数理解析研究所講究録 1354 巻 2004 年 53-67

The Stability of the Non-Equilibrium Steady States

Dept. of Physics University of Tokyo, Yoshiko Ogata
東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 緒方芳子

C^*-環を用いた熱統計力学の研究は、熱平衡状態を中心に古くから行われてきた。統計力学を考える上で、あえて C^*-環をもちだしてくる理由は、それが無限系をとりあつかえることにある。この枠組みは、数学的に厳密であるというばかりではなく、物理状態の巨視的同値、非同値性や、散逸といった直感的な物理的概念の数学による明瞭な表現を可能にする。

さらに最近では、C^*-環を用いた熱平衡状態から大きく離れた、非平衡定常状態 (non-equilibrium steady states、NESS) とよばれる系の研究がなされるようになった。本稿では、非平衡定常状態の巨視的な安定性について検証したい。

1 非平衡定常状態

熱平衡状態は、温度で特徴付けられる、すなわち、エネルギー E をもつエネルギー状態が実現する確率が、$e^{-\beta E}$ に比例するような状態である。数学的には、これは KMS 状態として定義される。

定義 1 (KMS 状態) $(\mathcal{O},\alpha)$ を C^* 力学系、ω を $\mathcal{O}$ の状態とする。$\beta>0$ に対して

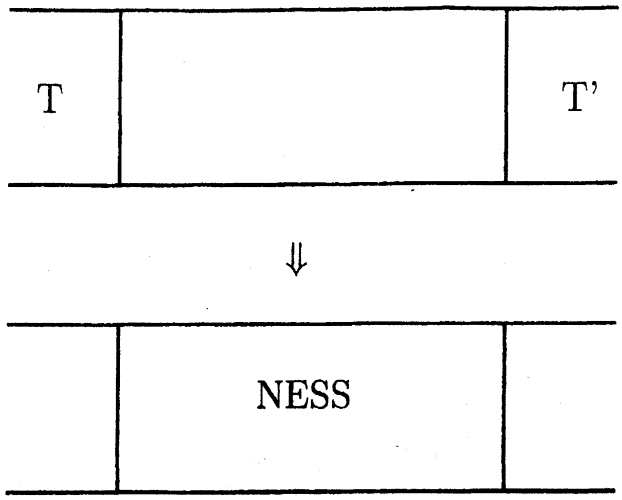
$$\mathcal{D}_\beta=\{z;z\in\mathbb{C},0<\mathrm{Im}z<\beta\}$$

とする。状態 ω が (α,β)-*KMS* 状態であるとは、$\forall A,B\in\mathcal{O}$ に対して以下を満たす $\mathcal{D}_\beta$ 上 *analytic,* $\bar{\mathcal{D}}_\beta$ 上有界な複素関数 $F_{A,B}$ *s.t.*

$$F_{A,B}(t)=\omega(A\alpha_t(B)),F_{A,B}(t+i\beta)=\omega(\alpha_t(B)A)\quad\forall t\in\mathbb{R}$$

が存在することをいう。

今、熱平衡状態に対して、非平衡状態、特に、エネルギー流のある定常状態をつくりたい。このような状況は、われわれが日常的に目にするものであるが、この状況を、数学的に実現するために、いろいろなアプローチが存在する。ここでは、以下のような設定を考える。温度の異なる、無限に広がった二



つの熱浴を用意し、図のように、物理系を、その二つの熱浴とつなげる。時間が十分経ったあと、系は、何らかの定常状態へと収束するだろう。熱浴が無限であるために、それらの温度の違いは流れをうみだす。すなわち、定常状態において、温度の高い方から低い方へと流れていくエネルギー流が存在する。(実際に、後になってかんがえる free Fermion model においては、この定常状態について 0 でないエネルギー流が存在する。さらに、バリスティック系と呼ばれる系の輸送現象についての実験結果は、この枠組みで説明することができる。)

このような動機付けから、以下のように非平衡定常状態を定義する。

定義 2 (NESS[R],[JP1],[JP2]) $(\mathcal{O},\alpha)$ を C^* 力学系, ω_0 を $\mathcal{O}$ の初期状態とする。この時、

$$\frac{1}{T}\int_0^T \omega_0 \circ \tau_t dt$$

の $T \to \infty$ での *weak**-位相での集積点の集合 $\Sigma_\alpha(\omega)$ を、ω_0, α からつくられる非平衡定常状態（*Non-Equilibrium Steady StatesNESS*）という。

$\mathcal{O}$ が 1 を持つとき、$\Sigma_\alpha(\omega)$ は空でなく、その元は α-不変である。

2 Macroscopic Instability

巨視的同値性を、以下のように定義する。

定義 3 *UHF algebra* に対して、状態 ω と η が *quasi-equivalent* であるとき、それらは巨視的に同値であるという。

この解釈をもとに、状態の安定性を議論しよう。

まずは、時間発展に摂動を加えることを考える。$(\mathcal{O},\alpha)$ を C^*-力学系、ω を (α,β)-KMS state, $V = V^* \in \mathcal{O}$ とする。α の generator を δ とすると、

$\delta + i[V, \cdot]$ は strongly continuous one parameter group of automorphisms α_V

$$\alpha_t^V(A) \equiv \alpha_t(A) + \sum_{n \geq 1} i^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \left[\alpha_{t_n}(V), [\cdots, [\alpha_{t_1}(V), \alpha_t(A)]]\right].$$

を生成する。

このような摂動が加わったときに、系はどのようにふるまうのだろうか。もし、この摂動が加わった後、時間が無限経ったあとで、状態が、"高々巨視的に同値"な状態へとうつるのであれば、もとの状態は、この摂動に対し、巨視的に安定と考えることができる。

熱平衡状態の場合、この現象は、return to equilibrium とよばれる。特に、有限系が熱平衡状態にある場と有界な相互作用で接したという状況を考えよう。

まず、熱平衡状態は、以下のような安定性をもっていることが知られている。

定理 4 (KMS-状態の安定性 [A1],[A2]) ω が (α, β)-*KMS* 状態, $V = V^* \in \mathcal{O}$ とする。この時、*ω-normal* な (α_V, β)-*KMS* 状態 ω_V が存在する。

この定理から、はじめに独立であった有限系と熱平衡状態にある場を、時刻 0 で有界な相互作用でつなげた場合に、初期状態に対して normal な (α_V, β)-KMS 状態が存在する。有限系をつなげたときに、すべての normal な状態がこの状態に収束するならば、系が新しい熱平衡状態に収束するという、物理的に自然な現象が記述できる。

とくに、今、新しい熱平衡状態は normal なので、熱平衡状態が、相互作用によって、"わずかに"ずれた、ととることができて、これはわれわれが熱平衡状態を観測するときにみいだす安定性と解釈できる。

定義 5 (Return to equilibrium) $(\mathcal{O}, \alpha)$ を C^*-力学系とする。ω を (α, β)-*KMS* 状態とする。物理系が状態 ω に対してエルゴード平均の意味で *return to equilibrium* をしめすとは、任意の *ω-normal* な状態 η が時間が無限にたった後、ω に弱*収束する、即ち、

$$\frac{1}{T}\int_0^T \eta(\alpha_t(x))dt = \omega(x), \quad x \in \mathcal{O}$$

となることをいう。

このような考察から、巨視的不安定性を以下のように定義する。

定義 6 (Macroscopic Instability) $(\mathcal{O}_m, \alpha_m)$ を *UHF-algebra* からなる C^*-力学系、$(\mathcal{O}_s, \alpha_s)$ を *matrix algebra* で与えられる C^*-力学系とする。$\mathcal{O}_m$ の状態 ω_m が摂動 $V \in \mathcal{O}_s \otimes \mathcal{O}_m$ に対して巨視的に不安定であるとは、$\mathcal{O}_s$ の任意の状態 ω_s ついて、

$$\frac{1}{T}\int_0^T (\omega_s \otimes \omega_m) \circ \alpha_V$$

の集積点の集合 $\Sigma_{\alpha_V}(\omega_s \otimes \omega_m)$ が $\omega_s \otimes \omega_m$-*normal* な元をもたないことをいう。そのような V が存在するとき、ω_m は巨視的に不安定という。

Return to equilibrium, macroscopic instability どちらの問題も、Liouville operator とよばれる, GNS ヒルベルト空間上の作用素のスペクトル問題に帰着する。次の章でこのことを見よう。

3 Liouville Operator

$(\mathcal{O}, \alpha)$ を C^*-力学系, ω を $\mathcal{O}$ の状態、$(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$ を ω の GNS 表現とする。Ω が von Neumann 環 $\pi(\mathcal{O})''$ に対して cyclic かつ separating であるとする。Ω に対する natural positive cone を $\mathcal{P}$、modular conjugation を J とする。

この時

定理 7 任意の ω-*normal* 状態 η に対して,

$$\eta(x) = \langle \xi(\eta), \pi(x)\xi(\eta) \rangle \quad x \in \mathcal{O}$$

を満たす唯一の $\xi(\eta) \in \mathcal{P}$ が存在する。

さらに

定理 8 α が *von Neumann* 環 $\pi(\mathcal{O})''$ まで拡張されたとする。この時、*Standard Theory* により以下の性質を満たす *one parameter group of unitaries* $t \in \mathbb{R} \to U_t$ が存在する。

1. $U_t \pi(x) U_t^* = \pi(\alpha_t(x)), \quad x \in \mathcal{O};$
2. $U_t \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ *and* $U_t \xi(\eta) = \xi\left(\alpha^{-1*}(\eta)\right),$
   η : ω-*normal* 状態, $(\alpha^* \eta)(A) \equiv \eta(\alpha(A)).$
3. $[U(\alpha), J] = 0.$

さらに U_t が strongly continuous であったとする。この時、self-adjoint operator L により、

$$U_t = e^{itL}$$

と書ける。L を Liouville operator と呼ぶ。

さて、α-不変な ω-normal 状態と Liouville operator L の kernel とを関係つけよう。以下の命題が得られる。

Proposition 9 $\mathrm{Ker}L = \{0\}$ とすると、*ω-normal* な α-不変状態は存在しない。

証明
α-不変な ω-normal 状態 η があったとする。
この時、η は $\mathcal{P}$ の元 $\xi(\eta)$ で

$$\eta\,(x) = \langle \xi(\eta), \pi\,(x)\,\xi(\eta)\rangle\,, \quad x \in \mathcal{O},$$

のように与えられる。
次に、期待値 $\langle U_t^*\xi(\eta), \pi\,(x)\,U_t^*\xi(\eta)\rangle$ をかんがえると、U_t の定義から

$$\langle U_t^*\xi(\eta), \pi\,(x)\,U_t^*\xi(\eta)\rangle\,. = \eta \circ \alpha_t\,(x) \quad x \in \mathcal{O}.$$

今、η は α-不変なので、

$$\eta \circ \alpha_t\,(x) = \eta\,(x) = \langle \xi(\eta), \pi\,(x)\,\xi(\eta)\rangle\,, \quad x \in \mathcal{O}.$$

となる。
ここで、$\xi(\eta)$,$U_t^*\xi(\eta)$ いづれも $\mathcal{P}$ の元で、状態 η を与えていることがわかる。
η を与える $\mathcal{P}$ の元は唯一なので、

$$U_t^*\xi(\eta) = \xi(\eta),$$

となる。
Liouvile operator の言葉で書くと、これは、

$$\xi(\eta) \in \mathrm{Ker}L$$

を意味する。

$\Sigma_\alpha(\omega)$ の元は、α-不変より、ω の巨視的不安定性をいうには、$\mathrm{ker}\,L = 0$ をいえばいいことがわかる。

Return to equilibrium も Liouville operator のスペクトルをみることで、いえる。

Proposition 10 ([BFS1]) $(\mathcal{O},\alpha)$ を C^*-力学系、ω を (α,β)-*KMS* 状態、$(\mathcal{H},\pi,\Omega)$ を ω の *GNS* 表現とする。α に対する *Liouville operator* L が、Ω に対応する *simple eigen value* 0 を持ち L の残りのスペクトルは全て連続スペクトルであるとしよう。このとき、系は、*return to equilibrium* を示す。すなわち、任意の ω-*normal* 状態 η について、

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \eta(\alpha(A))dt = \omega(A), \quad A\in\mathcal{O}.$$

証明
Liouville operator L のスペクトルの連続性から、

$$w-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T e^{itL}dt = |\Omega\rangle\langle\Omega|.$$

任意の η は analytic element $b,c\in\mathcal{O}$ で $\omega(b^*\cdot c)$ とノルム近似されるので、$\eta=\omega(b^*\cdot c)$ について示せばよい。KMS 条件から、

$$\begin{aligned}&\omega(b^*\alpha_t(a)c)=\omega(\alpha_{-i\beta}(c)b^*\alpha_t(a))=\langle\pi(b)\pi(\alpha_{i\beta}(c^*))\Omega,\pi(\alpha_t(a))\Omega\rangle\\&=\langle\pi(b)\pi(\alpha_{i\beta}(c^*))\Omega,e^{itL}\pi(a)\Omega\rangle\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\int_0^T \eta(\alpha_t(a))=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\langle\pi(b)\pi(\alpha_{i\beta}(c^*))\Omega,e^{itL}\pi(a)\Omega\rangle\\&=\omega(\alpha_{-i\beta}(c)b^*)\omega(a)=\omega(b^*c)\omega(a)=\omega(a).\end{aligned}$$

analytic elements は dense in $\mathcal{O}$ より、定理が得られる。□

4 Model

次にモデルを導入しよう。以下では、1 次元 lattice Fermion model をかんがえる。1 次元 lattice Fermion model は、ヒルベルト空間 $\mathfrak{h}=l^2(\mathbb{Z})$ 上の CAR-algebra (canonical anti-commutation relation) で記述される。CAR-algebra は、1 と、生成、消滅演算子 $a(f)^*,a(f)$ という、以下を満たす元によって生成される C^*-algebra である：

$$\begin{aligned}&f\in\mathfrak{h}\to a(f)\in\mathcal{A} \quad \text{: antilinear}\\&\{a(f),a(g)\}=0\\&\{a(f),a^*(g)\}=\langle f,g\rangle\cdot 1\end{aligned}$$

後のために、左右それぞれの格子上にある Fermion をあらわす CAR-algebra も導入しておく。それぞれ、

$\mathcal{A}_L$: CAR-algebra over $l^2(\mathbb{Z}_-)$
$\mathcal{A}_R$: CAR-algebra over $l^2(\mathbb{Z}_+)$

で与えられる。

次に、時間発展を導入する。時間発展は、quasi-free automorphism によって与えられる。両側に伸びた格子についての時間発展 $\tau \in Aut(\mathcal{A})$ は、

$$\tau_t(a(f)) = a\left(\mathrm{e}^{ith} f\right)$$

である。ここで、h は、格子上のラプラシアンであり、フーリエ表示では

$$\widehat{hf}(k) = \cos k \cdot \hat{f}(k).$$

とあらわされる。この時間発展は、形式的には以下のハミルトニアンに対応する。

$$H = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[a_{n+1}^* a_n + a_n^* a_{n+1}\right]$$

0 点を境に、左右の格子が独立に時間発展している場合は、左右それぞれの時間発展 τ^L, τ^R は、

$$\tau_t^L(a(f)) = a\left(\mathrm{e}^{ith_L} f\right), \qquad h_L = p_L h p_L, \quad f \in P_L \mathfrak{h}$$
$$\tau_t^R(a(f)) = a\left(\mathrm{e}^{ith_R} f\right), \qquad h_R = p_R h p_R, \quad f \in P_R \mathfrak{h}$$

となる。ここで、p_L は $\mathbb{Z}_-$, p_R は $\mathbb{Z}_+$ への射影である。それぞれ、以下のハミルトニアンに対応している。

$$\begin{aligned} H_L &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{n=-\infty}^{0}\left[a_{n+1}^* a_n + a_n^* a_{n+1}\right] \\ H_R &= \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{n+1}^* a_n + a_n^* a_{n+1}\right] \end{aligned}$$

さて、このモデルの NESS を導入しよう。左側が逆温度 β_L の熱平衡状態、右側が逆温度 β_R の熱平衡状態にあるような状況を、初期状態とする。これは、

$$\omega_0(x_L x_R) = \omega_L(x_L)\omega_R(x_R) \quad x_L \in \mathcal{A}_L, x_R \in \mathcal{A}_R$$

ω_R : unique (τ_R, β_R)-KMS state on $\mathcal{A}_R$
ω_L : unique (τ_L, β_L)-KMS state on $\mathcal{A}_L$

であたえられる。

この初期状態 ω_0 と、時間発展 τ にたいする NESS は、Dirren 98, Ho Araki 00, Aschbacher Pillet 02 [HA], [AP] において独立に求められた。NESS は、唯一点からなる。

$$\Sigma_\tau(\omega_0) = \{\omega_{\beta_L,\beta_R}\}$$

ここで、ω_{β_L,β_R} は quasi-free state である。

$$\omega_{\beta_L,\beta_R}(a(f_n)^* \cdots a(f_1)^* a(g_1) \cdots a(g_m)) = \delta_{nm} \det(\langle f_i, \rho g_j \rangle),$$

ρ は、フーリエ表示で、掛け算作用素

$$\rho(k) = \begin{cases} \left(1 + e^{\beta_L \cos k}\right)^{-1} & k \in [0, \pi) \\ \left(1 + e^{\beta_R \cos k}\right)^{-1} & k \in [-\pi, 0) \end{cases},$$

であたえられる。

こうして与えられた NESS について、これが、外部の有限系と作用した場合の、安定性を調べよう。

まず、外部の有限系を導入する。$\mathfrak{H}_S$ を有限 d 次元ヒルベルト空間とする。有限系を記述する C^*-algebra を $\mathcal{A}_S = B(\mathfrak{H}_S)$ で与える。

時間発展は、ハミルトニアン $H_S = H_S^* \in \mathcal{A}_S$ により、

$$\tau_t^S(x) = \mathrm{e}^{itH_S} x \mathrm{e}^{-itH_S}, \quad x \in \mathcal{A}_S.$$

で記述する。こうして、有限系は、C^*-力学系 $(\tau_S, \mathcal{A}_S)$ で与えられる。

今、有限系と、lattice Fermion の間の以下のような相互作用をかんがえる。

$$V = \lambda Y \otimes (a(f) + a^*(f)) \in \mathcal{A}_S \otimes \mathcal{A}$$

ここで、$Y = Y^* \in \mathcal{A}_S$ で、λ は coupling constant とよばれる実数、f は form factor とよばれる $\mathfrak{h}$ の元である。この摂動を受けた時間発展に対し、

$\omega_S \otimes \omega_{\beta_L,\beta_R}$ が巨視的に同値な状態へと移りうるか否かが問題である。

3章で述べたように、この問題は、Liouville operator のスペクトル問題に帰着する。そこで、次に、この状態についての、modlar structure についてかんがえる。

そのための準備として、Fermi Fock 空間周辺の概念を導入する。$\mathcal{K}$ を ヒルベルト空間とする。$k \geq 1$ に対して、$\mathcal{K}$ の k-重反対称テンソル積を $\wedge^k \mathcal{K}$ とあらわす。また、真空を $\wedge^0 \mathcal{K} = \mathbb{C}$ であたえる。$\mathcal{K}$ についての Fermi Fock 空間とは、直和

$$\mathcal{F}(\mathcal{K}) = \oplus_{k=0}^{\infty} \wedge^k \mathcal{K}$$

で与えられるヒルベルト空間のことである。

次に第二量子化を導入する。$\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素 u に対して、$u_{\wedge^k \mathcal{K}} = \otimes^k u|_{\wedge^k \mathcal{K}}$ とする。u の第二量子化 $\Gamma(u)$ は、この直和

$$\Gamma(u) = \oplus_{k=0}^{\infty} u_{\wedge^k \mathcal{K}}$$

であたえられる。さらに、T を $\mathcal{K}$ 上の self-adjoint operator とする。T の第二量子化 $d\Gamma(T)$ とは、one parameter group $\Gamma(e^{isT})$ の生成子を指す。

以上の準備の下、$\omega_S \otimes \omega_{\beta_L,\beta_R}$ の modular structure は、以下のように与えられる。

Proposition 11
ω_S : *faithful state over* $\mathcal{A}_S$
$(\mathcal{H}, \pi, \Omega)$: *GNS triple w.r.t* $\omega = \omega_S \otimes \omega_{\beta_L,\beta_R}$ とすると

1. $\mathcal{H} = (\mathfrak{H}_S \otimes \mathfrak{H}_S) \otimes \mathcal{F}(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h})$
2. Ω : *cyclic and separating vector for* $\pi(\mathcal{O})''$
3. α_t は $\pi(\mathcal{O})''$ に拡張され、*Liouville Operator* L で与えられる。ここで L は

$$\begin{aligned} L = &(H_S \otimes 1) \otimes 1 - (1 \otimes H_S) \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma\left(h \oplus -h,\right) \\ &+ \lambda\left(\Upsilon \otimes 1\right) \otimes \left(a\left(g_1\right) + a^*\left(g_1\right)\right) \\ &- \lambda\left(1 \otimes \bar{\Upsilon}\right) \otimes (-1)^N \left(a\left(g_2\right) - a^*\left(g_2\right)\right), \end{aligned}$$

where

$$
\begin{aligned}
g_1 &= (1-\rho)^{\frac{1}{2}} f + \rho^{\frac{1}{2}} \bar{f}, \\
g_2 &= \rho^{\frac{1}{2}} f + (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \bar{f}, \\
N &= \Gamma(1 \oplus 1)
\end{aligned}
$$

安定性を調べるには、この L のスペクトルを調べればよい。

以下が、本稿の主定理である。まず、L のスペクトルについては、

定理 12
$\beta_L \neq \beta_R$ に対して, *form factor* f, 及び有限系のハミルトニアン H_S をうまく取ることにより、$\mathrm{Ker}L = \{0\}$ と出来る。一方、$\beta_R = \beta_L$ の時は、f, H_S のいかなる取り方に対しても $\mathrm{Ker}L$ は非自明な *1* 次元以上の *subspace* である。このとき、f, H_S を $\beta_L \neq \beta_R$ の場合と同様にとると、L は 0 を *simple eigenvalue* としてもち、それ以外のスペクトルは連続になる。

第 3 章の定理より、L についてのこの結果から、以下のことがいえる。

定理 13
ω_{β_L,β_R} は、$\beta_L \neq \beta_R$ の時 *macroscopically unstable* である。

定理 14
f, H_S をうまくとると熱平衡状態 $\omega_{\beta,\beta}$ にたいし系は、*return to equilibrium* を示す。

例えば、以下の場合に上の定理はなりたつ。

$\mathfrak{H}_S = \mathbb{C}^2,$
$H_S = b\sigma_z \quad 0 < b < \frac{1}{4}, \quad Y = \sigma_x.$

$f \in C^\infty([-\pi,\pi)), f(\arccos(\pm 2b)), f(\arccos(\pm 4b)) \neq 0,$
$\mathit{supp} f \subset \Lambda_v$

$\Lambda_v = \{k \in [-\pi,\pi)\ ;\ \sin^2 k \geq v\}.$
$0 < v < 1, \quad 4b < \sqrt{1-v^2}$

5 Proof

証明には、Positive Commutator (PC) Method とよばれる方法を用いる。

self-adjoint operator L にたいして、L が $\Delta \subset \mathbb{R}$ に固有値を持つか否かを知りたいとする。E_Δ を spectral projection of L onto Δ としよう。今、

A : anti-self-adjoint operator

$\alpha > 0$

で、

$$E_\Delta[L, A]E_\Delta \geq \alpha E_\Delta$$

を満たすようなものが存在したとする。

このとき、ψ : 固有値 $e \in \Delta$ をもつ L の固有ベクトルが存在したとすると、

$$0 = \langle \psi, E_\Delta[L, A]E_\Delta\psi \rangle \geq \alpha\|\psi\|^2$$

となり、矛盾をきたす。この議論から、この区間 Δ に固有ベクトルはないことがいえるのである。(もちろん、実際には、operator の domain 問題をかんがえなくてはいけないが。) この手法が、Positive Commutator Method とよばれる。

今の L にたいして、Positive Commutator を構成することをかんがえる。まず、変数変換 $t = \tan\frac{k}{2}$ によって、$\mathfrak{h}$ は以下のヒルベルト空間と同一視される。

$$\mathfrak{h} = l^2(\mathbb{Z}) = L^2([-\pi, \pi), dk) = L^2(\mathbb{R}, d\mu), \quad d\mu = \frac{2}{t^2+1}dt$$

この同一視の下、以下のような Rescaling Group を導入する。

$$(u(\theta)g)(t) \equiv e^{\frac{\theta}{2}}\sqrt{\frac{t^2+1}{e^{2\theta}t^2+1}}\,g\left(e^{\theta}t\right).$$

これは、strongly continuous one parameter group of unitaries となる。その generator を p とかく。この p をもちいて、anti-selfadjoint operator

$$A_0 \equiv 1 \otimes d\Gamma(ip \oplus -ip)$$

を導入しよう。この operator と、$1 \otimes d\Gamma(h \oplus -h)$ との交換子は、

$$\begin{aligned}&[1 \otimes d\Gamma(h \oplus -h), A_0] = 1 \otimes d\Gamma([h \oplus -h, ip \oplus -ip])\\ &= 1 \otimes d\Gamma(s_1 \oplus s_1) \geq 0\end{aligned}$$

where

$$s_1(t) = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = \sin^2 k$$

のように positive となる。しかし、ここで、右辺は strictly positive ではない。従って、補正が必要である。

補正を行うためには、交換子がスペクトルギャップを持つことが必要である。上に見たように、$d\Gamma(s_1 \oplus s_1)$ はそれをもたない。しかし、もし、L の固有ベクトルは全てある部分ヒルベルト空間 $P\mathcal{H}$ に存在し、$P\mathcal{H}$ においては、交換子がスペクトルギャップをもつのであれば、それで十分である。そのため、form factor f に以下のような条件を課す。

$$suppf \subset \Lambda_v$$

Λ_v についての $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ の分解を

$$\begin{aligned}
\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h} &= L^2(\mathbb{R}, d\mu) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu) = \mathfrak{h}_{\Lambda_v} \oplus \mathfrak{h}_{\Lambda_v^c} \\
\mathfrak{h}_{\Lambda_v} &= L^2(\Lambda_v, d\mu) \oplus L^2(\Lambda_v, d\mu) \\
\mathfrak{h}_{\Lambda_v^c} &= L^2(\Lambda_v^c, d\mu) \oplus L^2(\Lambda_v^c, d\mu)
\end{aligned}$$

とする。この分解に対して、$N_{\Lambda_v}, N_{\lambda_v^c}$ を

$$N_{\Lambda_v} \equiv 1 \otimes \mathrm{d}\Gamma(1_{\Lambda_v} \oplus 0), \quad N_{\Lambda_v^c} \equiv 1 \otimes \mathrm{d}\Gamma(0 \oplus 1_{\Lambda_v^c}),$$

で定義する。以下の lemma が成立する。

Lemma 15 $suppf \subset \Lambda_v$ のとき L の任意の固有ベクトル ψ は、

$$P(N_{\Lambda_v^c} = 0)\psi = \psi.$$

ここで、$P(N_{\Lambda_v^c} = 0)(1 \otimes d\Gamma(s_1 \oplus s_1))P(N_{\Lambda_v^c} = 0)$ はスペクトルギャップ v を持つ。従って、$P(N_{\Lambda_v^c} = 0)\mathcal{H}$ で Strictly Positive になるような Commutator をつくればよい。

証明は、Feshbach map theorem [BFS1] や M.Merkli によって最近導入された手法 [M] を用いて行われる。ここでは、詳細には立ち入らず、strictly positive になる、ということだけを述べる。以下の notation を用いる。

$$\begin{aligned}
&L_0 = L_S + L_f, \\
&L_S = (H_S \otimes 1) \otimes 1 - (1 \otimes H_S) \otimes 1, \\
&L_f = 1 \otimes d\Gamma\,(h \oplus -h) \\
&I_0 = (\Upsilon \otimes 1) \otimes (a\,(g_1) + a^*\,(g_1)) - \left(1 \otimes \bar{\Upsilon}\right) \otimes (-1)^N\,(a\,(g_2) - a^*\,(g_2))\,.
\end{aligned}$$

$\Delta \subset \mathbb{R}$ を L_S の固有値を唯一つ含むような区間とする。Projection $Q = P(L_S = e) \otimes P(N = 0)$, $\bar{Q} = 1 - Q$, $P = P(N_{\Lambda_r^c} = 0)$ と定める。Q による $\mathcal{H}$ の分解 $\mathcal{H} = \bar{Q}\mathcal{H} \oplus Q\mathcal{H}$ について、$\mathcal{H}$ 上の作用素を

$$B = \begin{pmatrix} \bar{Q}B\bar{Q} & \bar{Q}BQ \\ QB\bar{Q} & QBQ \end{pmatrix}$$

のようにあらわす。先に述べたように、ψ を L の固有ベクトルとすると、$P\psi = \psi$ なので、

$$PE_\Delta[L, A]E_\Delta P \geq \alpha PE_\Delta \begin{pmatrix} \bar{Q} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

なるような A を求めればいい。以下の議論では、次の不等式を用いる。

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda x \\ \lambda x^* & 0 \end{pmatrix} \geq - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 x^* x \end{pmatrix}$$

まず、L と A_0 の交換子は、以下の交換関係をみたす。

$$PE_\Delta[L, A_0]E_\Delta P \geq PE_\Delta \begin{pmatrix} v\bar{Q} & \lambda\bar{Q}I_1Q \\ \lambda QI_1\bar{Q} & 0 \end{pmatrix} E_\Delta P$$

これに対して補正項を加え、strictly positive commutator をつくる。補正項として、

$$b = b(e) = \theta\lambda(\bar{Q}R_\epsilon^2 I_0 Q - QI_0R_\epsilon^2\bar{Q}),$$

を加える。ここで

$$R_\epsilon = R_\epsilon(e) = \left((L_0 - e)^2 + \epsilon^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

であり、ϵ, θ は パラメーターである。ここで、$\lambda \ll 1$ とし、ϵ, θ を λ にあわせて小さくとると、

$$PE_\Delta[L, A_0 + b]E_\Delta P \geq \frac{1}{2} PE_\Delta \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & \lambda^{\frac{182}{100}}\Gamma(e) \end{pmatrix} E_\Delta P$$

となる。ここで、$\Gamma(e)$ は $P(L_S = e)(\mathfrak{H}_S \otimes \mathfrak{H}_S)$ 上の作用素で、

$$\begin{aligned} \Gamma(e) \equiv & \int_{-\pi}^{\pi} dk\, m(k,1)^* P(L_S \neq e)\, \delta(\cos k + L_S - e)\, m(k,1) \\ & + \int_{-\pi}^{\pi} dk\, m(k,2)^* P(L_S \neq e)\, \delta(-\cos k + L_S - e)\, m(k,2) \end{aligned}$$

$$m(k,i) \equiv \Upsilon \otimes 1 \cdot g_1^i(k) - 1 \otimes \bar{\Upsilon} \cdot g_2^i(k) \quad i = 1, 2.$$

$$g_1^1 = (1-\rho)^{\frac{1}{2}} f, \quad g_1^2 = \rho^{\frac{1}{2}} \bar{f}, \quad g_2^1 = \rho^{\frac{1}{2}} f, \quad g_2^2 = (1-\rho)^{\frac{1}{2}} \bar{f}.$$

で与えられる。Form factor f が良い support をもち, Hamiltonian H_S が縮退していないとき、$\beta_L \neq \beta_R$ については、任意の $e \in \mathbb{R}$ にたいし、$\Gamma(e) > 0$. $\beta_L = \beta_R$ に対しては $e \neq 0$ にたいし、$\Gamma(e) > 0$ で、$\Gamma(0)$ は1次元の kernel をもつ。こうして、Strictly Positive Commutator がつくられ、定理がしめされた。□

References

[A1] H. Araki: *Relative Hamiltonian for faithful normal states of a von Neumann algebra*, Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ. **9** 165-209 (1973).

[A2] H. Araki: *Positive cone, Radon-Nikodym theorems, relative Hamiltonians and the Gibbs condition in statistical mechanics* C*-Algebras and their Applications to Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, edited by D. Kastler (Editrice Compositori, Bologna, 1975).

[AP] W.H. Aschbacher C.A. Pillet , *Non-Equilibrium Steady States of the XY Chain* mp-arc /02-459 ,(2002).

[HA] T.G.Ho,andH.Araki, *Asymptotic time evolution of a partitioned infinite two-sided isotropic XY-chain* Proc.SteklovInst.Math,**228** 191-204 (2000).

[BFS1] V.Bach, J.Fröhlich and I.M.Sigal, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles. Adv. Math. **137** no. 2, 299 395 (1998)

[BFS2] V.Bach, J.Fröhlich, I.M.Sigal, *Return to equilibrium*. J. Math. Phys. **41** no. 6. 3985-4060 (2000).

[JP1] V.Jakšić and C.A.Pillet, *Non-equilibrium steady states of finite quantum systems coupled to thermal reservoirs.* Commun. Math. Phys. **226** no.1, 131-162,(2002)

[JP2] V.Jakšić and C.A.Pillet, *Mathematical theory of non-equilibrium quantum statistical mechanics.* J. Statist. Phys. 108 (2002), no. 5-6, 787-829

[M] M.Merkli,*Positive commutators in non-equilibrium quantum statistical mechanics* Commun. Math.Phys.**223** 327-362. (2001)

[O] Y.Ogata *The Stability of the Non-Equilibrium Steady States* To appear in Commun. Math.Phys.

[R] D.Ruelle,*Natural nonequilibrium states in quantum statistical mechanics.* J.Stat.Phys. **98**,57–75,(2000)