

# 1 次元非線形波動方程式の爆発曲線に関する 数値・数学解析

佐々木 多希子<sup>1,\*</sup>, 石渡 哲哉<sup>2</sup>

明治大学 理工学部<sup>1</sup>, 芝浦工業大学 システム理工学部<sup>2</sup>

Takiko Sasaki<sup>1</sup>, Tetsuya Ishiwata<sup>2</sup>

School of Science and Technology, Meiji University<sup>1</sup>,

Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology<sup>2</sup>

## 1 はじめに

非線形発展方程式において、有限時間で方程式の解の適当なノルムが発散することを「**解の爆発**」と呼ぶ。解の爆発は非線形問題に特有のもので、様々な非線形発展方程式においてしばしば見られる現象である。また、爆発現象は方程式の種類により、その様相が大きく異なる。例えば、解が有限伝播性を持つ波動方程式の解の爆発は、解が無限伝播性を持つ熱方程式やシュレディンガー方程式の解の爆発と大きく違う。このことは様々な観点から研究されているが、その一つに波動方程式の場合、「解の爆発時間が空間変数に依存する」ということが挙げられる。本稿では、このような非線形波動方程式の解の爆発の様相を記述する特性の一つである「**爆発曲線**」に関して、最近得られた結果を報告する。

## 2 爆発曲線

議論に先立ち、爆発曲線の定義や研究背景、扱う問題を述べる。

### 2.1 爆発曲線とは

例として、次の非線形波動方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = F(u, \partial_t u, \partial_x u), & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ u(0, t) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, t) = u_1(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.1)$$

---

\* takiko@meiji.ac.jp

を考える。当面の間、 $F = |u|^{p-1}u$ , ( $p > 1$ ) とする。ここで、時空間中の次の台形領域  $K_{R^*, T^*}$  を考える:

$$K_{R^*, T^*} = \bigcup_{x \in B_{R^*}} K_-(x, T^*).$$

ただし、 $R^*, T^*$  は任意の正定数で、

$$B_{R^*} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < R^*\},$$

$$K_-(x_0, t_0) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < t_0 - t, t > 0\}.$$

波動方程式の解には有限伝播性があるため、 $K_{R^*, T^*}$  内の解の依存領域は  $K_{R^*, T^*}$  で閉じる。したがって、 $K_{R^*, T^*}$  中の爆発曲線に着目したい場合は、他の領域の解の挙動を考えなくてよい。

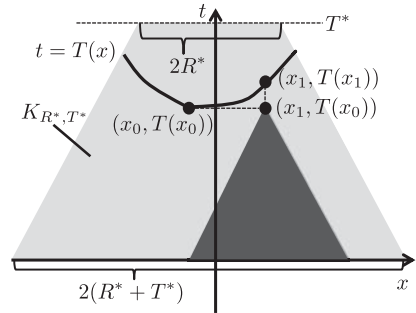


図 1: 依存領域と爆発曲線のイメージ

以下、 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  全体で解の挙動を見るのではなく、台形領域  $K_{R^*, T^*}$  中での解の爆発を考察する。ただし、本稿では古典解の爆発を解の爆発とみなす。

各  $x$  での (2.1) の古典解の最大存在時間 ( $F = |u|^{p-1}u$  の場合は古典解の最大存在時間は  $u$  が発散する時間である):

$$T(x) = \sup \{t \in (0, T^*) \mid |u(x, t)| < \infty\} \quad (x \in B_{R^*}) \quad (2.2)$$

が曲線になる場合、 $T$  を (2.1) の解の**爆発曲線**という。

図 1 は爆発曲線のイメージである。波動方程式の解を初期値から時間発展させると、まず、解  $u$  の最大値が  $x_0$  において時刻  $T(x_0)$  で発散する。解が無限伝播性を持つ熱方程式などの解の場合は、(特に、本稿では古典解を考えているので) ある一点で解が爆発すると、発散は瞬時に他の点  $x$  にも伝わり、その時刻以降は全ての点  $x$  で解が存在しえなくなる。しかし、波動方程式の場合は解が有限伝播性を持つため、たとえ  $x_0$  で解が発散しても他の  $x$  では時刻  $t = T(x_0)$  以降も古典解が残っている可能性がある。例えば  $x_1$  では時刻  $t = T(x_0)$  でも古典解が存在する。というのも、 $(x_1, T(x_0))$  での解の依存領域 (色の濃い三角形) に解が発散している点  $(x_0, T(x_0))$  が含まれていないためである。したがって、解の爆発時間が空間変数に依存し、(2.2) で定義した爆発曲線  $T$  を考えることができる。

## 2.2 先行研究

爆発曲線はその微分可能性や特異性に焦点を当てた研究がなされてきた。ここでは、本稿の主結果に関連がある先行研究について、簡単に紹介する。

### 2.2.1 爆発曲線の微分可能性に関する先行研究

1986年に Caffarelli–Friedman[CF] が、非線形項が  $F = |u|^{p-1}u$  である場合に、十分滑らかで大きく定数に近い初期値に対して、爆発曲線  $T$  が連続微分可能になることを示した。その後、Godin[G2], Hanza–Zaag[HZ] や Uesaka[U] により、 $F = e^u$  である場合や消散型波動方程式、波動方程式系に対しても同様の結果が示された。ただし、波動方程式系の場合は爆発曲線のリップシツ連続性のみ示されている。

爆発曲線の滑らかさは、爆発曲線付近での解の性質と密接に関係している。十分定数に近い初期値から始まる (2.1) の解は、爆発曲線付近でも常微分方程式の解とある意味で非常に近い性質を持つ。この場合、 $x_1, x_2$  が十分近ければ、 $u(x_1, t), u(x_2, t)$  も近い値を取るため、それらの爆発時刻  $T(x_1), T(x_2)$  も近い値になる。これは  $T$  が連続になることを示している。さらに、解が「常微分方程式に近い」性質を持つことから、 $T$  が滑らかになることも示すことができる。

その後、2012年に Merle–Zaag[MZ] は、非線形項が  $F = |u|^{p-1}u$  である場合、Caffarelli–Friedman[CF] の「初期値が十分大きく定数に近い」という条件を取り除いて、初期値  $u(x, 0), \partial_t u(x, 0)$  が正でありさえすれば、爆発曲線は滑らかになることを示した。

一方で Ohta–Takamura[OT] により、 $F = (\partial_t u)^2 - (\partial_x u)^2$  の場合、爆発曲線が生じず、原点でしか解が発散しない例や、爆発曲線が  $C^\infty$  級になる例など、様々な爆発曲線の存在が示された。ただし、Ohta–Takamura[OT] の手法を適用するには、非線形波動方程式が線形な波動方程式に書き直せることが必須である。

また、S.[S] では、非線形項に未知関数の導関数を含む、 $F = |\partial_t u|^{p-1} \partial_t u$  の場合に Caffarelli–Friedman[CF] と類似の結果が成り立つのか検討し、初期値  $(\partial_t \pm \partial_x)u(x, 0)$  を十分滑らかで大きく定数に近いものをとると、爆発曲線は連続微分可能になることを示した。ただし、この場合は、古典解の最大存在時間は  $\partial_t u$  の発散する時間であるため、爆発曲線  $T$  の定義は

$$T(x) = \sup \{t \in (0, T^*) \mid |\partial_t u(x, t)| < \infty\} \quad (x \in B_{R^*})$$

となる。Caffarelli–Friedman[CF] と類似の結果が成り立つことが示されたが、着目している初期値が異なる。

### 2.2.2 爆発曲線の特異性に関する先行研究

§2.2.1 で挙げた先行研究により、爆発曲線付近での解が、ある意味で常微分方程式の解に近い性質を持つ場合に爆発曲線は滑らかになることが示されたが、そうでない場合、爆発曲線の滑らかさはどうなるだろうか？この場合、爆発曲線は滑らかにならない、つまり特異性が生じることが予想される。このような直感を裏付けるように、Merle–Zaag[MZ] では、初期条件  $u(x, 0), \partial_t u(x, 0)$  に符号変化がある場合、爆発曲線が特異点を持つことを示した。初期値に符号変化があると、解  $u$  が  $+\infty$  と  $-\infty$  に発散するところが生じる。その間に解  $u$  の値が 0 となり、発散しない点  $x = a$  が生じる。このとき、 $x = a$  では解  $u$  が発散しないため爆発曲線は定義できないが、 $x \neq a$  では解  $u$  が発散するため爆発曲線  $T$  が定義でき、波動方程式の解  $u$  は常微分方程式の解のような性質を持つ

ことができないことを示すことができる。さらに、

$$T'(x) \downarrow -1 \quad (x \downarrow a) \quad \text{かつ} \quad T'(x) \uparrow 1 \quad (x \uparrow a)$$

が成り立つ、つまり、爆発曲線の傾きが特性曲線の傾きに収束することが示された。特に  $x = a$  では爆発曲線に特異性が生じる。これと類似の結果が Godin[G1] により、 $F = e^u$  の場合にも示されている。

### 2.3 考えたい問題

この爆発曲線の特異性の性質が、非線形項にある程度依存せずに成り立つ一般的なもののなのか、 $F = |u|^{p-1}u$  や  $e^u$  の場合に限った、特殊な性質なのかは分かっていなかった。また、なぜ特異点で爆発曲線の傾きが特性曲線の傾きに収束するのか、(著者には)不明瞭だった。

そこで我々は、非線形項に微分の入った  $F = |\partial_t u|^{p-1} \partial_t u$  の場合を考え、爆発曲線にいつ特異性が生じるのか、また特異性が何に起因するものなのかを考察する。Merle-Zaag[MZ] や S.[S] から類推すると、 $\partial_t u(x, 0), \partial_x u(x, 0)$  に符号変化がある場合、爆発曲線が特異性を持つことが予想される。特に本稿では、 $\partial_t u(x, 0)$  の符号変化と爆発曲線の特異性との関連性を調べる。

さらに、この問題を単純化して考察する。 $\partial_t u$  は空間変数  $x$  について奇関数とする。簡単のため、 $\partial_t u(0, t) = 0$  ( $t \geq 0$ ) とし、半空間  $\mathbb{R}^+$  で波動方程式の解を考察する。Merle-Zaag[MZ] から類推すると、 $x = 0$  は ( $\partial_t u$  が符号変化するため) 爆発曲線の特異点になり、さらに

$$T'(x) \downarrow -1 \quad (x \downarrow 0)$$

が成り立つことが期待される。これを数値・数学的に示すことが本研究の目的である。

## 3 数値例

§2.3 を踏まえ、以下では、非線形波動方程式

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 2^p |\partial_t u|^{p-1} \partial_t u, & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ \partial_t u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

を考える。非線形項を 4 階微分可能にするため、 $p = 2, 3$  または 4 以上の定数とする。

数値解法の収束性を保証するために、(3.1) の書き直しを行う。 $\phi := \partial_t u + \partial_x u$ ,  $\psi := \partial_t u - \partial_x u$  とおくと、(3.1) は次のように書き直すことができる：

$$\begin{cases} \partial_t \phi - \partial_x \phi = |\phi + \psi|^{p-1} (\phi + \psi), & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ \partial_t \psi + \partial_x \psi = |\phi + \psi|^{p-1} (\phi + \psi), & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ (\phi + \psi)(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ \phi(x, 0) = f(x), \quad \psi(x, 0) = g(x), & x \geq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

**注意 1.** 数値計算では  $x \in [0, L]$  ( $L > 0$ ) とし,  $x = L$  では齊次 Neumann 境界条件を課す.

1. 本稿での数値計算は,  $x = 0$  での爆発曲線の特異性を調べるのが目的である. また, 波動方程式の解が有限伝播性を持つことから, 依存領域の外の解の情報は使われない. したがって, 数値計算の対象は半空間での波動方程式だが, 原点に近いところを数値計算すれば十分である.
2. あるところより外側で定数の初期値を取れば, 十分外側では波動方程式の解は常微分方程式の解となる.

以上の理由から,  $x = L$  で齊次 Neumann 境界条件を課すことは妥当だと言える.

$J \in \mathbb{N}$  とし,  $x_j = jh$ ,  $h = L/J$  とする.  $\tau$  を時間の刻み幅とし,  $\tau = h$ ,  $t_n = n\tau$  とする. (3.2) の差分近似:  $\phi_j^n \approx \phi(x_j, t_n)$ ,  $\psi_j^n \approx \psi(x_j, t_n)$  ( $1 \leq j \leq J$ ,  $n \geq 0$ ),

$$\begin{cases} \phi_j^{n+1} - \phi_j^n - \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{h} = |\phi_j^n + \psi_j^n|^{p-1} (\phi_j^n + \psi_j^n), \\ \psi_j^{n+1} - \psi_j^n + \frac{\psi_j^n - \psi_{j-1}^n}{h} = |\phi_j^n + \psi_j^n|^{p-1} (\phi_j^n + \psi_j^n), \\ \phi_{j+1}^n = \phi_j^n, \quad \psi_0^n = -\phi_1^{n-1}, \\ \phi_j^0 = f(x_j), \quad \psi_j^0 = g(x_j) \end{cases} \quad (3.3)$$

を考える. 各  $x_j$  での爆発時間  $T(x_j)$  の近似を  $T_j = \tau \cdot n_j(\tau)$  で定義する. ここで,  $n_j(\tau)$  は次を満たす最小の自然数である.

$$\phi_j^{n_j(\tau)-1} + \psi_j^{n_j(\tau)-1} \leq \frac{1}{\tau \cdot \text{eps}} \quad \text{かつ} \quad \phi_j^{n_j(\tau)} + \psi_j^{n_j(\tau)} > \frac{1}{\tau \cdot \text{eps}}. \quad (3.4)$$

この爆発時間の近似は, Cho[C] により提案され, またその取束性が数学的に証明されている. (3.3) を用いて計算した結果を図 2-5 に示す.

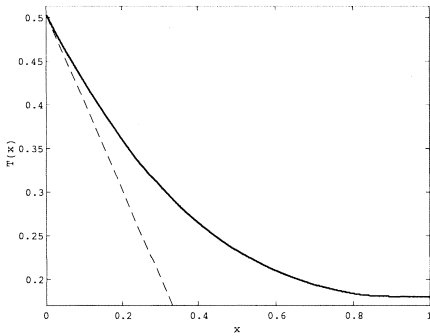


図 2:  $p = 2$ ,  $L = 1$ .

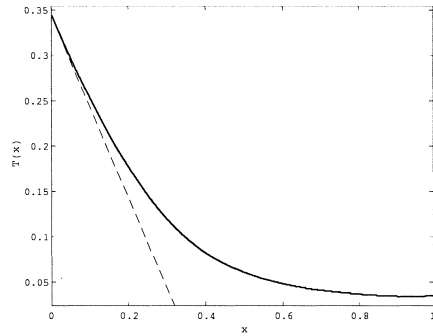


図 3:  $p = 3$ ,  $L = 1$ .

図 2,3 では  $J = 1000$ ,  $f(x) = 2 \sin(\pi x/2) + 0.1$ ,  $g(x) = \sin(\pi x/2) - 0.1$  の場合の数値爆発曲線  $T = (T_j)$  を表している. 横軸が空間  $x$ , 縦軸が時間  $t$  で, 実線が爆発曲線の近似  $T$ , 点線が傾き  $-1$  の直線である.  $x = 0$  で  $T$  が傾き  $-1$  の直線に接していることから,  $T'(x) \downarrow -1$  ( $x \downarrow 0$ ) が

成り立つことが数値計算から予想される。

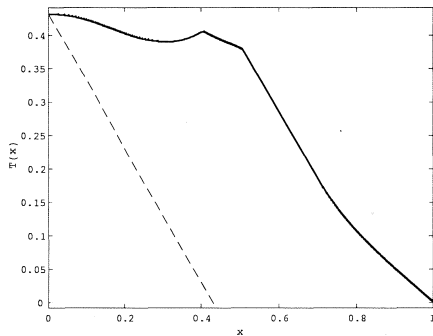


図 4:  $p = 2, L = 1$ .

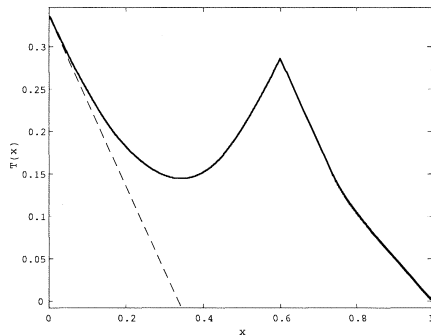


図 5:  $p = 3, L = 1$ .

図 4,5 では  $J = 1000$ ,  $f(x) = \sin(3\pi x/2) + 2$ ,  $g(x) = \sin(\pi x/2) - 2$  の場合の  $T$  を表している。横軸が空間  $x$ , 縦軸が時間  $t$  で, 実線が爆発曲線, 点線が傾き  $-1$  の直線である。  $p = 3$  の場合,  $x = 0$  で  $T$  が傾き  $-1$  の直線に接していることから  $T'(x) \downarrow -1$  ( $x \downarrow 0$ ) が成り立つことが数値計算から予想される。しかし,  $p = 2$  の場合,  $x = 0$  で  $T'(x) \uparrow 0$  ( $x \downarrow 0$ ) となっている。したがって, 波動方程式の解を奇関数で拡張しても, 爆発曲線は特異性を持たず滑らかになることが分かる。このことから, 爆発曲線  $T$  の特異性には  $\partial_t u$  の符号変化だけでなく,  $p$  や  $\partial_t u, \partial_x u$  の関係性も考慮すべきであることが予想される。

## 4 数学的に得られた結果

### 4.1 主結果

この章では, 数値計算結果から予想されたことを部分的に裏付ける, 爆発曲線について数学的に得られた結果について述べる。また, 数値解法の収束性を保証するために (3.1) を (3.2) に書き直したが, (3.2) は爆発曲線の特異性の解析にも適しているため (詳しくは注意 2 を参考のこと), 以後 (3.2) を考察する。

本稿では以下の時空間で定義された台形と直角二等辺三角形の中での解の挙動を考える。 $Q^*, R^*, R_1, R_2, S^*, T^*$  を正定数とし,

$$\begin{aligned} B_{R_1, R_2} &= \{x \in \mathbb{R} \mid R_1 < x < R_2\}, \\ K_-(x_0, t_0) &= \{(x, t) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid |x_0 - x| < t_0 - t, t > 0\} \quad (x_0, t_0 \geq 0), \\ K_1 &= \bigcup_{x \in B_{Q^*+T^*, Q^*+T^*+R^*}} K_-(x, T^*), \quad K_2 = K_-(0, S^*), \\ K &= K_1 \cup K_2 \end{aligned}$$

と定義する。以下では  $Q^* + T^* < S^* < Q^* + 2T^*$  を仮定する。

$K$  内に、確実に爆発曲線を存在させるために、常微分方程式系：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \tilde{\phi} = |\tilde{\phi} + \tilde{\psi}|^{p-1} (\tilde{\phi} + \tilde{\psi}), & t \geq 0 \\ \frac{d}{dt} \tilde{\psi} = |\tilde{\phi} + \tilde{\psi}|^{p-1} (\tilde{\phi} + \tilde{\psi}), & t \geq 0 \\ \tilde{\phi}(0) = \gamma, \quad \tilde{\psi}(0) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

を考える。ここで  $\gamma$  は正定数である。

このとき、 $\gamma$  のみに依存するある正定数  $\tilde{T}$  が存在して、

$$(\tilde{\phi} + \tilde{\psi})(t) \rightarrow \infty \quad (t \rightarrow \tilde{T})$$

が成り立つ。以下の条件が成り立つことを仮定する。

$$(A1) \quad \tilde{T} < S^* - Q^* - T^*.$$

$$(A2) \quad \begin{cases} f \geq \gamma, \quad g \geq -\gamma & \text{in } \overline{B_{0, Q^*+R^*+2T^*}}, \\ g \geq 0 & \text{in } \overline{B_{Q^*, Q^*+R^*+2T^*}}. \end{cases}$$

$$(A3) \quad f, g \in C^4(\overline{B_{0, Q^*+R^*+2T^*}}).$$

$$(A4) \quad \text{ある正定数 } \varepsilon_0 \text{ が存在し, } 2\gamma^p \geq (1 + \varepsilon_0)(|\partial_x f| + |\partial_x g|) \quad \text{in } \overline{B_{Q^*, Q^*+R^*+2T^*}}.$$

$$(A5.1) \quad \partial_x f \geq 0, \quad \partial_x g > 0 \quad \text{in } \overline{B_{0, S^*}}.$$

$$(A5.2) \quad \partial_x^2 f, \quad \partial_x^2(f + g) \geq 0 \quad \text{in } \overline{B_{0, S^*}}.$$

$$(A5.3) \quad \partial_x^3 f, \quad \partial_x^3 g \geq 0 \quad \text{in } \overline{B_{0, S^*}}.$$

$$(A6) \quad \partial_x(f - g) \geq 0 \quad \text{in } \overline{B_{0, S^*}}.$$

**定理 4.1.**  $Q^*, R^*, S^*, T^*$  を正定数とし、 $Q^* + T^* < S^* < Q^* + 2T^*$  が成り立つことを仮定する。また、(3.2) の初期値  $f, g$  が (A1)-(A6) を満たすことを仮定する。このとき、次を満たす関数  $T \in C^1(B_{0, Q^*+R^*+T^*})$  が一意的に存在する。

$$\textcircled{1} \quad 0 < T(x) < S^* \quad (x \in B_{0, Q^*+R^*+T^*}).$$

$$\textcircled{2} \quad (3.2) \text{ の解 } (\phi, \psi) \in (C^{3,1}(\Omega))^2 \text{ が一意的に存在し,}$$

$$\phi(x, t), \psi(x, t) \uparrow \infty \quad (t \uparrow T(x))$$

を満たす。ここで、 $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in B_{0, Q^*+R^*+T^*}, 0 < t < T(x)\}$ 。

$$\textcircled{3} \quad T'(x) \downarrow -1 \quad (x \downarrow 0) \text{ が成り立つ.}$$

## 4.2 定理 4.1 の証明のアイデア

この章では、定理 4.1 ③:

$$T'(x) \downarrow -1 \quad (x \downarrow 0) \quad (4.2)$$

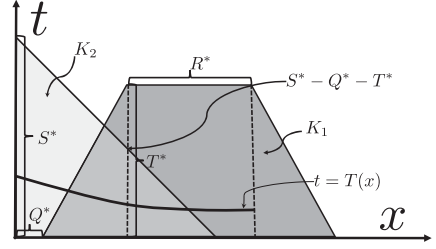


図 6. 依存領域

の証明のアイデアを述べる. 以下では爆発曲線  $T$  が  $x \in \overline{B_{0,S^*}}$  に対して定義され, かつ  $T \in W^{1,\infty}(B_{0,S^*})$  が成り立つことを仮定する. ただし,  $T(0) = \lim_{x \downarrow 0} T(x)$  と定義する. さらに

$$\phi(x, t) \uparrow \infty \quad \text{as } t \uparrow T(x) \quad (x \in B_{0,S^*}), \quad \partial_t \phi > 0 \quad \text{in } \Omega_*, \quad (4.3)$$

$$\partial_x \phi \geq 0 \quad \text{in } \Omega_*, \quad (4.4)$$

$$\phi, \psi \in C^{3,1}(\Omega_*), \quad \left| \frac{\partial_x \phi}{\partial_t \phi} \right| \leq 1 \quad \text{in } \Omega_* \quad (4.5)$$

が成り立つことを仮定する. ここで,  $\Omega_* = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \overline{B_{0,S^*}}, 0 \leq t < T(x)\}$  である. (A1)–(A6) を仮定すると, 上記の仮定は証明することができるが, 紙数の関係から省略する.

爆発曲線  $T$  を直接扱うのは難しいため, 爆発曲線  $T$  の近似の一つである関数  $E_n$  について考察する.  $n \in \mathbb{N}$  を任意に取り,

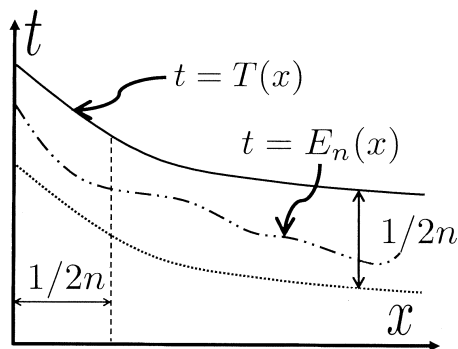
$$M_n := \sup_{x \in \overline{B_{1/2n, S^*}}} \phi(x, T(x) - 1/2n)$$

とおく. このとき, (4.3) より, 陰関数  $E_n$  が存在し,

$$\phi(x, E_n(x)) = M_n \quad (x \in \overline{B_{0,S^*}}),$$

$$|T(x) - E_n(x)| \leq \frac{1}{2n} \quad (x \in \overline{B_{1/2n, S^*}})$$

が成り立つ. 陰関数定理および (4.3), (4.4) から,



$$E'_n(x) = -\frac{\partial_x \phi}{\partial_t \phi}(x, E_n(x)) \leq 0 \quad (x \in \overline{B_{0,S^*}})$$

が成り立つ. したがって,

$$|T(x) - E_n(x)| \leq \frac{1}{n} \quad (x \in \overline{B_{0,1/2n}}) \quad (4.6)$$

が成り立つ.

一方で, 陰関数定理を用いると  $n \in \mathbb{N}$  に対し,

$$E'_n(0) = -\frac{\partial_x \phi}{\partial_t \phi}(0, E_n(0)) = -1 + \frac{|\phi + \psi|^{p-1}(\phi + \psi)}{\partial_t \phi}(0, E_n(0)) = -1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

が成り立つ. したがって, (4.2) を示すには, 陰関数  $E_n$  だけではなくその導関数も爆発曲線  $T$  の導関数の近似になっている, 特に,

$$\sup_{x \in \overline{B_{0,S^*}}} |E'_n(x) - T'(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.7)$$

を示せばよい. (4.5) および,

$$E'_n(x) = -\frac{\partial_x \phi}{\partial_t \phi}(x, E_n(x))$$



と書けることから、任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $E'_n$  の一様有界性と同程度連続性が成り立つことが分かる。したがって、Ascoli-Arzelà より、ある部分列  $\{n_k\}$  とある関数  $\tilde{E}_0 \in C(\overline{B_{0,S^*}})$  が存在して、

$$\sup_{x \in \overline{B_{0,S^*}}} |E'_{n_k}(x) - \tilde{E}_0(x)| \rightarrow 0 \quad (n_k \rightarrow \infty)$$

が成り立つ。(4.7) より、 $T'(x) = \tilde{E}_0(x)$  が成り立つことも分かる。したがって、 $\{n\}$  を Ascoli-Arzelà で選んだ  $\{n_k\}$  に取り直すことで (4.7) を得る。

**注意 2.** 今回は爆発曲線  $T$  の近似として、 $\phi$  の陰関数を採用しているが、爆発曲線  $T$  では  $\phi$  だけではなく、 $\phi + \psi$  や  $\psi$  も発散しているため、 $\phi + \psi$  の陰関数や  $\psi$  の陰関数を爆発曲線  $T$  の近似として考えることも可能である。しかし、 $\phi + \psi$  や  $\psi$  の陰関数の導関数は一様有界性や同程度連続性を持たないため、陰関数が、その導関数まで込めて爆発曲線の近似になることを保証できるのは  $\phi$  の陰関数のみである。波動方程式を 1 階の方程式系に書き直したことで、(この問題設定では)  $\phi$  の爆発が支配的であり、なぜ爆発曲線の傾きが  $x = 0$  軸付近で  $-1$  に収束するのか見えやすくなったと言える。

## 5 おわりに

本稿では、爆発曲線の特異性を数値・数学的な側面から考察した。Godin[G1] や Merle-Zaag[MZ] から、爆発曲線に特異性が生じる十分条件の一つは、「初期値の符号変化」であることが期待されるため、本稿では特に、非線形項を  $F = |\partial_t u|^{p-1} \partial_t u$  とし、 $\partial_t u$  が奇関数である場合に制限して  $x = 0$  での爆発曲線の傾きを考察した。

数値計算結果から、多くの場合、

$$T'(x) \downarrow -1 \quad (x \downarrow 0) \quad \text{かつ} \quad T'(x) \uparrow 1 \quad (x \uparrow 0)$$

が期待されることが数値的に分かった。特に、 $x = 0$  で爆発曲線は特異的になる。この結果を(部分的に)数学的に示した。しかし、

$$T'(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0)$$

と数値的に見れる実験結果もあり、初期値に符号変化があっても爆発曲線が特異的にならない例も数値的に見つかった。爆発曲線の特異性は、初期値の符号変化だけではなく非線形項の指数  $p$  と初期値の関係性にも起因することが予想される。

また、 $x = 0$  では斉次 Dirichlet 境界条件を課しているので、

$$\partial_t u(0, t) = 0 \quad (0 \leq t < T(0))$$

が成り立つ。ただし、 $T(0) = \lim_{x \downarrow 0} T(x)$  とする。だが、 $\theta$  を適切に選ぶと

$$(\cos \theta \partial_x + \sin \theta \partial_t) u(x, t) \rightarrow \infty \quad (x, t) \rightarrow (0, T(0))$$

となることが期待される。その際、blow-up rate は (4.1) のオーダーと一致するのか、しないのか (一致する場合 Type 1, 一致しない場合 Type 2 と呼ぶ),  $\theta$  の値 (特性曲線の傾きと一致する場合, 一致しない場合など) で blow-up rate はどのように変化するのか, Type 2 の場合の爆発曲線の傾きや, さらに Type 2 となる  $x$  の集合は測度を持つのか持たないかなどを明らかにすることが今後の研究課題である。

■謝辞 本研究は, 科学研究費補助金 (挑戦的萌芽研究: 課題番号 15K13461, 研究活動スタート支援: 課題番号 16H07288) の助成を受けている。

## 参考文献

- [CF] L. A. Caffarelli and A. Friedman, *The blow-up boundary for nonlinear wave equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **297** (1986), 223–241.
- [C] C. H. Cho, *On the computation for blow-up solutions of the nonlinear wave equation*, (submitted).
- [G1] P. Godin, *The blow-up curve of solutions of mixed problems for semilinear wave equations with exponential nonlinearities in one space dimension II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **17** (2000), 779–815.
- [G2] P. Godin, *The blow-up curve of solutions of mixed problems for semilinear wave equations with exponential nonlinearities in one space dimension. I*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **13** (2001), 69–95.
- [HZ] M.A. Hamza and H. Zaag *Blow-up behavior for the Klein-Gordon and other perturbed semilinear wave equations*, Bull. Sci. Math., **137** (2013), 1087–1109.
- [MZ] F. Merle and H. Zaag, *Existence and classification of characteristic points at blow-up for a semilinear wave equation in one space dimension*, Amer. J. Math., **134** (2012), 581–648.
- [OT] M. Olita and H. Takamura, *Remarks on the blow-up boundaries and rates for nonlinear wave equations*, Nonlinear Anal., **33** (1998), 693–698.
- [S] T. Sasaki, *Regularity and singularity of the blow-up curve for a wave equation with a derivative nonlinearity*, Advances in Differential Equations, accepted for publication.
- [U] H. Uesaka, *The blow-up boundary for a system of semilinear wave equations*, Further progress in analysis, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2009), 845–853.