数理解析研究所講究録 第2091巻 2018年 55-64

Objective priors via moment matching criterion for non-regular models

広島大学・理学研究科　橋本真太郎 (Shintaro Hashimoto)
(Department of Mathematics, Hiroshima University)

1　はじめに

ベイズ推測における客観事前分布に関する研究は，Laplace による一様事前分布から始まり，Jeffreys の無情報事前分布，Bernardo (1979) の refernce prior など，これまで様々な客観事前分布が提案されてきた．客観事前分布に基づいてベイズ推測を行う枠組みはしばしば客観ベイズ法とよばれ，ベイズ推測について頻度論の立場からも (正確にもしくは近似的に) 正当化することができるということから現代のベイズ統計学において主流になりつつある方法である．代表的な客観事前分布として，上記にあげたもの以外に確率一致事前分布 (probability matching prior) があり，これはその事前分布のもとである領域の事後確率と，被覆確率とが正確にもしくは近似的に一致するような事前分布のことである．この確率一致事前分布に対しては，様々なタイプのパラメータ領域について非正則な場合も含め研究されてきている (Welch and Peers (1963), Tibshirani (1989), Ghosal (1999), Datta and Mukerjee (2004))．

最近，Ghosh and Liu (2011) は二乗損失関数のもとでのベイズ推定量 (事後平均) と最尤推定量 (MLE) が高次のオーダーまで漸近的に一致するような事前分布である積率一致事前分布 (moment matching prior，以下ではこの英語表記を用いる) を提案し，彼らは正則な確率分布に対する moment matching prior を導出し，その性質を議論した．本稿では，正則条件の満たされないような非正則な確率分布族に対する moment matching prior を導出し，非正則な場合のベイズ推測における事前分布の選択に関する一つの指針を与える．

本稿で扱う非正則な確率分布とは，密度関数の台が未知母数に依存するような確率分布のことである．従来の多くの客観事前分布は，確率分布の「正則性」に強く依存しており，このような非正則なモデルに対しては適用できない．例えば，経済学におけるオークションモデルでは，条件付き密度がある時点でジャンプをもち，そのジャンプの位置がパラメータに関する多くの情報をもつ．そこで，その位置を推定するという問題はまさに非正則な問題となる．このような非正則モデルにおいては，MLE の一致性のオーダーは n

であり，漸近正規性も成立しないなどの正則な場合とは異なる事態が起こる．また，場合によっては MLE が一意に定まらないことすらある．一方で，ベイズ推定量は積分の形を許せば明示的に表すことができるという利点があるため，非正則なモデルに対してベイズ法を用いることは，このような問題の一つの解決策となることが期待される．

2　非正則な確率分布に対する事後分布の漸近展開

$X_1, \dots, X_n$ を互いに独立に，いずれも (Lebesgue 測度に関する) 密度関数 $f(x;\theta)$ $(\theta \in \Theta)$ をもつ確率変数列とする．ただし，任意の $\theta \in \Theta$ に対して，$f(x;\theta)$ は未知母数 θ に依存する閉区間 $S(\theta) := [a_1(\theta), a_2(\theta)]$ において正値で，$S(\theta)$ の外側では値 0 をとるとし，区間の端点のうちの 1 つは θ に無関係あるいは $\pm\infty$ であってもよいとする．また，$S(\theta)$ は θ に関して単調であると仮定し，特に単調減少であるとしても一般性を失わないため，以後 $S(\theta)$ は θ に関して単調減少であると仮定する．ただし，台の端点 $a_1(\theta), a_2(\theta)$ は θ に関して微分可能とし，密度関数 $f(x;\theta)$ も θ に関して 3 回連続微分可能であるとする．また，θ の事前密度を $\pi(\theta)$ とし，2 回微分可能であるとする．さらに，$\boldsymbol{X} := (X_1, \dots, X_n)$ を与えたときの θ の事後分布の漸近展開の妥当性を保証するような条件が成り立つとする (例えば，Ghosal and Samanta (1997), Ghosal (1999))．θ の一致推定量として $\hat{\theta}_n = \min\{a_1^{-1}(X_{(1)}), a_2^{-1}(X_{(n)})\}$ を考える．ただし，$X_{(1)} = \min_{1 \le i \le n} X_i$, $X_{(n)} = \max_{1 \le i \le n} X_i$ とし，$\hat{\theta}_n - \theta = O_p(n^{-1})$ $(n \to \infty)$ であることに注意する．さらに，

$$\sigma := n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X_i; \hat{\theta}_n)$$

とおくと，$\sigma - c(\theta) = O_p(n^{-1})$ $(n \to \infty)$ が成り立つ．ただし，$0 < c(\theta) = E\{(\partial/\partial\theta) \log f(X_i;\theta)\} < \infty$ である．このとき $\boldsymbol{X}$ を与えたもとでの $u = n\sigma(\theta - \hat{\theta}_n)$ の事後密度は次のように展開される (Ghosal and Samanta (1997))：

$$\pi(u \mid \boldsymbol{X}) = e^u \left[1 + n^{-1} \left\{ \frac{\pi'(\hat{\theta}_n)}{\sigma\pi(\hat{\theta}_n)}(u+1) + \frac{c_2}{\sigma^2}(u^2 - 2) \right\} + O_p(n^{-2}) \right] \quad (u < 0).$$

ただし，

$$c_2 = (2n)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X_i; \hat{\theta}_n)$$

とする．

3 Moment matching prior

本節では，θ に関する moment matching prior の導出を行う．正則な場合には，Ghosh and Liu (2011) により導出されており，それは一般には Jeffreys の事前分布とは異なるという興味深い結果が得られている反面，その事前分布は母数の一対一変換に関する不変性をもたないことが示されている．

まず，非正則な場合のベイズ推定量とバイアス補正 MLE に関して，次の定理が得られる．

定理 1. $\hat{\theta}_{n,\pi}^B$ を事前密度 $\pi(\theta)$ に関する二乗損失のもとでの θ のベイズ推定量 (事後平均) とし，$\hat{\theta}_n^* = \hat{\theta}_n - (1/\sigma n)$ を θ のバイアス補正 MLE とする．適当な条件のもとで，$\hat{\theta}_{n,\pi}^B$ と $\hat{\theta}_n^*$ の間の二次の漸近的な差異は

$$\hat{\theta}_{n,\pi}^B - \hat{\theta}_n^* = n^{-2}\left\{\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{\pi'(\hat{\theta}_n)}{\pi(\hat{\theta}_n)} - \frac{4c_2}{\sigma}\right)\right\} + O_p(n^{-3}) \quad (n \to \infty)$$

で与えられる．

定理の証明は，変数変換と指数分布のモーメントを用いることにより簡単に行えるので省略する．いま，大数の法則と MLE の一致性により

$$n^2(\hat{\theta}_{n,\pi}^B - \hat{\theta}_n^*) \xrightarrow{p} \frac{1}{c(\theta)^2}\left(\frac{\pi'(\theta)}{\pi(\theta)} - \frac{2d(\theta)}{c(\theta)}\right) \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．ここで，$d(\theta) = E\{(\partial^2/\partial\theta^2)\log f(X_i;\theta)\} < \infty$ とする．θ の moment matching prior はこの漸近的な差異を 0 にするような事前分布のことであり，$\pi(\theta)$ を

$$\pi(\theta) = \exp\left\{2\int^{\theta}\frac{d(t)}{c(t)}\mathrm{d}t\right\}$$

のように選ぶと，これは $\hat{\theta}_{n,\pi}^B - \hat{\theta}_n^* = O_p(n^{-3})$ が成り立つような事前分布となる．つまり，この事前分布から導かれるベイズ推定量は 2 次のオーダーまでバイアス補正 MLE と漸近的に同等な性質を有する．これを $\pi_M(\theta)$ とかき，θ の moment matching prior とよぶ．$\pi_M(\theta)$ のパラメータの一対一変換に関して次の定理が成り立つ．

定理 2. η を θ の一対一変換とするとき，次が成り立つ：

$$\pi_M^*(\eta) = \pi_M(\theta)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\eta}\right)^2.$$

つまり，moment matching prior $\pi_M(\theta)$ はパラメータの一対一変換に関して不変性をもたない．なお，Ghosh and Liu (2011) による正則な確率分布に対する moment matching prior も同様に不変性が成り立たないことが示されている．

また，$d(\theta) = c'(\theta)/2$ のとき，これは非正則な場合の無情報事前分布 $\pi(\theta) \propto c(\theta)$ に一致し，$d(\theta) = 0$ のとき一様事前分布に一致する．この事前分布を用いることにより，ベイズ法と頻度論の統合 (Bayesian-frequentist synthesis) を達成することができる．また，興味のある母数のベイズ事後信用区間を事後平均と事後分散のみで構成でき，それは MLE に基づく信頼区間と高次のオーダーで一致する．

例 1 (Location family)．f_0 を $[0, \infty)$ 上の密度関数とし，位置母数分布族 $f(x;\theta) = f_0(x-\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を考える．このとき，$c(\theta) = f_0(0+)$, $d(\theta) = \iota_1$ が成り立つ．ただし，$\iota_1 = \int_0^\infty \{f_0''(t) - (f_0'(t)^2/f_0(t))\mathrm{d}t\}$ は θ に無関係な定数である．よって，θ の moment matching prior は

$$\pi_M(\theta) \propto \exp(\theta^{2\tau_1})$$

で与えられる．ここで，$\tau_1 = \iota_1/f_0(0+)$ である．特に，密度関数 $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)}$ $(x > \theta)$ をもつ指数分布はこの分布族に属し，$\tau_1 = 0$ となるので $\pi_M(\theta) \propto \mathrm{constant}$ となり，これは一様事前分布である．

例 2 (Scale family)．f_0 を $[0, 1]$ 上の密度関数とし，尺度母数分布族 $f(x;\theta) = \theta^{-1} f_0(x/\theta)$ $(\theta > 0)$ を考える．このとき，$c(\theta) = -\iota_2/\theta$, $d(\theta) = \iota_3/\theta^2$ が成り立つ．ただし，ι_2 と ι_3 は θ に無関係な定数である．よって，θ の moment matching prior は

$$\pi_M(\theta) \propto \exp\{(\log\theta)^{-2\tau_2}\} = \theta^{-2\tau_2}$$

で与えられる．ここで，$\tau_2 = \iota_3/\iota_2$ である．特に，一様分布 $U(0, \theta)$ $(\theta > 0)$ はこの分布族に属し，$\tau_2 = 1$ となる．この場合，$\pi_M(\theta) \propto \theta^{-2}$ となる．

例 3 (Truncation family)．$g(x)$ を $(0, \infty)$ 上の密度関数とし，切断分布族 $f(x;\theta) = g(x)/\bar{G}(\theta)$ $(x > \theta > 0)$ を考える．ただし，$\bar{G}(\theta) = \int_\theta^\infty g(t)\mathrm{d}t$ とおく．このとき

$$c(\theta) = \frac{g(\theta)}{\bar{G}(\theta)}, \quad d(\theta) = \frac{g'(\theta)}{\bar{G}(\theta)} - \frac{g(\theta)\bar{G}'(\theta)}{\bar{G}(\theta)^2}$$

が成り立つので，θ の moment matching prior は

$$\pi_M(\theta) = \exp\left\{2\int\left(\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} - \frac{\bar{G}'(\theta)}{\bar{G}(\theta)}\right)\mathrm{d}\theta\right\} \propto \exp\left\{2\log\left(\frac{g(\theta)}{\bar{G}(\theta)}\right)\right\} = \left(\frac{g(\theta)}{\bar{G}(\theta)}\right)^2$$

で与えられる．先の例でも述べた指数分布は $g(x)=e^{-x}$ のときであり，moment matching prior は例 1 と同様に

$$\pi_M(\theta) \propto \left(\frac{g(\theta)}{\bar{G}(\theta)}\right)^2 = \left(\frac{e^{-\theta}}{\int_\theta^\infty e^{-t}\mathrm{d}t}\right)^2 = 1$$

となる．また，$g(x)=\phi(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ とおくと，これは下側切断正規分布になり moment matching prior は

$$\pi_M(\theta) \propto \left(\frac{g(\theta)}{\bar{G}(\theta)}\right)^2 = \left(\frac{\phi(\theta)}{\int_\theta^\infty \phi(t)\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\phi(\theta)}{1-\Phi(\theta)}\right)^2$$

となる．ただし，$\Phi(x)=\int_{-\infty}^x \phi(t)\mathrm{d}t$ とする．

4　局外母数が存在する場合

前節のパラメトリックモデル $\{f(x;\theta) \mid \theta \in \Theta\}$ に，パラメータ $\psi \in \Phi$ を追加したパラメトリックモデル $\{f(x;\theta,\psi) \mid \theta \in \Theta, \psi \in \Psi\}$ を考える．ただし，θ は非正則性を表すパラメータとし，ψ は正則なパラメータとする．つまり，密度関数の台は θ にのみ依存し，ψ には無関係である．ψ は簡単のため 1 次元とするが ψ がベクトル値の場合にも容易に拡張できる．$\pi(\theta,\psi)$ を (θ,ψ) の同時事前密度とし，θ と ψ に関して適当な回数の微分可能性を仮定する．$f(x;\theta,\psi)$ についても同様に θ と ψ に関する適当な回数の微分可能性を仮定する．いま，$\hat{\psi}_n$ を修正尤度方程式

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\psi}\log f(X_i;\hat{\theta}_n,\hat{\psi}_n)=0$$

の解として定義し，$(\hat{\theta}_n,\hat{\psi}_n)$ が (θ,ψ) の一致推定量である場合を考える．また，

$$\sigma = n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X_i;\hat{\theta}_n,\hat{\psi}_n), \quad b^2 = -n^{-1}\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\log f(X_i;\hat{\theta}_n,\hat{\psi}_n)$$

とおくと，$\sigma \to c(\theta,\psi)$ $(n\to\infty)$，$b^2 \to \lambda^2(\theta,\psi)$ $(n\to\infty)$ が成り立つことに注意する．ただし，

$$c(\theta,\psi)=E\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(X;\theta,\psi)\right\}, \quad \lambda^2(\theta,\psi)=E\left\{-\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\log f(X;\theta,\psi)\right\}$$

とする．前節と同様, 密度関数の台 $S(\theta)$ は θ に関して単調減少であるとすると $c(\theta,\psi)>0$ である．さて，$u=n\sigma(\theta-\hat{\theta}_n)$ と $v=\sqrt{n}b(\psi-\hat{\psi}_n)$ をそれぞれ θ と ψ の基準化された確率変数とする．このとき，Ghosal (1999) の結果より $\boldsymbol{X}$ を与えたときの (u,v) の同時事後密度は $u<0$ に対して次のような漸近展開をもつ：

$$\pi(u,v \mid X)=(2\pi)^{-1/2}e^{u-(v^2/2)}\left\{1+n^{-1/2}D_1+n^{-1}D_2+O_p(n^{-3/2})\right\}. \tag{1}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
D_1 =&\frac{\hat{\pi}_{01}}{\hat{\pi}_{00}b}v+\frac{2a_{11}}{\sigma b}uv+\frac{a_{03}}{b^3}v^3,\\
D_2 =&\frac{\hat{\pi}_{10}a_{03}}{\hat{\pi}_{00}\sigma}(u+1)+\frac{\hat{\pi}_{02}}{2\hat{\pi}_{00}b^2}(v^2-1)+\frac{a_{20}}{\sigma^2}(u^2-1)\\
&+\frac{2(\hat{\pi}_{01}/\hat{\pi}_{00})a_{11}+3a_{12}}{\sigma b^2}(uv^2+1)+\frac{\hat{\pi}_{01}a_{03}}{\hat{\pi}_{00}b^4}(v^4-1)\\
&+\frac{2a_{11}^2}{\sigma^2b^2}(u^2v^2-2)+\frac{2a_{11}a_{03}}{\sigma b^4}(uv^4+3)+\frac{a_{03}^2}{b^6}(v^6-15)
\end{aligned}$$

であり，$r,s=0,1,2,\ldots$ に対して

$$\hat{\pi}_{rs}=\frac{\partial^{r+s}}{\partial\theta^r\partial\psi^s}\pi(\hat{\theta}_n,\hat{\psi}_n),\quad a_{rs}=\{(r+s)!\,n\}^{-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{r+s}}{\partial\theta^r\partial\psi^s}\log f(X_i;\hat{\theta}_n,\hat{\psi}_n)$$

とおく．ここでまた，$r,s=0,1,2,\ldots$ に対して，$a_{rs}\to A_{rs}(\theta,\psi)$ $(n\to\infty)$ が成り立つことに注意する．ただし,

$$A_{rs}(\theta,\psi)=\{(r+s)!\}^{-1}E\left\{\frac{\partial^{r+s}}{\partial\theta^r\partial\psi^s}\log f(X_i;\theta,\psi)\right\}\quad(r,s=0,1,2,\ldots)$$

とする．A_{rs} の記法を用いると，$c(\theta,\varphi)=A_{10}$，$\lambda^2(\theta,\varphi)=-2A_{02}$ とかけることにも注意する．(1) より，u と v は一次の漸近独立でそれぞれ一次の漸近分布は指数分布と正規分布となることがわかる．これより，それぞれの二次の漸近周辺事後密度 $\pi(u \mid \boldsymbol{X})$, $\pi(v \mid \boldsymbol{X})$ は片方の変数を積分消去することにより次で与えられる：

$$\begin{aligned}
\pi(u \mid \boldsymbol{X}) =&e^u\left[1+n^{-1}\left\{\left(\frac{\hat{\pi}_{10}}{\hat{\pi}_{00}\sigma}+\frac{2(\hat{\pi}_{01}/\hat{\pi}_{00})a_{11}+3a_{12}}{\sigma b^2}+\frac{6a_{11}a_{03}}{b^4}\right)(u+1)\right.\right.\\
&\left.\left.+\left(\frac{a_{20}}{\sigma^2}+\frac{2a_{11}^2}{\sigma^2b^2}\right)(u^2-2)\right\}+O_p\left(n^{-2}\right)\right]\quad(u<0),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\pi(v \mid \boldsymbol{X}) =(2\pi)^{-1/2}e^{-v^2/2}\left[1+n^{-1/2}\left\{\left(\frac{\hat{\pi}_{01}}{\hat{\pi}_{00}b}-\frac{2a_{11}}{\sigma b}\right)v+\frac{a_{03}}{b^3}v^3\right\}+O_p\left(n^{-1}\right)\right]. \tag{3}$$

まず，θ を興味ある母数，ψ を局外母数であるとしたときの (θ,ψ) の moment matching prior を考える．

定理 3. 適当な条件のもとで，事前密度 $\pi(\theta,\psi)$ に対する θ の周辺事後平均 $\hat{\theta}^B_{n,\pi}$ とバイアス補正 MLE $\hat{\theta}^*_n = \hat{\theta}_n - (1/\sigma n)$ の二次の漸近的な差異は次で与えられる：

$$\begin{aligned}\hat{\theta}^B_{n,\pi} - \hat{\theta}^*_n =& n^{-2}\left\{\left(\frac{\hat{\pi}_{10}}{\hat{\pi}_{00}\sigma} + \frac{2(\hat{\pi}_{01}/\hat{\pi}_{00})a_{11} + 3a_{12}}{\sigma b^2} + \frac{6a_{11}a_{03}}{b^4}\right)\right.\\ &\left. - 4\left(\frac{a_{20}}{\sigma^2} + \frac{2a_{11}^2}{\sigma^2 b^2}\right)\right\} + O_p\left(n^{-3}\right)\Bigg] \quad (n\to\infty). \end{aligned} \tag{4}$$

(4) において，大数の法則と $(\hat{\theta}_n, \hat{\psi}_n)$ の一致性により次が成り立つ：

$$\begin{aligned} n^2(\hat{\theta}^B_{n,\pi} - \hat{\theta}^*_n) \xrightarrow{p} & \frac{1}{c(\theta,\psi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\pi(\theta,\psi) + \frac{2A_{11}(\theta,\psi)}{c(\theta,\psi)\lambda^2(\theta,\psi)}\frac{\partial}{\partial\psi}\log\pi(\theta,\psi)\\ &+ \frac{3A_{12}(\theta,\psi)}{c(\theta,\psi)\lambda^2(\theta,\psi)} + \frac{6A_{11}(\theta,\psi)A_{03}(\theta,\psi)}{\lambda^4(\theta,\psi)}\\ &- 4\left(\frac{A_{20}(\theta,\psi)}{c^2(\theta,\psi)} + \frac{2A_{11}^2(\theta,\psi)}{c^2(\theta,\psi)\lambda^2(\theta,\psi)}\right) \quad (n\to\infty). \end{aligned}$$

よって，θ に関心があるときの moment matching prior $\pi^\theta_M(\theta,\psi)$ は次の偏微分方程式の解として得られる：

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c(\theta,\psi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\pi(\theta,\psi) + \frac{2A_{11}(\theta,\psi)}{c(\theta,\psi)\lambda^2(\theta,\psi)}\frac{\partial}{\partial\psi}\log\pi(\theta,\psi)\\ &= 4\left(\frac{A_{20}(\theta,\psi)}{c^2(\theta,\psi)} + \frac{2A_{11}^2(\theta,\psi)}{c^2(\theta,\psi)\lambda^2(\theta,\psi)}\right) - \frac{3A_{12}(\theta,\psi)}{c(\theta,\psi)\lambda^2(\theta,\psi)} - \frac{6A_{11}(\theta,\psi)A_{03}(\theta,\psi)}{\lambda^4(\theta,\psi)}. \end{aligned} \tag{5}$$

事前分布を (5) の解として選ぶと $\hat{\theta}^B_{n,\pi} - \hat{\theta}^*_n = O_p(n^{-3})$ が成り立っていることに注意する．一方，ψ を興味ある母数，θ を局外母数としたときの (θ,ψ) の moment matching prior も同様に導くことができるがここでは導出は省略し，結果のみ述べる (詳しくは Hashimoto (2018) 参照)．この場合は，(5) とは異なり陽に微分方程式を解くことができ，moment matching prior は

$$\pi(\theta,\psi) = \exp\left\{\int^\psi \left(\frac{2A_{11}(\theta,t)}{c(\theta,t)} - \frac{3A_{03}(\theta,t)}{\lambda^2(\theta,t)}\right)\mathrm{d}t\right\} \tag{6}$$

となる．ここで，$\hat{\psi}^B_{n,\pi} - \hat{\psi}_n = O_p(n^{-3/2})$ が成り立っていることに注意する．

例をいくつか示す．正則性と非正則性を併せもつような分布族の典型として次のような密度関数をもつ切断指数型分布族がある：

$$
f(x;\theta,\psi)=\begin{cases}\dfrac{a(x)e^{\psi u(x)}}{b(\theta,\psi)} & (c<\theta\le x<d),\\ 0 & (\text{他}).\end{cases}\tag{7}
$$

ただし，$-\infty\le c<d\le\infty$ であり，$a(\cdot)$ は非負値で，ほとんど至るところ連続であり，$u(\cdot)$ は区間 (θ,d) 上で絶対連続で $\mathrm{d}u(x)/\mathrm{d}x\ne 0$ とする．ここで，$b(\theta,\psi)=\int_\theta^d a(x)e^{\psi u(x)}\mathrm{d}x$ は正規化定数であり，θ が既知のときは正則な指数型分布族になる．特に密度関数が (7) で与えられる切断指数型分布族は下側切断指数型分布族とよばれる．切断指数型分布族に関する統計的推測理論については Akahira (2017) を参照されたい．

例 4 (Shifted exponential with scale)．密度関数 (7) において，$c=-\infty$, $d=\infty$, $a(x)\equiv 1$, $u(x)=-x$ とおくとこれは，切断母数 θ と尺度母数 ψ をもつ下側切断指数分布になる．$b(\theta,\psi)=\psi^{-1}e^{-\psi\theta}$ $(\psi\in(0,\infty))$ より，$c(\theta,\psi)=\psi$, $\lambda^2(\theta,\psi)=\psi^{-2}$, $A_{11}(\theta,\psi)=1/2$, $A_{12}(\theta,\psi)=0$, $A_{20}(\theta,\psi)=0$, $A_{03}(\theta,\psi)=1/(3\psi^3)$ が成り立つ．θ に興味があるときの moment matching prior $\pi_M^\theta(\theta,\psi)$ は次の偏微分方程式の解として与えられる：

$$
\frac{1}{\psi}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\pi(\theta,\psi)+\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\log\pi(\theta,\psi)=2-\psi.
$$

この偏微分方程式の解は $\pi_M^\theta(\theta,\psi)\propto\psi^2e^{-\psi}$ で与えられる．一方，ψ に興味がある場合は (6) より，$\pi_M^\psi(\theta,\psi)=1$ となりこれは一様事前分布である．

例 5 (Pareto distribution)．密度関数 (7) において，$c=0$, $d=\infty$, $a(x)=1/x$, $u(x)=-\log x$ とおくと，切断母数 θ と形状母数 ψ をもつパレート分布になる．このとき，$b(\theta,\psi)=\psi^{-1}\theta^{-\psi}$ $(\psi\in(0,\infty))$ より，$c(\theta,\psi)=\psi/\theta$, $\lambda^2(\theta,\psi)=\psi^{-2}$, $A_{11}(\theta,\psi)=1/(2\theta)$, $A_{12}(\theta,\psi)=0$, $A_{20}(\theta,\psi)=-\psi/(2\theta^2)$, $A_{03}(\theta,\psi)=1/(3\psi^3)$ となる．θ に興味がある場合の moment matching prior $\pi_M^\theta(\theta,\psi)$ は次の偏微分方程式の解として与えられる：

$$
\frac{\theta}{\psi}\frac{\partial}{\partial\theta}\log\pi(\theta,\psi)+\psi\frac{\partial}{\partial\psi}\log\pi(\theta,\psi)=-\frac{2}{\psi}-\frac{\psi}{\theta}-2.
$$

しかしながら，この偏微分方程式の解を見つけることは容易ではない．一方，ψ に興味がある場合は (6) より，$\pi_M^\psi(\theta,\psi)=1$ となりこれは一様事前分布である．

5　おわりに

本稿では，分布の台が未知母数に依存するような非正則な確率分布に対する客観事前分布を Ghosh and Liu (2011) により提案された moment matching criterion に基づいて導出し，いくつかの例を与えた．得られた事前分布は事後平均と最尤推定量を高次のオーダーで一致させるようなものであり，その意味でベイズ法と頻度主義を結びつけるような事前分布であるといえる．しかし，Ghosh and Liu (2011) による正則な場合も，本稿における非正則な場合も共に得られる事前分布は母数の一対一変換に関する不変性をもたない．この問題をどのように捉えるかは今後の課題である．また，局外母数が存在する多母数の場合には偏微分方程式の解として得られるが，その偏微分方程式がどのような場合に陽に解けるかを解明することも重要な問題である．

謝辞

本研究は，JSPS 科研費 若手研究 (B) (17K14233, 橋本真太郎) の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Akahira, M. (2017). *Statistical Estimation for Truncated Exponential Families.* Springer Briefs in Statistics, JSS Research Series in Statistics, Springer, Singapore.

[2] Bernardo, J. M. (1979). Reference posterior distributions for Bayesian inference (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society.* Ser. B, **41**, 113–147.

[3] Datta, G. S. and Mukerjee, R. (2004). *Probability Matching Priors: Higher Order Asymptotics.* Springer, New York.

[4] Ghosal, S. (1999). Probability matching priors for non-regular cases. *Biometrika.* **86**, 956–964.

[5] Ghosal, S. and Samanta, T. (1997). Asymptotic expansion of posterior distributions in nonregular case. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics.* **49**(1), 181–197.

[6] Ghosh, M. and Liu, R. (2011). Moment matching priors. *Sankhyā.* **73**-A, 185–201.

[7] Hashimoto, S. (2018). Moment matching priors for non-regular models. submitted.

[8] Tibshirani, R. J. (1989). Noninformative priors for one parameter of many. *Biometrika.* **76**, 604–608.

[9] Welch, B. L. and Peers, H. W. (1963). On formulae for confidence points based on integrals of weighted likelihoods. *Journal of the Royal Statistical Society.* Ser. B, **25**, 318–329.