

$$\Phi(x) = uxu^{-1} \ \ (x \in M), \qquad \widetilde{J} = uJu^{-1}, \qquad \widetilde{\mathcal{P}} = u\mathcal{P}.$$

- **縮約 von Neumann 環の標準形**．$(M, \mathcal{H}, J, \mathcal{P})$ が M の標準形のとき，射影 $e \in M$ に対し，$e_0 := eJeJ$ とすると，$eMe \cong e_0Me_0$ の標準形は $(e_0Me_0, e_0\mathcal{H}, e_0Je_0, e_0\mathcal{P})$ で与えられる．

- 任意の $\rho \in M_*^+$ に対して，

$$\rho(x) = \langle \xi_\rho, x\xi_\rho \rangle, \qquad x \in M$$

  となる $\xi_\rho \in \mathcal{P}$ が一意に存在する．ξ_ρ を ρ のベクトル表示という．

- $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対して，

$$\|\xi_\rho - \xi_\sigma\|^2 \le \|\rho - \sigma\| \le \|\xi_\rho - \xi_\sigma\| \, \|\xi_\rho + \xi_\sigma\|.$$

  $M = B(\mathcal{H})$ の場合，1 番目の不等式は **Powers-Størmer** の不等式として知られる．

3.2 相対モジュラー作用素

$(M, \mathcal{H}, J, \mathcal{P})$ を標準形とする．$\sigma \in M_*^+$ の M-サポート $s(\sigma) = s_M(\sigma) \in M$ は $\overline{M'\xi_\sigma}$ の上への射影であり，M'-サポート $s_{M'}(\sigma) \in M'$ は $\overline{M\xi_\sigma}$ の上への射影である．荒木[7] は，$\rho, \sigma \in M_*^+$ の相対モジュラー作用素 $\Delta_{\rho,\sigma}$ を次のように定義した: 共役線形作用素

$$S_{\rho,\sigma}(x\xi_\sigma + \eta) := s_M(\sigma)x^*\xi_\rho, \qquad x \in M, \ \eta \in (1 - s_{M'}(\sigma))\mathcal{H},$$
$$F_{\rho,\sigma}(x'\xi_\sigma + \zeta) := s_{M'}(\sigma)x'^*\xi_\rho, \quad x' \in M', \ \zeta \in (1 - s_M(\sigma))\mathcal{H}$$

[4] H. Araki, Some properties of modular conjugation operator of von Neumann algebras and a non-commutative Radon-Nikodym theorem with a chain rule, *Pacific J. Math.* **50** (1974), 309–354.

[5] A. Connes, Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **24** (1974), 121–155.

[6] U. Haagerup, The standard form of von Neumann algebras, *Math. Scand.* **37** (1975), 271–283.

[7] H. Araki, Relative entropy for states of von Neumann algebras II, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **13** (1977), 173–192.

は可閉であり，$S_{\rho,\sigma}^* = \overline{F}_{\rho,\sigma}$ を満たす．

$$\Delta_{\rho,\sigma} := S_{\rho,\sigma}^* \overline{S}_{\rho,\sigma}$$

と定める．このとき，$\overline{S}_{\rho,\sigma}$ の極分解は $\overline{S}_{\rho,\sigma} = J\Delta_{\rho,\sigma}^{1/2}$ で与えられる．極分解のユニタリ部分が ρ, σ に依らず J で与えられることが重要である．また，$\Delta_{\rho,\sigma}$ のサポート射影は $s_M(\rho)s_{M'}(\sigma)$ である．

以下で，$\Delta_{\rho,\sigma}$ のスペクトル分解を

$$\Delta_{\rho,\sigma} = \int_0^\infty t\, dE_{\rho,\sigma}(t)$$

で表す．

3.3 標準 f-ダイバージェンス

以下に述べる von Neumann 環での量子 f-ダイバージェンスについては，$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ は作用素凸関数と仮定する．このとき，f は次の一意的な積分表示をもつ:

$$f(t) = f(1) + f'(1)(t-1) + c(t-1)^2 + \int_{[0,\infty)} \frac{(t-1)^2}{t+\lambda}\, d\mu(\lambda).$$

ただし，$c \geq 0$, μ は $\int_{[0,\infty)}(1+\lambda)^{-1}\, d\mu(\lambda) < +\infty$ を満たす $[0,\infty)$ 上の正測度である．f の境界値として，

$$f(0^+) := \lim_{t\searrow 0} f(t), \quad f'(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} f'(t) \quad \in (-\infty, +\infty]$$

を定める．f の転置 $\widetilde{f}$ は

$$\widetilde{f}(t) := tf(t^{-1}), \qquad t \in (0,\infty).$$

これは再び $(0,\infty)$ 上の作用素凸関数であり，$\widetilde{f}(0^+) = f'(+\infty)$, $\widetilde{f}'(+\infty) = f(0^+)$ を満たす．f が作用素凸である仮定は，量子 f-ダイバージェンスを導入する上で本質的ではないが，それらの性質を示す上で，上の積分表示はしばしば有用である．

次に定義する von Neumann 環における標準 f-ダイバージェンスは，論文[8] [9] で導入された擬 (quasi) エントロピーを特殊化して少し修正したものである．

定義 3.1. $\rho, \sigma \in M_*^+$ の標準 f-ダイバージェンスは，スペクトル分解 $\Delta_{\rho,\sigma} = \int_0^\infty t\, dE_{\rho,\sigma}(t)$ により

$$\begin{aligned} S_f(\rho\|\sigma) &:= f(0^+)\sigma(1 - s_M(\rho)) + f'(+\infty)\rho(1 - s_M(\sigma)) \\ &\quad + \int_{(0,+\infty)} f(t)\, d\|E_{\rho,\sigma}\xi_\sigma\|^2 \quad \in (-\infty, +\infty] \end{aligned}$$

と定義される．

[8] H. Kosaki, Interpolation theory and the Wigner-Yanase-Dyson-Lieb concavity, *Comm. Math. Phys.* **87** (1982), 315–329.
[9] D. Petz, Quasi-entropies for states of a von Neumann algebra, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **21** (1985), 787–800.

命題 **3.2.**

$$S_f(\rho\|\sigma) = S_{\widetilde{f}}(\sigma\|\rho).$$

例 **3.3.** 典型的な量子ダイバージェンスである相対エントロピー $D(\rho\|\sigma)$ は，$f(t) = t\log t$ (よって $\widetilde{f}(t) = -\log t$) に対する標準 f-ダイバージェンスである:

$$D(\rho\|\sigma) = S_{t\log t}(\rho\|\sigma) = S_{-\log t}(\sigma\|\rho).$$

相対エントロピーは，最初に梅垣により半有限 von Neumann 環の場合に導入された．特に $M = B(\mathcal{H})$ の場合は

$$D(\rho\|\sigma) = \mathrm{Tr}\,\rho(\log\rho - \log\sigma).$$

その後，相対エントロピーは，荒木[7] によって一般の von Neumann 環の場合に拡張され，さらに幸崎[10] はその有用な変分表示を与えた．

定理 **3.4.** **($S_f(\rho\|\sigma)$ の基本性質)**

- 単調性あるいはデータ処理不等式．M, M_0 は von Neumann 環とし，$\gamma : M_0 \to M$ は単位的 (i.e., $\gamma(1) = 1$) な Schwarz (i.e., 任意の $A \in M_0$ に対し $\gamma(A^*A) \geq \gamma(A)^*\gamma(A)$) 正規写像とする．任意の $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し

$$S_f(\rho\circ\gamma\|\sigma\circ\gamma) \leq S_f(\rho\|\sigma).$$

- 同時凸性．$S_f(\rho\|\sigma)$ は $(\rho,\sigma) \in M_*^+ \times M_*^+$ について同時凸である．もう少し強く，任意の $\rho_i, \sigma_i \in M_*^+$, $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$ に対し，

$$S_f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\rho_i \,\middle\|\, \sum_{i=1}^k \lambda_i\sigma_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i S_f(\rho_i\|\sigma_i).$$

- 同時下半連続性．$(\rho,\sigma) \in M_*^+ \times M_*^+ \mapsto S_f(\rho\|\sigma)$ はノルム位相に関して同時下半連続である．

- マルチンゲール収束．$\{M_\alpha\}$ は M の 1 を含む von Neumann 部分環の増大ネットで，$\left(\bigcup_\alpha M_\alpha\right)'' = M$ とする．任意の $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し，

$$S_f(\rho|_{M_\alpha}\|\sigma|_{M_\alpha}) \longrightarrow S_f(\rho\|\sigma).$$

  また，$\{e_\alpha\}$ は M の射影の増大ネットで，$e_\alpha \nearrow 1$ とすると，

$$S_f(e_\alpha\rho e_\alpha\|e_\alpha\sigma e_\alpha) \longrightarrow S_f(\rho\|\sigma).$$

  ただし，$e_\alpha\rho e_\alpha$ は ρ の $e_\alpha M e_\alpha$ への制限とする．$e_\alpha M e_\alpha$ は 1 を含まないので，この収束は上のマルチンゲール収束に含まれない．

[10] H. Kosaki, Relative entropy of states: a variational expression, *J. Operator Theory* **16** (1986), 335–348.

3.4 Haagerup の非可換 L^p-空間

ここで，量子ダイバージェンスの解説を中断して，Haagerup と Kosaki の非可換 L^p-空間について簡単に説明する．

φ_0 は M 上の忠実な半有限正規荷重とし，$\sigma_t^{\varphi_0}$ $(t \in \mathbb{R})$ をモジュラー自己同型群とする．接合積 $N := M \rtimes_{\sigma^{\varphi_0}} \mathbb{R}$ は半有限 von Neumann 環であり，半有限正規トレース τ と双対作用と呼ばれる 1 径数自己同型群 θ_s $(s \in \mathbb{R})$ をもち，スケール条件 $\tau \circ \theta_s = e^{-s}\tau$ $(s \in \mathbb{R})$ を満たす．$\widetilde{N}$ は N に付随する τ-可測作用素の全体からなる空間とする．各 $p \in (0, \infty]$ に対し，Haagerup の L^p-空間 $L^p(M)$ は

$$L^p(M) := \left\{x \in \widetilde{N} : \theta_s(x) = e^{-s/p}x,\ s \in \mathbb{R}\right\}$$

と定義される．特に，$L^\infty(M) = N^\theta$ (θ-不動点環) は M と一致する．$\widetilde{N}_+$ は $\widetilde{N}$ の正部分とし，$L^p(M)_+ = L^p(M) \cap \widetilde{N}_+$ とする．

$L^1(M)$ は M の前双対 M_* と順序同型であるので，全単射の順序同型写像

$$\psi \in M_* \longmapsto h_\psi \in L^1(M)$$

が定義でき，さらに $L^1(M)$ 上の正線形汎関数 tr を

$$\mathrm{tr}(h_\psi) = \psi(1), \qquad \psi \in M_*$$

により定義できる．$0 < p < \infty$ に対し，$x \in L^p(M)$ の L^p-(擬) ノルムは

$$\|x\|_p := \mathrm{tr}(|x|^p)^{1/p}$$

で与えられる．また，$\|\cdot\|_\infty$ は M 上の作用素ノルム $\|\cdot\|$ と一致する．$1 \le p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ のとき，

$$(x, y) \in L^p(M) \times L^q(M) \ \longmapsto\ \mathrm{tr}(xy)\ (= \mathrm{tr}(yx))$$

により，$L^p(M)$ の双対 Banach 空間は $L^q(M)$ となる．

特に，$L^2(M)$ は内積

$$\langle x, y \rangle = \mathrm{tr}(x^*y)\ (= \mathrm{tr}(yx^*)).$$

により Hilbert 空間となり，

$$(M, \mathcal{H} = L^2(M), J = {}^*, \mathcal{P} = L^2(M)_+)$$

は M の標準形である．ここで，M は $L^2(M)$ 上に左掛け算で表現される．各 $\rho \in M_*^+$ は

$$\rho(x) = \mathrm{tr}(xh_\rho) = \langle h_\rho^{1/2}, xh_\rho^{1/2} \rangle, \qquad x \in M$$

と表される．つまり，$h_\rho^{1/2} \in L^2(M)_+$ が ρ のベクトル表示である．

3.5 Kosaki の非可換 L^p-空間

$\sigma \in M_*^+$ は忠実とし (ここでは，M は σ-有限と仮定する), $L^\infty(M) = M$ を $L^1(M)$ の中に

$$M \hookrightarrow L^1(M), \qquad x \longmapsto h_\sigma^{1/2} x h_\sigma^{1/2}$$

により埋入する．σ に関する Kosaki の L^p-空間 [11] は複素補間法により,

$$L^p(M,\sigma) := C_{1/p}(L^\infty(M), L_1(M)), \qquad 1 < p < \infty$$

と定義される．$L^p(M,\sigma)$ は次の等距離同型写像によって Haagerup の $L^p(M)$ と同型である:

$$L^p(M) \longrightarrow L^p(M,\sigma) \ (\subset L^1(M)), \qquad x \longmapsto h_\sigma^{1/2q} x h_\sigma^{1/2q}$$

(ただし $1/p + 1/q = 1$ とする)．つまり,

$$\|h_\sigma^{1/2q} x h_\sigma^{1/2q}\|_{p,\sigma} = \|x\|_p = (\mathrm{tr}|x|^p)^{1/p}, \qquad x \in L^p(M).$$

Haagerup の $L^p(M)$ と異なり，Kosaki の $L^p(M,\sigma)$ はすべて $L^1(M)$ の中で構成されていることに注意する．

3.6 極大 f-ダイバージェンス

量子ダイバージェンスの話題に戻って，ここでは，標準 f-ダイバージェンスとは別の極大 f-ダイバージェンスと呼ばれるものを解説する．

$$(M_*^+ \times M_*^+)_0 := \left\{(\rho,\sigma) \in M_*^+ \times M_*^+ : \text{ある } \delta > 0 \text{ で } \delta\sigma \le \rho \le \delta^{-1}\sigma\right\}$$

と書く．

定義 3.5. (1 番目の定義) $(\rho,\sigma) \in (M_*^+ \times M_*^+)_0$ とすると，$a \in eMe$ $(e := s(\sigma))$ が一意に存在して $h_\rho^{1/2} = a h_\sigma^{1/2}$．よって $h_\sigma^{-1/2} h_\rho h_\sigma^{-1/2} = a^* a \in M_+$ と書くことができる．このとき，ρ, σ の極大 f-ダイバージェンスを

$$\widehat{S}_f(\rho\|\sigma) := \sigma(f(a^*a)) = \mathrm{tr} h_\sigma (f(h_\sigma^{-1/2} h_\rho h_\sigma^{-1/2}))$$

と定める．

命題 3.6. M, M_0 は von Neumann 環で $\gamma : M_0 \to M$ は単位的な正 (単純に $A \in M_0$, $A \ge 0 \implies \gamma(A) \ge 0$) の正規写像とする．$(\rho,\sigma) \in (M_*^+ \times M_*^+)_0$ に対し,

$$\widehat{S}_f(\rho\circ\gamma\|\sigma\circ\gamma) \le \widehat{S}_f(\rho\|\sigma).$$

命題 3.7. $\widehat{S}_f(\rho\|\sigma)$ は $(\rho,\sigma) \in (M_*^+ \times M_*^+)_0$ について同時凸である．もう少し強く，任意の $(\rho_i,\sigma_i) \in (M_*^+ \times M_*^+)_0$, $\lambda_i \ge 0$, $1 \le i \le n$ に対し,

$$\widehat{S}_f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i\rho_i \middle\| \sum_{i=1}^k \lambda_i\sigma_i\right) \le \sum_{i=1}^k \lambda_i \widehat{S}_f(\rho_i\|\sigma_i).$$

[11] H. Kosaki, Application of the complex interpolation method to a von Neumann algebra: non-commutative L^p-spaces, *J. Funct. Anal.* **56** (1984), 29–78.

定義 3.8. **(1 番目の定義の拡張)** 任意の $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し,

$$\widehat{S}_f(\rho\|\sigma) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \widehat{S}_f(\rho + \varepsilon(\rho+\sigma)\|\sigma + \varepsilon(\rho+\sigma)).$$

と定める．上で極限の存在 ($\in (-\infty, +\infty]$) は，命題 3.7 から $\widehat{S}_f(\rho + \varepsilon(\rho+\sigma)\|\sigma + \varepsilon(\rho+\sigma))$ が $\varepsilon > 0$ の凸関数であることから分かる．$(\rho, \sigma) \in (M_*^+ \times M_*^+)_0$ に対しては，この定義は最初の定義と一致する．

定理 3.9. 命題 3.6 と 3.7 で $(\rho, \sigma) \in (M_*^+ \times M_*^+)_0$ に対して示した単調性と同時凸性は，一般の $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対しても成立する．

命題 3.10.

$$\widehat{S}_f(\rho\|\sigma) = \widehat{S}_{\widetilde{f}}(\sigma\|\rho).$$

次に，絶対連続な組 $(\rho, \sigma) \in M_*^+ \times M_*^+$ について考える．

定義 3.11. $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し，ρ が σ について絶対連続である ($\rho \lll \sigma$ と表す) とは，M の点列 (x_n) に対し，

$$\lim_n \|x_n h_\sigma^{1/2}\| = 0, \ \ \lim_{n,m} \|(x_n - x_m) h_\rho^{1/2}\| = 0 \implies \lim_n \|x_n h_\rho^{1/2}\| = 0,$$

つまり，$R = R_{\rho/\sigma}:\ x h_\sigma^{1/2} \in M h_\sigma^{1/2} \mapsto x h_\rho^{1/2} \in M h_\rho^{1/2}$ は可閉作用素であることとする．

補題 3.12. $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し次は同値:

(i) $\rho \lll \sigma$;

(ii) $L^2(M)$ 上の M' に付随する正の自己共役作用素 $T = T_{\rho/\sigma}$ が (一意に) 存在して，$M h_\sigma^{1/2}$ は $T^{1/2}$ のコアであり，

$$\rho(x) = \langle T^{1/2} h_\sigma^{1/2}, T^{1/2} x h_\sigma^{1/2} \rangle, \qquad x \in M.$$

(T は $T = R^* \overline{R}$ で与えられる.)

注意 3.13. 「ある $\alpha > 0$ で $\rho \le \alpha\sigma$」 $\implies \rho \lll \sigma \implies s(\rho) \le s(\sigma)$.

定義 3.14. $f(0^+) < +\infty$ とする．$\rho, \sigma \in M_*^+$ が $\rho \lll \sigma$ のとき，スペクトル分解 $T_{\rho/\sigma} = \int_0^\infty \lambda \, dE_\lambda$ により

$$\widehat{S}'_f(\rho\|\sigma) := \langle h_\sigma^{1/2}, f(T_{\rho/\sigma}) h_\sigma^{1/2} \rangle = \int_0^\infty f(\lambda)\, d\|E_\lambda h_\sigma^{1/2}\|^2$$

と定める．

次の命題は，上で定義した $\widehat{S}'_f(\rho\|\sigma)$ が実質的に $\widehat{S}_f(\rho\|\sigma)$ と一致することを主張する．

命題 3.15. (1) $\rho, \sigma \in M_*^+$ が $\rho \lll \sigma$ のとき，

$$\widehat{S}'_f(\rho\|\omega) = \widehat{S}_f(\rho\|\omega) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \widehat{S}_f(\rho\|\omega + \varepsilon\rho) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \widehat{S}'_f(\rho\|\omega + \varepsilon\rho).$$

(2) 任意の $\rho,\sigma\in M_*^+$ に対し，

$$\widehat{S}_f(\rho\|\omega)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\widehat{S}_f(\rho\|\omega+\varepsilon\rho)=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\widehat{S}'_f(\rho\|\omega+\varepsilon\rho).$$

一般の $\rho,\sigma\in M_*^+$ に対し，$T_{\rho/\rho+\sigma}$ を用いることにより，極大 f-ダイバージェンス $\widehat{S}_f(\rho\|\sigma)$ の表示を次のように与えることができる．

定理 3.16. (2 番目の定義) 任意の $\rho,\sigma\in M_*^+$ に対し，スペクトル分解 $T_{\rho/\rho+\sigma}=\int_0^1\lambda\,dE_\lambda$ により，

$$\widehat{S}_f(\rho\|\sigma)=\int_0^1(1-\lambda)f\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)d\|E_\lambda h_{\rho+\sigma}^{1/2}\|^2.$$

ただし，$\lambda=0,1$ のとき，$(1-\lambda)f\bigl(\frac{\lambda}{1-\lambda}\bigr)$ はそれぞれ $f(0^+)$, $f'(+\infty)$ と解釈する．

極大 f-ダイバージェンスをもっと理解する上で，次の概念は重要である．この概念は，有限次元の $M=B(\mathcal{H})$ の場合に論文 [3] で考察された．

定義 3.17. $(X,\mathcal{X},\mu)$ は σ-有限測度空間，$\Psi:L^1(X,\mu)\to M_*$ はとトレースを保存する正写像とする．双対写像 $\gamma:=\Psi^*:M\to L^\infty(X,\mu)$ は単位的な正の正規写像となる．Ψ と $\xi,\eta\in L^1(X,\mu)$ からなる 3 つ組 (Ψ,ξ,η) が $\rho,\sigma\in M_*^+$ に対する逆テストであるとは，$\Psi(\xi)=\rho$ かつ $\Psi(\eta)=\sigma$ のときをいう．

定義 3.18. (極小逆テスト) 一般の $\rho,\sigma\in M_*^+$ に対し，スペクトル分解

$$h_{\rho+\sigma}^{-1/2}h_\rho h_{\rho+\sigma}^{-1/2}=\int_0^1 t\,dE_t$$

($T_{\rho/\rho+\sigma}=Jh_{\rho+\sigma}^{-1/2}h_\rho h_{\rho+\sigma}^{-1/2}J$ に注意) により，$\mu:=(\rho+\sigma)(E(\cdot))=\mathrm{tr}h_{\rho+\sigma}E(\cdot)$ と定め，可換 von Neumann 環 $L^\infty([0,1],\mu)=L^1([0,1],\mu)^*$ を考える．$\gamma_0:M\to L^\infty([0,1],\mu)$ を Radon-Nikodym 微分を用いて，

$$\gamma_0(x):=\frac{d\bigl(\mathrm{tr}h_{\rho+\sigma}^{1/2}xh_{\rho+\sigma}^{1/2}E(\cdot)\bigr)}{d\mu},\qquad x\in M$$

と定めると，γ_0 は単位的な正の正規写像であり，その前双対写像 $\Phi_0:L^1([0,1],\mu)\to L^1(M)\cong M_*$ は，$\phi\in L^\infty([0,1],\mu)\subset L^1([0,1],\mu)$ に対し

$$\Phi_0(\phi)=h_{\rho+\sigma}^{1/2}\left(\int_0^1\phi(t)\,dE_t\right)h_{\rho+\sigma}^{1/2}$$

を満たす．特に，$\Phi_0(t)=h_\rho$ かつ $\Phi_0(1-t)=h_\sigma$．ただし t は $[0,1]$ 上の恒等関数 $t\mapsto t$ を表す．さらに，

$$S_f(t\|1-t)=\int_0^1(1-t)f\left(\frac{t}{1-t}\right)d\mu(t)=\widehat{S}_f(\rho\|\sigma)$$

が成立する．$(\Phi_0,t,1-t)$ を ρ,σ に対する極小逆テストと呼ぶ．

次は論文 [3] の結果を von Neumann 環の場合に拡張したものである．

定理 **3.19.** **(3 番目の定義)** 任意の $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し，

$$\widehat{S}_f(\rho\|\sigma) = \min\{S_f(\xi\|\eta) : (\Psi, \xi, \eta) \text{ は } \rho, \sigma \text{ の逆テスト }\}.$$

標準 f-ダイバージェンスと極大 f-ダイバージェンスの間に，次の一般的な不等式が成立する．

定理 **3.20.** 任意の $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対して，

$$S_f(\rho\|\sigma) \le \widehat{S}_f(\rho\|\sigma).$$

定義 **3.21.** $\rho, \sigma \in M_*^+$ が可換とは，次の同値な条件が成立するときをいう:

(i) $s(\rho+\sigma)Ms(\rho+\sigma)$ 上で，$\rho \circ \sigma_t^{\rho+\sigma} = \rho$, $t \in \mathbb{R}$;

(ii) $s(\rho+\sigma)Ms(\rho+\sigma)$ 上で，$\sigma \circ \sigma_t^{\rho+\sigma} = \sigma$, $t \in \mathbb{R}$;

(iii) $h_\rho h_\sigma = h_\sigma h_\rho$.

命題 **3.22.** $\rho, \sigma \in M_*^+$ が可換なら，

$$S_f(\rho\|\sigma) = \widehat{S}_f(\rho\|\sigma).$$

例 **3.23.** $f(t) = t\log t$ のとき，$S_{t\log t}(\rho\|\sigma) = D(\rho\|\sigma)$ は相対エントロピーであり，$\widehat{S}_{t\log t}(\rho\|\sigma) = D_{\mathrm{BS}}(\rho\|\sigma)$ はいわゆる **Belavkin-Staszewski** の相対エントロピーである．命題 3.22 の不等式から

$$D(\rho\|\sigma) \le D_{\mathrm{BS}}(\rho\|\sigma).$$

特に，有限次元の $M = B(\mathcal{H})$ において，$\rho, \sigma \in B(\mathcal{H})^+$ が $s(\rho) \le s(\sigma)$ のとき，

$$D(\rho\|\sigma) = \mathrm{Tr}\,\rho(\log\rho - \log\sigma) \le D_{\mathrm{BS}}(\rho\|\sigma) = \mathrm{Tr}\,\sigma\log(\sigma^{-1/2}\rho\sigma^{-1/2})$$

であり，等号成立は $\rho\sigma = \sigma\rho$ の場合に限る．

問題 **3.24.** 上の等号条件は von Neumann algebra 環の場合でも成立すると予想される．

4 レニィ・ダイバージェンスとサンドイッチ・レニィ・ダイバージェンス

4.1 レニィ・ダイバージェンス

定義 **4.1.** $\rho, \sigma \in M_*^+$, $\rho \ne 0$ とする．$0 < \alpha < 1$ のとき，

$$Q_\alpha(\rho\|\sigma) := \|\Delta_{\rho,\sigma}^{\alpha/2} h_\sigma^{1/2}\|^2$$

と定める (ここで $h_\sigma^{1/2} \in \mathrm{dom}\,\Delta_{\rho,\sigma}^{\alpha/2}$ に注意する)．$\alpha > 1$ のときは，

$$Q_\alpha(\rho\|\sigma) := \begin{cases} \|\Delta_{\rho,\sigma}^{\alpha/2} h_\sigma^{1/2}\|^2 & (s(\rho) \le s(\sigma) \text{ かつ } h_\sigma^{1/2} \in D(\Delta_{\rho,\sigma}^{\alpha/2}) \text{ のとき}) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定める．すると，ρ, σ の α-レニィ・ダイバージェンスは

$$D_\alpha(\rho\|\sigma) := \frac{1}{\alpha - 1}\log Q_\alpha(\rho\|\sigma)$$

と定義される．

注意 **4.2.** $f_\alpha(t) := \begin{cases} t^\alpha & (\alpha > 1) \\ -t^\alpha & (0 < \alpha < 1) \end{cases}$ とすると，

$$Q_\alpha(\rho\|\sigma) = \begin{cases} S_{f_\alpha}(\rho\|\sigma) & (\alpha > 1) \\ -S_{f_\alpha}(\rho\|\sigma) & (0 < \alpha < 1) \end{cases}$$

だから，$Q_\alpha(\rho\|\sigma)$ は標準 f-ダイバージェンスの特別な場合になる．ただし，$\alpha > 2$ のとき f_α は作用素凸でない．

定理 **4.3.** $\rho, \sigma \in M_*^+$ とする．

(1) $0 < \alpha < 1$ のとき，$Q_\alpha(\rho\|\sigma) = \mathrm{tr}(h_\rho^\alpha h_\sigma^{1-\alpha})$.

(2) $s(\rho) \le s(\sigma)$ かつ $\alpha > 1$ のとき，次の条件は同値:

 (i) $h_\sigma^{1/2} \in \mathrm{dom}\,\Delta_{\rho,\sigma}^{\alpha/2}$;

 (ii) $h_\rho^{1/2} \in \mathrm{dom}\,\Delta_{\rho,\sigma}^{(\alpha-1)/2}$;

 (iii) $\eta \in L^2(M)s(\sigma)$ が存在して $h_\rho^{\alpha/2} = \eta h_\sigma^{(\alpha-1)/2}$.

 上の条件が成立するとき，$Q_\alpha(\rho\|\sigma) = \|\eta\|_2^2$.

定理 **4.4. (単調性)** M, M_0 は von Neumann 環とし，$\gamma : M_0 \to M$ は単位的な Schwarz 正規写像とする．$\alpha \in (0,1) \cup (1,2]$ のとき，任意の $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し

$$D_\alpha(\rho \circ \gamma\|\sigma \circ \gamma) \le D_\alpha(\rho\|\sigma).$$

しかし，$\alpha > 2$ のとき，D_α は上の単調性をもたない．

定理 **4.5. (同時凸性)** $\alpha \in (0,1) \cup (1,2]$ のとき，$Q_\alpha(\rho\|\sigma) = \exp\{(\alpha-1)D_\alpha(\rho\|\sigma)\}$ は $(\rho,\sigma) \in M_*^+ \times M_*^+$ について同時凸である．しかし，$\alpha > 2$ のとき，$Q_\alpha(\rho\|\sigma)$ は片側凸性 (ρ, σ の一方を固定したとき，他方について凸) ももたない．

4.2 サンドイッチ・レニィ・ダイバージェンス

定義 **4.6. (Jenčová[12] の定義)** $1 < \alpha < \infty$ とする．$\rho, \sigma \in M_*^+$ とし，σ は忠実とする．ρ, σ の α-サンドイッチ・レニィ・ダイバージェンスを

$$\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}\log\|h_\rho\|_{\alpha,\sigma}^\alpha & (h_\rho \in L^\alpha(M,\sigma)\text{ のとき}) \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定義する．$h_\rho \in L^\alpha(M,\sigma)$ とすると，$x \in L^\alpha(M)$ 存在して，$h_\rho = h_\sigma^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}} x h_\sigma^{\frac{\alpha-1}{2\alpha}}$ であり，$\|h_\rho\|_{\alpha,\sigma}^\alpha = \|x\|_\alpha^\alpha$ である (3.5 節)．いま，x について形式的に解くと，$x = h_\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} h_\rho h_\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}$ であり，

$$\|h_\rho\|_{\alpha,\sigma}^\alpha = \mathrm{tr}\big(h_\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} h_\rho h_\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}\big)^\alpha$$

と書くことができる．これは有限次元の $M = B(\mathcal{H})$ の場合のサンドイッチ・レニィ・ダイバージェンスの定義式と同じである．

[12] A. Jenčová, Rényi relative entropies and noncommutative L_p-spaces, Preprint, arXiv:1609.08462 [quant-ph].

σ が忠実でないときは，$\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma)$ は，縮約された Kosaki の L^α-空間

$$L^\alpha(M,\sigma) := \left\{h \in L^1(M) : h = ehe \in L^\alpha(eMe, \sigma|_{eMe})\right\}$$

(ただし $e := s_M(\sigma)$) を用いて定義することができる.

定理 4.7. **($\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma)$ の性質)**

- $\lim_{\alpha\searrow 1} \widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma) = D(\rho\|\sigma)$.
- $1 < \alpha < \infty$ とする．$\rho, \rho_0, \sigma, \sigma_0 \in M_*^+$ が $\rho_0 \le \rho$, $\sigma_0 \le \sigma$ なら，
$$\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho_0\|\sigma) \le \widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma), \qquad \widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma_0) \ge \widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma).$$
- $1 < \alpha < \infty$ のとき，$\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})} : M_*^+ \times M_*^+ \to [0,+\infty]$ はノルム位相で同時下半連続である.
- 単調性 **(DPI)**．M, M_0 は von Neumann 環で，$\gamma : M_0 \to M$ が単位的な正の正規写像なら，任意の $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し
$$\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\circ\gamma\|\sigma\circ\gamma) \le \widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma).$$
- $1 < \alpha < \infty$ のとき，$(\rho,\sigma) \in M_*^+ \times M_*^+ \mapsto \exp\left\{(\alpha-1)\widetilde{D}^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma)\right\}$ は同時凸である.
- 可逆性．$\rho, \sigma \in M_*^+$ とし，$\widetilde{D}^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma) < +\infty$ とする．$\gamma : M_0 \to M$ は単位的な 2-正の正規写像とする．このとき，$\rho\circ\gamma\circ\hat{\gamma} = \rho$ かつ $\sigma\circ\gamma\circ\hat{\gamma} = \sigma$ を満たす単位的な 2-正の正規写像 $\hat{\gamma} : M \to M_0$ が存在するための必要十分条件は
$$\widetilde{D}^{(\mathrm{J})}(\rho\circ\gamma\|\sigma\circ\gamma) = \widetilde{D}^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma).$$

Berta-Scholz-Tomamichel によるもう 1 つのサンドイッチ・レニィ・ダイバージェンスについて説明する前に，Araki-Masuda の L^p-ノルムの定義を述べておく.

定義 4.8. **(Araki-Masuda[13] の L^p-ノルム)** $\rho, \sigma \in M_*^+$ とする．ベクトル表示 $h_\rho^{1/2}$ の σ に関する Araki-Masuda の L^p-ノルムは

- $2 \le p \le \infty$ のとき，$s(\rho) \le s(\sigma)$ なら，$\|h_\rho^{1/2}\|_{p,\sigma} := \sup_{\omega\in M_*^+,\, \omega(1)=1} \left\|\Delta_{\omega,\sigma}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} h_\rho^{1/2}\right\|$ ($+\infty$ の値もとる)．$s(\rho) \le s(\sigma)$ でなければ，$\|h_\rho^{1/2}\|_{p,\sigma} := +\infty$.
- $1 \le p < 2$ のとき，$\|h_\rho^{1/2}\|_{p,\sigma} := \inf_{\omega\in M_*^+,\, \omega(1)=1,\, s(\omega)\ge s(\rho)} \left\|\Delta_{\omega,\sigma}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} h_\rho^{1/2}\right\|$．ただし，$h_\rho^{1/2}$ が $\mathrm{dom}\,\Delta_{\omega,\sigma}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ に属さないなら，$\|\Delta_{\omega,\sigma}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} h_\rho^{1/2}\|$ は $+\infty$ とする.

上のベクトル表示に対する p-ノルムは，M のヒルベルト空間上の $*$-表現のとり方に依らず定義できるが，ここでは $L^2(M)$ 上の標準形の表現の場合で述べた.

[13] H. Araki and T. Masuda, Positive cones and L_p-spaces for von Neumann algebras, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **18** (1982), 339–411.

定義 4.9. (Berta-Scholz-Tomamichel[14] の定義) $\alpha \in [1/2, \infty)$ とし，$\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し

$$\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma) := \frac{1}{\alpha - 1} \log \widetilde{Q}_\alpha(\rho\|\sigma)$$

と定める．すると，ρ, σ の α-サンドイッチ・レニィ・ダイバージェンスは

$$\widetilde{Q}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma) := \|h_\rho^{1/2}\|_{2\alpha,\sigma}^{2\alpha}.$$

定理 4.10. ($\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma)$ の性質)

-
  - $\widetilde{D}_{1/2}^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma) = -2\log F(\rho, \sigma)$．ここで $F(\rho, \sigma)$ はフィデリティ．
  - $\lim_{\alpha\to\infty} \widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma) = D_\infty(\rho\|\sigma) := \log\inf\{\lambda > 0 : \rho \le \lambda\sigma\}$, max 相対エントロピー．
  - $\lim_{\alpha\nearrow 1} \widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma) = D(\rho\|\sigma)$, 相対エントロピー．
- 任意の $\rho, \sigma \in M_*^+$ と $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{1\}$ に対し
$$\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma) \le D_\alpha(\rho\|\sigma).$$
- **単調性 (DPI)．** $\gamma : M_0 \to M$ は単位的な CP(完全正) の正規写像とする．任意の $\rho, \sigma \in M_*^+$ と $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right) \setminus \{1\}$ に対し
$$\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\circ\gamma\|\sigma\circ\gamma) \le \widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma).$$

最後に，

定理 4.11. (Jenčová[15] による最近の結果)

- 任意の $\alpha \in (1, \infty)$ と $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し
$$\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}(\rho\|\sigma) = \widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma).$$
- 任意の $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ と $\rho, \sigma \in M_*^+$ に対し
$$\widetilde{Q}_\alpha^{(\mathrm{BST})}(\rho\|\sigma) = \mathrm{tr}\Big(h_\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} h_\rho h_\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}\Big)^\alpha.$$
  上の右辺の式は，有限次元の場合のサンドイッチ・レニィ・ダイバージェンスの定義式と同じである．
- 可逆性．$\gamma : M_0 \to M$ は単位的な CP の正規写像とするとき，$1 < \alpha < \infty$ の $\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{J})}$ に対してと同様な可逆性の結果が，$\frac{1}{2} < \alpha < 1$ の $\widetilde{D}_\alpha^{(\mathrm{BST})}$ に対しても成立する．

---

[14] M. Berta, V.B. Scholz and M. Tomamichel, Rényi divergences as weighted non-commutative vector valued L_p-spaces, Preprint, arXiv:1608.05317 [math-ph].

[15] A. Jenčová, Rényi relative entropies and noncommutative L_p-spaces II, Preprint, arXiv:1707.00047 [quant-ph].