

On the special values of the zeta function associated with simple Lie algebra type G_2

門田 慎也 (名古屋大学)

Shin-ya Kadota (Nagoya University)

岡本 卓也 (北里大学)

Takuya Okamoto (Kitasato University)

田坂 浩二 (愛知県立大学)

Koji Tasaka (Aichi Prefectural University)

1 はじめに

本稿では、2017年10月30日(月)から11月1日(水)に行われた研究集会「解析的整数論とその周辺」において発表した結果「 G_2 型ルート系のゼータ関数の特殊値について」を紹介する。講演の際には、Erik Panzer [7]により得られた「多重ボリログに対する parity result」を用いた証明を紹介したが、本稿では出版論文 [4] で用いた証明を紹介する。

2 先行研究と主結果

ルート系のゼータ関数とは、単純 Lie 代数に付随する多重ゼータ関数のことであり、小森・松本・津村により導入された。単純 Lie 代数は古典型と呼ばれる A_r ($r \geq 1$), B_r ($r \geq 2$), C_r (≥ 3), D_r ($r \geq 4$) 型、そして例外型と呼ばれる E_6, E_7, E_8, F_4, G_2 型のいずれかに分類されることが知られており、それぞれに対してルート系のゼータ関数が存在する。単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に対するルート系のゼータ関数は次のように定義される。

$$\zeta_r(\mathbf{s}, \mathfrak{g}) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \prod_{\alpha \in \Delta_+} \langle \alpha^\vee, m_1 \lambda_1 + \cdots + m_r \lambda_r \rangle^{-s_\alpha}.$$

ただし、 r は \mathfrak{g} のランク、 Δ_+ は \mathfrak{g} の正のルート全体の集合、 α^\vee はルート α のコルート、そして $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ は基本 weight である。正のルート α に対応する変数を s_α で表し、 $\mathbf{s} = (s_\alpha)_{\alpha \in \Delta_+}$ とかいたり、正のルートに番号を付けて、 α_i に対する変数を s_i で表し、 $\mathbf{s} = (s_i)_{1 \leq i \leq |\Delta_+|}$ とかいたりする。また、 \mathfrak{g} が X_r 型の単純 Lie 代数である時、 $\zeta_r(\mathbf{s}, \mathfrak{g})$ を $\zeta_r(\mathbf{s}, X_r)$ と書く。ここでは、ランクが低い単純 Lie 代数に対するルート系のゼータ関数を具体例として挙げる。まず、 A_1 型のルート系のゼータ関数は

$$\zeta_1(s, A_1) = \sum_{m>0} \frac{1}{m^s}$$

となり、これはまさに Riemann ゼータ関数である。 A_2 型ルート系のゼータ関数は

$$\zeta_2(s_1, s_2, s_3, A_2) = \sum_{m, n > 0} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3}}$$

であり、これは Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数と一致する。 A_3, B_2 型ルート系のゼータ関数は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \zeta_3(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, A_3) &= \sum_{m, n, \ell > 0} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} \ell^{s_3} (m+n)^{s_4} (n+\ell)^{s_5} (m+n+\ell)^{s_6}}, \\ \zeta_2(s_1, s_2, s_3, s_4, B_2) &= \sum_{m, n > 0} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3} (m+2n)^{s_4}}. \end{aligned}$$

そして、タイトルにある G_2 型ルート系のゼータ関数であるが³、それは次のような形をしている。

$$\zeta_2(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, G_2) = \sum_{m, n > 0} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^{s_3} (m+2n)^{s_4} (m+3n)^{s_5} (2m+3n)^{s_6}}.$$

ルート系のゼータ関数の起源は、Zagier により導入された Witten ゼータ関数であり、ルート系のゼータ関数は Witten ゼータ関数を拡張し多変数化したものである。Witten ゼータ関数とは半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} と複素変数 s に対して次の級数で定義される関数である。

$$\zeta_W(s, \mathfrak{g}) = \sum_{\varphi} (\dim \varphi)^{-s}.$$

ここで、 φ は \mathfrak{g} の有限次元既約表現の同値類全体をわたる。 s が正の整数である時の特殊値が Witten により考えられていたある種のモジュライ空間の体積を表すことからこのように名づけられた。Witten ゼータ関数からルート系のゼータ関数が定義されるまでの詳しいプロセスは [5] などを参照されたい。ルート系のゼータ関数は Witten ゼータ関数のほかにもうひとつ重要な関数を特別な場合として含むことが知られている。それは Euler-Zagier 型多重ゼータ関数と呼ばれるものであり次のように定義される。

$$\zeta_{r,EZ}(s_1, s_2, \dots, s_r) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} (m_1+m_2)^{s_2} \cdots (m_1+m_2+\cdots+m_r)^{s_r}}.$$

実際、

$$\begin{aligned} \zeta_2(s_1, 0, s_3, A_2) &= \zeta_{2,EZ}(s_1, s_3), \\ \zeta_3(0, 0, s_3, 0, s_5, s_6, A_3) &= \zeta_{3,EZ}(s_3, s_5, s_6), \\ \zeta_2(0, s_2, s_3, 0, B_2) &= \zeta_{2,EZ}(s_2, s_3), \\ \zeta_2(s_1, 0, s_3, 0, 0, 0, G_2) &= \zeta_{2,EZ}(s_1, s_3) \end{aligned}$$

と、上に挙げたルート系のゼータ関数のいくつかの例において、変数を 0 とすることで Euler-Zagier 型多重ゼータ関数を復元することができる。従って、Euler-Zagier 型多重

ゼータ関数に対して成り立つ性質や関係式がルート系のゼータ関数に対してどの程度成り立つのか、もしくは類似性質があるのか、と疑問に思うのは自然なことである。ここでは Euler-Zagier 型多重ゼータ関数の変数 s_i が正の整数 k_i であるときの特殊値、つまり多重ゼータ値 $\zeta_{r,EZ}(k_1, \dots, k_r)$ に対して成り立つ性質に焦点をあててみる。多重ゼータ値 $\zeta_{r,EZ}(k_1, \dots, k_r)$ に対して、変数の総和 $k_1 + \dots + k_r$ を「重さ」といい、 r を「深さ」という。このとき、多重ゼータ値に対して次の性質が成り立つ。

Theorem 2.1. 重さと深さの偶奇が異なる多重ゼータ値は、深さが自身より低い多重ゼータ値の有理数係数の多項式として表すことができる。

この性質は、解析的な手法を用いて津村 [8] に証明され、代数的な手法を用いて井原・金子・Zagier [3] により証明されている。実は、この結果はこの二組よりも昔に Goncharov [1, Corollary 7.2] により証明されていることを述べておく。さて、ここで注目したいのは「深さが自身より低い多重ゼータ値」を用いて表すことができる、つまり r 重級数を $\ell (< r)$ 重級数を用いて表すことができるという点である。では、ルート系のゼータ関数の特殊値に対して、似たような性質はないのだろうか？この問いに対して、これまでにいくつかの結果がすでに残されている。まず、二重級数で定義される A_2 型ルート系のゼータ関数の特殊値 $\zeta_2(k_1, k_2, k_3, A_2)$ に対して、 $k_1 + k_2 + k_3$ が奇数である時 $\zeta_2(k_1, k_2, k_3, A_2)$ は Riemann ゼータ値の有理数係数の多項式として表されることが Huard-Williams-Zhang [2] により証明されている。次に、二重級数で定義される B_2 型ルート系のゼータ関数の特殊値 $\zeta_2(k_1, k_2, k_3, k_4, B_2)$ も $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ が奇数である時は A_2 型と同様、Riemann ゼータ値の有理数係数の多項式としてかけることが津村 [9] により証明されている。さて、次に考えたいのはやはり G_2 型である。 G_2 型ルート系のゼータ関数の特殊値に関しては共同研究者である岡本により次の結果が得られている。

Theorem 2.2 (岡本 [6]). 自然数 k_1, k_2, \dots, k_6 に対して、 $k_1 + \dots + k_6$ が奇数である時、 G_2 型ルート系のゼータ関数の特殊値 $\zeta_2(k_1, k_2, \dots, k_6, G_2)$ は

$$\zeta(n, L(n, \chi_3), S_n(\frac{j}{\ell}), C_n(\frac{j}{\ell})) \quad (\ell = 4, 12, 0 < j < \ell, \gcd(j, \ell) = 1)$$

の有理数係数の多項式として表される。

ここで、 $L(n, \chi_3)$ は 3 を法とする Dirichlet 指標 χ_3 に付随する Dirichlet の L 関数であり、 $S_n(x), C_r(x)$ は Clausen 型関数と呼ばれる以下のように定義される級数である。

$$S_n(x) = \sum_{m>0} \frac{\sin(2\pi mx)}{m^n}, \quad C_n(x) = \sum_{m>0} \frac{\cos(2\pi mx)}{m^n}.$$

当時は、 $\zeta_2(k_1, k_2, \dots, k_6, G_2)$ を表示するのに Clausen 型関数が本当に必要かどうか明らかになっていなかった。その後、小森・松本・津村はいくつもの具体例をもとに次の予想を提唱した。

Conjecture 2.3 (小森・松本・津村). 自然数 k_1, k_2, \dots, k_6 に対して、 $k_1 + \dots + k_6$ が奇数である時

$$\zeta_2(k_1, k_2, \dots, k_6, G_2) \stackrel{?}{\in} \mathbb{Q}[\zeta(n+1), L(n, \chi_3) \mid n \geq 1].$$

今回我々は、Tornheim 型二重級数の正の整数点における特殊値の評価に関する結果を得ることができ、その系としてこの予想を完全解決することに成功した。Tornheim 型二重級数とは、自然数 a, b, k_1, k_2, k_3 に対して、次のように定義される対象である。

$$\zeta_{a,b}(k_1, k_2, k_3) = \sum_{m,n>0} \frac{1}{m^{k_1} n^{k_2} (am + bn)^{k_3}}.$$

Theorem 2.4 (Main Theorem). 自然数 a, b, k_1, k_2, k_3 に対して、 $k = k_1 + k_2 + k_3$, $N = \text{lcm}(a, b)$ とおく。このとき、 k が奇数なら

$$\zeta_{a,b}(k_1, k_2, k_3) \in \langle \pi^{2j+1} S_{k-2j-1}(d/N), \pi^{2j} C_{k-2j}(d/N) \mid 0 \leq j \leq \frac{k-3}{2}, d \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

この定理の特別な場合を考えることで、上に述べた予想を解決することができる。

Corollary 2.5. 自然数 k_1, \dots, k_6 に対して、 $k = k_1 + \dots + k_6$ が奇数である時、

$$\zeta_2(k_1, k_2, \dots, k_6, G_2) \in \langle L(2j+1, \chi_3) L(k-2j-1, \chi_3), \zeta(2j) \zeta(k-2j) \mid 0 \leq j \leq \frac{k-3}{2} \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

3 証明の概略

まずは、Corollary 2.5 の証明の概略を紹介する。部分分数分解を行うことで、本来の対象である $\zeta_2(k_1, k_2, \dots, k_6, G_2)$ は次の 4 種類の Tornheim 型二重級数の有理数係数の線型結合で書き表すことができる：

$$\zeta_{1,1}(\ell_1, \ell_2, \ell_3), \zeta_{1,2}(\ell_1, \ell_2, \ell_3), \zeta_{1,3}(\ell_1, \ell_2, \ell_3), \zeta_{2,3}(\ell_1, \ell_2, \ell_3).$$

ただし、 $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \geq 1$ は $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = k_1 + \dots + k_6$ を満たす。従って、 $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ が奇数である時、これら 4 種類の級数が空間

$$V = \langle L(2j+1, \chi_3) L(k-2j-1, \chi_3), \zeta(2j) \zeta(k-2j) \mid 0 \leq j \leq \frac{k-3}{2} \rangle_{\mathbb{Q}}$$

に属していることを確かめれば十分である。まず、2 以上の整数 n と $x = \frac{1}{6}, \frac{2}{6}(=\frac{1}{3}), \frac{3}{6}(=\frac{1}{2}), \frac{4}{6}(=\frac{2}{3}), \frac{5}{6}$ に対して、簡単な計算から $S_n(x) \in \mathbb{Q}\sqrt{3}L(n, \chi_3), C_n(x) \in \mathbb{Q}\zeta(n)$ であることが確かめられる。例えば、

$$\begin{aligned} S_n\left(\frac{1}{6}\right) &= \sum_{m>0} \frac{\sin(m\pi/3)}{m^n} \\ &= \sum_{\substack{m>0 \\ m \equiv 1(6)}} \frac{\sin(\pi/3)}{m^n} + \sum_{\substack{m>0 \\ m \equiv 2(6)}} \frac{\sin(2\pi/3)}{m^n} + \sum_{\substack{m>0 \\ m \equiv 4(6)}} \frac{\sin(4\pi/3)}{m^n} + \sum_{\substack{m>0 \\ m \equiv 5(6)}} \frac{\sin(5\pi/3)}{m^n} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sum_{\substack{m>0 \\ m \equiv 1(6)}} \frac{1}{m^n} + \sum_{\substack{m>0 \\ m \equiv 2(6)}} \frac{1}{m^n} - \sum_{\substack{m>0 \\ m \equiv 4(6)}} \frac{1}{m^n} - \sum_{\substack{m>0 \\ m \equiv 5(6)}} \frac{1}{m^n} \right) \end{aligned}$$

であり、

$$\sum_{\substack{m>0 \\ m\equiv 1(6)}} \frac{1}{m^n} - \sum_{\substack{m>0 \\ m\equiv 5(6)}} \frac{1}{m^n} = L(n, \chi_3) + \sum_{\substack{m>0 \\ m\equiv 2(6)}} \frac{1}{m^n} - \sum_{\substack{m>0 \\ m\equiv 4(6)}} \frac{1}{m^n}$$

を代入して整理すると

$$S_n\left(\frac{1}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\right) L(n, \chi_3)$$

を得ることができる。この事実と、非負整数 j に対して、 $\pi^{2j} \in \mathbb{Q}\zeta(2j)$, $\pi^{2j+1} \in \mathbb{Q}\sqrt{3}L(2j+1, \chi_3)$ であるという事実を組み合わせることで上に述べた 4 種類の Tornheim 型二重級数が V に属することがわかる。以上が Corollary 2.5 の証明の概略である。

それでは、これから Theorem 2.4 の証明の概略を述べる。詳しい計算は論文 [4] を参照されたい。まず、正の整数 k と $|z| \leq 1$ なる複素数に対してポリログ関数 $\text{Li}_k(z)$ を

$$\text{Li}_k(z) = \sum_{m>0} \frac{z^m}{m^k}$$

で定める。ただし、 $(k, z) \neq (1, 1)$ とする。また、 $B_k(x)$ を母関数により定まる k 次の Bernoulli 多項式とする：

$$\beta_0(x; t) := \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k \geq 0} B_k(x) \frac{t^k}{k!}.$$

このとき、Bernoulli 多項式 $B_k(\{x\})$ は Clausen 型関数 $S_k(x), C_k(x)$ を用いて次のように表示することができる：

$$B_k(\{x\}) = \begin{cases} -2i \frac{k!}{(2\pi i)^k} S_k(x) & k \geq 1 : \text{odd} \\ -2 \frac{k!}{(2\pi i)^k} C_k(x) & k \geq 2 : \text{even} \end{cases}.$$

ここで、 $\{x\}$ は実数 x の小数部分を表すものとする。さらに、正の整数 k と実数 x に対して

$$Cl_k(\{x\}) := \begin{cases} -\frac{k!}{(2\pi i)^{k-1}} C_k(x) & k \geq 1 : \text{odd} \\ -i \frac{k!}{(2\pi i)^{k-1}} S_k(x) & k \geq 2 : \text{even} \end{cases}$$

と定める。ただし $k = 1$ のときは $x \notin \mathbb{Z}$ とする。このとき、次の等式を得ることができる。

$$\text{Li}_k(e^{2\pi i x}) = \sum_{m>0} \frac{e^{2\pi i m x}}{m^k} = -\frac{1}{2\pi i} \frac{(2\pi i)^k}{k!} (Cl_k(\{x\}) + \pi i B_k(\{x\})). \quad (3.1)$$

この後、証明を複雑なものにしないために $\text{Li}_k(e^{2\pi ix})$, $B_k(\{x\})$, $Cl_k(\{x\})$ の母関数を導入する。

$$\begin{aligned}\gamma(x; t) &:= \sum_{k>0} Cl_k(\{x\}) \frac{t^k}{k!}, \\ \beta(x; t) &:= \sum_{k>0} B_k(\{x\}) \frac{t^k}{k!} = \beta_0(\{x\}; t) - 1, \\ L(x; t) &:= \sum_{k>0} \text{Li}_k(e^{2\pi ix}) t^k.\end{aligned}$$

Eq. (3.1) を用いることで $L(x; t)$ は次のように書くことができる。

$$L(x; t) = -\frac{1}{2\pi i} (\gamma(x; 2\pi it) + \pi i \beta(x; 2\pi it)).$$

この等式と、指標の直行性

$$\int_0^1 e^{2\pi imx} dx = \begin{cases} 1 & , m = 0 \\ 0 & , m \neq 0 \end{cases}$$

を用いることで、 $\sum_{k_1, k_2, k_3 > 0} \zeta_{a,b}(k_1, k_2, k_3) t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3}$ は次の“都合の良い”積分表示を持つことがわかる。

$$\begin{aligned}& \sum_{k_1, k_2, k_3 > 0} \zeta_{a,b}(k_1, k_2, k_3) t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3} \\ &= -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^1 \{ \gamma(ax; 2\pi it_1) \gamma(bx; 2\pi it_2) - \pi^2 \beta(ax; 2\pi it_1) \beta(bx; 2\pi it_2) \} \beta(x; -2\pi it_3) \\ & \quad - \frac{\pi i}{(2\pi i)^2} \int_0^1 \{ \gamma(ax; 2\pi it_1) \beta(bx; 2\pi it_2) + \beta(ax; 2\pi it_1) \gamma(bx; 2\pi it_2) \} \beta(x; -2\pi it_3) dx.\end{aligned}$$

今、 $k = k_1 + k_2 + k_3$ が奇数となるとときに注目しているので両辺の実部を比較することで次の表示を得ることができる。

$$\sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 > 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 : \text{odd}}} \zeta_{a,b}(k_1, k_2, k_3) t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3} = -\frac{1}{4\pi i} \{ F_{a,b}(2\pi it_1, 2\pi it_2, 2\pi it_3) + F_{b,a}(2\pi it_2, 2\pi it_1, 2\pi it_3) \}.$$

ただし、

$$F_{a,b}(2\pi it_1, 2\pi it_2, 2\pi it_3) := \int_0^1 \gamma(ax; 2\pi it_1) \beta(bx; 2\pi it_2) \beta(x; -2\pi it_3) dx$$

である。これから $F_{a,b}(2\pi it_1, 2\pi it_2, 2\pi it_3)$ を評価するわけであるが、部分積分の計算を簡単にするために積分領域を

$$\int_0^1 = \sum_{d=0}^{b-1} \int_{\frac{d}{b}}^{\frac{d+1}{b}}$$

と分割し、

$$\alpha_{b,d}(t_2, t_3) := \beta_0(-d; t_2)\beta_0(0; -t_3) \frac{e^{bt_2-t_3} - 1}{bt_2 - t_3}$$

と定め、各区間において等式

$$\begin{aligned} \beta(bx; 2\pi it_2)\beta(x; -2\pi it_3) &= \alpha_{b,d}(2\pi it_2, 2\pi it_3)\beta_0(x; 2\pi i(bt_2 - t_3)) \\ &\quad - (\beta(bx; 2\pi it_2) + \beta(x; -2\pi it_3) + 1) \end{aligned}$$

を代入することで、

$$\begin{aligned} F_{a,b}(2\pi it_1, 2\pi it_2, 2\pi it_3) &= \sum_{d=0}^{b-1} \alpha_{b,d}(2\pi it_2, 2\pi it_3) \int_{\frac{d}{b}}^{\frac{d+1}{b}} \gamma(ax; 2\pi it_1)\beta_0(x; 2\pi i(bt_2 - t_3))dx \\ &\quad - \sum_{d=0}^{b-1} \int_{\frac{d}{b}}^{\frac{d+1}{b}} \gamma(ax; 2\pi it_1)(\beta(bx; 2\pi it_2) + \beta(x; -2\pi it_3) + 1)dx \end{aligned}$$

という表示を得ることができる。ここで、右辺の第 2 項に注目すると t_1, t_2, t_3 のいずれかを含まない式しか現れないので、我々が現在行っている評価には寄与しないことに注意しておく。あとは、右辺第 1 項を部分積分を繰り返すことで、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi i} F_{a,b}(2\pi it_1, 2\pi it_2, 2\pi it_3) \\ &= -\frac{1}{4\pi i} \sum_{d=0}^{b-1} \sum_{\substack{s \geq 1 \\ n_2, n_3, p, q \geq 0 \\ p+s+1: \text{odd}}} \frac{(-1)^{s+1} A_{b,d}(n_2, n_3)}{a^s q!} [C_{p+s+1}(ax)B_q(x)]^{\frac{d+1}{b}} \\ &\quad \times (2\pi i)^{n_2+n_3+q} t_1^{p+1} t_2^{n_2} t_3^{n_3} (bt_2 - t_3)^{q+s-1} \\ &\quad - \frac{i}{4\pi i} \sum_{d=0}^{b-1} \sum_{\substack{s \geq 1 \\ n_2, n_3, p, q \geq 0 \\ p+s+1: \text{even}}} \frac{(-1)^{s+1} A_{b,d}(n_2, n_3)}{a^s q!} [S_{p+s+1}(ax)B_q(x)]^{\frac{d+1}{b}} \\ &\quad \times (2\pi i)^{n_2+n_3+q} t_1^{p+1} t_2^{n_2} t_3^{n_3} (bt_2 - t_3)^{q+s-1} + (\text{non affect terms}) \end{aligned}$$

を得ることができる。ここで、 $A_{b,d}(n_2, n_3)$ は $\alpha_{b,d}(t_2, t_3)$ を $(t_2, t_3) = (0, 0)$ の周りで Taylor 展開したときの $t_2^{n_2} t_3^{n_3}$ の係数である。最後に、両辺の実部を比較してやることで $\frac{1}{4\pi i} F_{a,b}(2\pi it_1, 2\pi it_2, 2\pi it_3)$ の $t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3}$ の係数が

$$\langle \pi^{2j} C_{k-2j}(d/b), \pi^{2j+1} S_{k-2j-1}(d/b) \mid 0 \leq j \leq \frac{k-3}{2}, d \in \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{Q}}$$

に属することがわかり、 a と b の役割を入れ替えることで $\frac{1}{4\pi i} F_{b,a}(2\pi it_1, 2\pi it_2, 2\pi it_3)$ の $t_1^{k_1} t_2^{k_2} t_3^{k_3}$ の係数が

$$\langle \pi^{2j} C_{k-2j}(d/a), \pi^{2j+1} S_{k-2j-1}(d/a) \mid 0 \leq j \leq \frac{k-3}{2}, d \in \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \rangle_{\mathbb{Q}}$$

に属することがわかり、Theorem 2.4 の証明が完了する。

4 さいごに

最近、岡本により A_3 型ルート系のゼータ関数の特殊値 $\zeta_3(k_1, k_2, \dots, k_6, A_3)$ に関して類似した結果が得られた。すなわち、 $k_1 + k_2 + \dots + k_6$ が偶数であるとき、 $\zeta_3(k_1, k_2, \dots, k_6, A_3)$ は A_2 型ルート系のゼータ関数の特殊値および Riemann ゼータ関数の特殊値の有理数係数の多項式で表すことができることを証明した。

謝辞

2017年度 RIMS 共同研究(公開型)「解析的整数論とその周辺」において講演の機会を与えてくださった研究代表者の藤田育嗣先生と研究副代表者である見正秀彦先生にこの場を借りて改めてお礼申し上げます。

References

- [1] A. B. Goncharov, *Multiple polylogarithms, cyclotomy and modular complexes*, Math. Res. Lett. **5** (1998), no. 4, 497–516.
- [2] J. G. Huard, K. S. Williams and N. Y. Zhang, *On Tornheim's double series*, Acta Arith., **75** (1996), no. 2, 105–117.
- [3] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. **142** (2006), no. 2, 307–338.
- [4] S. Kadota, T. Okamoto and K. Tasaka, *Evaluation of Tornheim's type of double series*, Illinois J. Math. **61** (2017), no. 1-2, 171–186.
- [5] 松本耕二, ルート系のゼータ関数の理論入門, 大学院数学レクチャーノートシリーズ **39**, 東北大学, 2018.
- [6] T. Okamoto, *Multiple zeta values related with the zeta-function of the root system of type A_2, B_2 and G_2* , Comment. Math. Univ. St. Pauli **61** (2012), no. 1, 9–27.
- [7] E. Panzer, *The parity theorem for multiple polylogarithms*, J. Number Theory, **172** (2017), 93–113.
- [8] H. Tsumura, *Combinatorial relations for Euler-Zagier sums*, Acta Arith. **111** (2004), no. 1, 27–42.
- [9] H. Tsumura, *On Witten's type of zeta values attached to $SO(5)$* , Arch. Math. (Basel) **82** (2004), no. 2, 147–152.