数理解析研究所講究録 第2094巻 2018年 36-43

高次要素を用いる圧力安定化有限要素法の解析と高レイノルズ数流れ問題への応用

Analysis of a pressure-stabilized finite element method with higher-order elements and application to high-Reynolds-number flow problems

内海 晋弥
早稲田大学基幹理工学部, uchiumi@aoni.waseda.jp

Shinya Uchiumi
School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

1 はじめに

本稿では，Navier–Stokes 問題と Oseen のための高次要素を用いる圧力安定化・局所線形化流速 Lagrange–Galerkin スキームを導入する．Oseen 問題に対するスキームでは，粘性係数依存性に注目した理論的な誤差評価を示す．加えて，ある Navier–Stokes 流れの数値計算結果を紹介し，導入したスキームの現実的な問題における有効性を示す．

非圧縮粘性流体の運動を記述する Navier–Stokes 方程式と，その移流項を線形化した Oseen 方程式に対する数値計算スキームを考える．特に粘性係数が小さい場合，すなわち，レイノルズ数が高い場合を考察する．このような状況で安定な計算を行うためには，物質微分項の近似方法の選択が重要な論点の一つであることが知られている．特性曲線の方法と有限要素法を結合させた Lagrange–Galerkin 法 (LG 法) はそのような状況に対処する有効な手法の一つである [11, 12, 13, 14]．解くべき連立一次方程式に現れる係数行列は対称であり，ゆえに，共役勾配 (CG) 法や最小残差 (MINRES) 法 [1] といった，効率が良い線形ソルバーを用いることができる．LG 法はスキームの定式化と実装との間に乖離があることが問題であったが，最近，局所線形化流速を用いて，数値積分を使うことなく厳密に計算できかつ収束性を証明できるスキームが作成され，この問題が解消された [13, 14]．

これらの流体問題の有限要素解析において，流速と圧力を近似する空間の組の選択も重要な論点である．この考察は，より簡単な定常 Stokes 問題においても必要である．純粋な Galerkin スキームでは，その組は inf-sup 条件を満たすことが要求され，Taylor–Hood 要素とも呼ばれる $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_{k-1}$ 要素 ($k \geq 2$) がそれを満たす代表的なものの一つである [2]．ここで，P_k は三角形 k 次要素を表す．一方で，流速と圧力に同じ次数の有限要素空間を用いる $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ 要素 ($k \geq 1$) を使う際には適切な安定化項が必要となる．定常 Stokes 問題を考えるとき，$\mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1$ 要素に対しては Brezzi–Pitkäranta [3] によって安定化項が導入され，Burman [4] によって高次要素へ拡張された．非定常 Stokes 問題に対しては，Burman–Fernández [5] で [4] と同種の安定化項を用いた対称なスキームが解析された．一方で，運動方程式の残差に基づくタイプの安定化項も研究されてきた [9, 10]．しかし，スキームの実装や解析が前者のタイプの安定化項よりも，特に非定常問題に対して，複雑である．

Navier–Stokes 問題や Oseen 問題における移流項の制御の問題とは別に，粘性係数依存性はより単純な定常 Stokes 問題にも現れる．その依存性の改善方法の一つは grad-div 安定化項の付加である．非定常 Oseen 問題に対して de Frutos ら [7] により，時間方向に差分近似，空間方向に Galerkin 近似を用い，grad-div 項を付加したスキームが考察され，その粘性係数依存性に対する効果が解析された．また，非圧縮性を厳密に満たす Scott–Vogelius 要素が Navier–Stokes 問題に

対して用いられ，有効性が報告されている [6].

本稿では， Oseen 問題に対する $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ 圧力安定化・Lagrange–Galerkin スキームを導入し，Navier–Stokes 問題と合わせて数値結果を示す．ここでは Burman [4] の安定化項を加えたスキームを考察する．このスキームは非定常 Stokes 問題に対して考察されていた [5] のスキームと同種のものであるが，彼らのスキームとは安定化項のパラメータの取り方が異なる．また，本スキームは Lagrange–Galerkin 法の利点である対称性が引き継がれている．さらに [14] と同じく局所線形化流速が用いられており，スキームに忠実な実装が可能である．第 2 節では，Oseen 問題のためのスキームに対して，[15] に基づき，粘性係数依存性に注目した誤差評価を示す．第 3 節では，円板回りの Navier–Stokes 流れの数値計算結果を報告する．そこでは，$\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_{k-1}$ 要素を用いるスキームと比較して，$\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ 圧力安定化法が良好な結果を示すことが観察できる．

2 Oseen 問題のための Lagrange–Galerkin スキームとその誤差評価

$(u,p):\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ を未知関数とする Oseen 問題：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+(w\cdot\nabla)u-\nu\Delta u+\nabla p=f,&\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \nabla\cdot u=0,&\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u=0,&\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u(\cdot,0)=u^0,&\quad x\in\Omega\end{aligned}\tag{Os}$$

を考える．ここに，$\Omega\subset\mathbb{R}^d, d=2,3$ は多角形または多面体領域，$T>0$, $0<\nu\le 1$ はそれぞれ時刻，粘性係数を表す定数，$w,f:\Omega\times(0,T)\to\mathbb{R}^d$, $u^0:\Omega\to\mathbb{R}^d$ は与えられた関数である．$\partial\Omega$ は Ω の境界を表す．

Oseen 問題に対する数値計算法を考える．まず，特性曲線に沿った物質微分の離散化を導入する．w を滑らかとする．特性曲線 $X(t;x,s)$ は常微分方程式系

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt}(t;x,s)&=w(X(t;x,s),t),\quad t<s,\\ X(s;x,s)&=x\end{aligned}$$

の解として定義される．これを用いると，物質微分項 $(\frac{\partial}{\partial t}+(w\cdot\nabla))u$ を

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}+(w\cdot\nabla)u\right)(X(t),t)=\frac{d}{dt}u(X(t),t)$$

と書ける．$\Delta t>0$ を時間刻みとする．$t^n\equiv n\Delta t$, $u^n(x)\equiv u(x,n\Delta t)$ とし，f^n なども同様に定める．流速場 $w^*:\Omega\to\mathbb{R}^d$ に対して写像 $X_1(w^*)$ を

$$X_1(w^*)(x)\equiv x-w^*(x)\Delta t$$

で定める．$X_1(w(x,t))$ は $X(t-\Delta t;x,t)$ の Euler 近似である．このとき

$$\frac{\partial u^n}{\partial t}+(w^n\cdot\nabla)u^n=\frac{u^n-u^{n-1}\circ X_1(w^{n-1})}{\Delta t}+O(\Delta t)$$

が成り立つ．ここで $\circ$ は関数の合成を表す．また，以下では $N_T\equiv\lfloor T/\Delta t\rfloor$ を総時間ステップ数とする．

次に，有限要素空間を導入する．$\{\mathcal{T}_h\}_{h\downarrow 0}$ を $\overline{\Omega}$ の正則な三角形（四面体）分割列とし，各要素 $K \in \mathcal{T}_h$ は少なくとも1つ境界上に無い頂点を持つとする．h を要素の最大直径とする．整数 $m \geq 1$ に対して，$W_h^{(m)} \subset H^1(\Omega)$ を $\mathcal{T}_h$ 上の P_m 有限要素空間とし，$\Pi_h^{(m)}$ を P_m 有限要素空間への補間作用素とする．$k \geq 2$ に対して，

$$V_h \times \overline{Q}_h := ((W_h^{(k)})^d \cap H_0^1(\Omega)^d) \times (W_h^{(k-1)} \cap L_0^2(\Omega))$$

を流速，圧力に対応する $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_{k-1}$ 有限要素空間とする．これは（一般化された）Taylor–Hood 要素とも呼ばれ，離散化された Stokes 問題の適切性を保証する inf-sup 条件を満たす [2]．双一次形式 a, b を

$$a(u, v) := \nu(\nabla u, \nabla v), \quad b(v, q) := -(\nabla \cdot v, q)$$

で定める．ここで $(\cdot, \cdot)$ は $L^2(\Omega), L^2(\Omega)^d$ または $L^2(\Omega)^{d\times d}$ の内積である．

スキーム OsTH. $u_h^0 \in V_h$ を u^0 の近似とする．次を満たす $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times \overline{Q}_h$ を求めよ．

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)} w^{n-1})}{\Delta t}, v_h\right) + a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) &= (f^n, v_h), \quad && \forall v_h \in V_h, \\
b(u_h^n, q_h) &= 0, && \forall q_h \in \overline{Q}_h.
\end{aligned}$$

$\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ 有限要素空間と安定化項を導入する．$k \geq 1$ に対して，

$$V_h \times Q_h := ((W_h^{(k)})^d \cap H_0^1(\Omega)^d) \times (W_h^{(k)} \cap L_0^2(\Omega))$$

を $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ 有限要素空間とする．この要素は inf-sup 条件を満たさないので圧力安定化項を必要とする．圧力安定化項 $\mathcal{C}_h$ を

$$\mathcal{C}_h(p, q) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{2k} \sum_{|\alpha| = k} (D^\alpha p, D^\alpha q)_K$$

で定める．ここに，h_K は要素 K の直径であり，$(\cdot, \cdot)_K$ は $L^2(K)$ の内積である．この項は Burman [4] によって導入されている．$\mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1$ 要素に対する Brezzi–Pitkäranta [3] の安定化項の高次要素への拡張である．

スキーム OsPstab. $u_h^0 \in V_h$ を u^0 の近似とする．次を満たす $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times Q_h$ を求めよ．

$$\begin{aligned}
\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)} w^{n-1})}{\Delta t}, v_h\right) + a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) &= (f^n, v_h), \quad && \forall v_h \in V_h, \\
b(u_h^n, q_h) - \delta_0 \mathcal{C}_h(p_h^n, q_h) &= 0, && \forall q_h \in Q_h.
\end{aligned}$$

ここで，$\delta_0 > 0$ は安定化パラメータである．

注意 1. 1. スキームから生じる連立一次方程式の係数行列は対称である．

2. 非定常 Stokes 問題に対して Burman–Fernández [5] では [4] と同種の安定化項を用いた対称なスキームが解析されていた．彼らは安定化項のパラメータ δ_0 を ν に依存して取っていたが，その選択では以下で示す ν に依存しない誤差評価を得ることは困難と思われる．

3. $k = 1$ のとき，スキーム OsPstab は Notsu–Tabata [11] により作成と解析が行われている．下では，粘性係数に注目した新しい誤差評価を示す．

4. 写像 $X_1(\cdot)$ では，元の流速場 w^{n-1} の代わりに局所線形化流速場 $\Pi_h^{(1)} w^{n-1}$ が使われている．これの導入により $(u_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)} w^{n-1}), v_h)$ は厳密に積分することができる [13, 14]．元の流速場を使った時，厳密な積分値を求めることは困難である．

本スキームの粘性係数依存性に注目した誤差評価を述べる．

定理. u_h をスキーム OsPstab の解とし，(Os) の解 (u, p) は十分滑らかとする．流速場 w は十分滑らかで $\partial\Omega$ で 0 とする． 時間刻み Δt は $0 < \Delta t \le \Delta t_0$, $\Delta t_0 := (4\alpha_* |w|_{C([0,T];W^{1,\infty}(\Omega)^d)})^{-1}$ を満たすとする．ここで α_* はメッシュの最小角のみに依存する正定数である．u_h^0 は u^0 の P_k 有限要素空間における Lagrange 補間とする．このとき，$\nu, h, \Delta t$ に依存しない正定数 c が存在して

$$\|u - u_h\|_{\ell^\infty(L^2)}, \sqrt{\nu}\,\|\nabla(u - u_h)\|_{\ell^2(L^2)} \le c(\Delta t + h^k + h^2) \qquad (*)$$

が成立する．ここに，$\psi = \{\psi^n\}_{n=0}^{N_T}$ に対して，

$$\|\psi\|_{\ell^\infty(L^2)} \equiv \max\{\|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}; n = 0, \ldots, N_T\},$$

$$\|\psi\|_{\ell^2(L^2)} \equiv \left(\Delta t \sum_{n=1}^{N_T} \|\psi^n\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2}$$

である．

注意 2. 1. 定数 c は厳密解 u, p に依存する．

2. スキーム OsTH に対しても (*) と同じ収束次数の評価を得ているが，定数 c が ν に依存する．

3. (*) 右辺の h^2 の項は，局所線形化流速と元の流速との差の評価から現れる．

定理の証明は [15] を参照されたい．

3 数値結果

本節では Navier–Stokes 問題の数値例を示す．Navier–Stokes 問題は (Os) において w を未知流速場 u に置き換えることにより得られる．対応するスキーム NSTH とスキーム NSPstab は，それぞれ，スキーム OsTH とスキーム OsPstab において，w^{n-1} を u_h^{n-1} で置き換えることにより得られる．

スキーム NSTH. 次を満たす $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times \overline{Q}_h$ を求めよ．

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)} u_h^{n-1})}{\Delta t}, v_h\right) + a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \ \forall v_h \in V_h,$$
$$b(u_h^n, q_h) = 0, \qquad \forall q_h \in \overline{Q}_h.$$

スキーム NSPstab. 次を満たす $\{(u_h^n, p_h^n)\}_{n=1}^{N_T} \subset V_h \times Q_h$ を求めよ．

$$\left(\frac{u_h^n - u_h^{n-1} \circ X_1(\Pi_h^{(1)} u_h^{n-1})}{\Delta t}, v_h\right) + a(u_h^n, v_h) + b(v_h, p_h^n) = (f^n, v_h), \ \forall v_h \in V_h,$$
$$b(u_h^n, q_h) - \delta_0 \mathcal{C}_h(p_h^n, q_h) = 0, \qquad \forall q_h \in Q_h.$$

ここで，$\delta_0 > 0$ は安定化パラメータである．

図 1: 領域と境界条件.

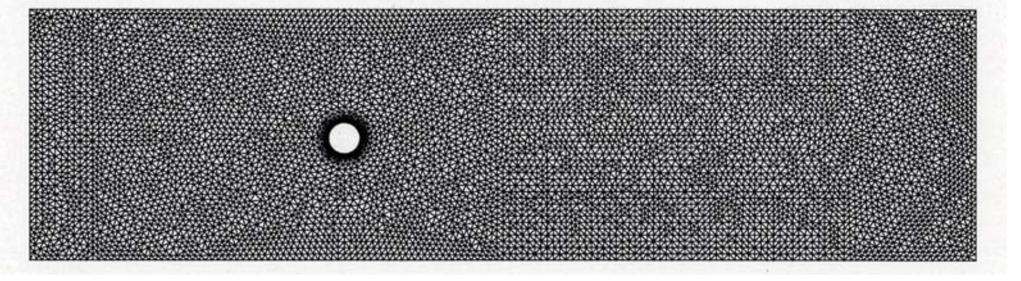


図 2: メッシュ 1

これまでところ，スキーム NSPstab に対する粘性係数依存性を排する理論的な誤差評価は得られていない．[15] では，創生解から生成される Navier–Stokes 問題に対してこれらのスキームの誤差が数値的に比較され，スキーム NSPstab の誤差がより小さいことが報告されている．特に粘性係数が小さい時にこの差は顕著である．以下では，円板回りにおける Navier–Stokes 流れの数値実験を行い，両者のスキームの精度を比較する．

領域 Ω と Dirichlet 境界条件を図 1 のように与える．Navier–Stokes 問題において $\nu = 10^{-3}$, $f = 0$ とする．

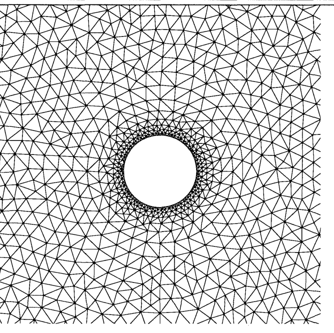
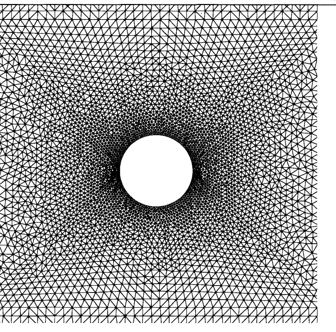
2 つのスキームにおいて，時間刻みを $\Delta t = 0.01$ とする．FreeFem++ [8] を使って 2 つのメッシュを作成した．円板周辺のみを細かく分割したメッシュ 1 と，全体的に細かく分割したメッシュ 2 を用いる (図 2, 表 1)．両スキームにおいて $k = 2$ とする．すなわち，スキーム NSTH では $\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_1$ 要素を，スキーム NSPstab では $\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_2$ 要素を用いる．スキーム NSPstab では安定化パラメータを $\delta_0 = 10^{-3}$ とした．スキームの初期値 u_h^0 は，図 1 と同じ境界条件を課した Stokes 問題の解 (図 3) とした．なお，この Stokes 問題では粘性係数を $\nu = 1$ と設定している．

図 4 は $t^n = 20$ における u_h^n の流線と，$u_{h1}^n(1, \cdot)$ のプロファイルを示している．メッシュ 1 で $\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_2$ 要素を用いて得られた解は，メッシュ 2 で $\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_1$ 要素を用いて得られた解とほぼ一致している．一方，メッシュ 1 で $\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_1$ 要素を用いて得られた解は，これらとは異なる値をとっている．全体的に細かいメッシュ 2 によって得られた解はより厳密解に近いと考えられるので，$\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_2$ 要素を用いて得られた解がより精度が良いと考えられる．

4　おわりに

第 2 節では，非定常 Oseen 問題に対して $\mathrm{P}_k/\mathrm{P}_k$ 要素を用い，安定化項を加えるスキームを導入し，その粘性係数依存性に注目した誤差評価を述べた．Navier–Stokes 問題に対するスキームでは理論的な結果を得られていないが，第 3 節で見た円板回りの流れの数値結果では，$\mathrm{P}_2/\mathrm{P}_2$ 要素を

表 1: メッシュ 1, 2 のデータ

	メッシュ 1	メッシュ 2
円板付近の拡大図		
総要素数	14,188	26,564
総自由度 (P2/P1)	65,046	120,738
総自由度 (P2/P2)	86,568	160,824

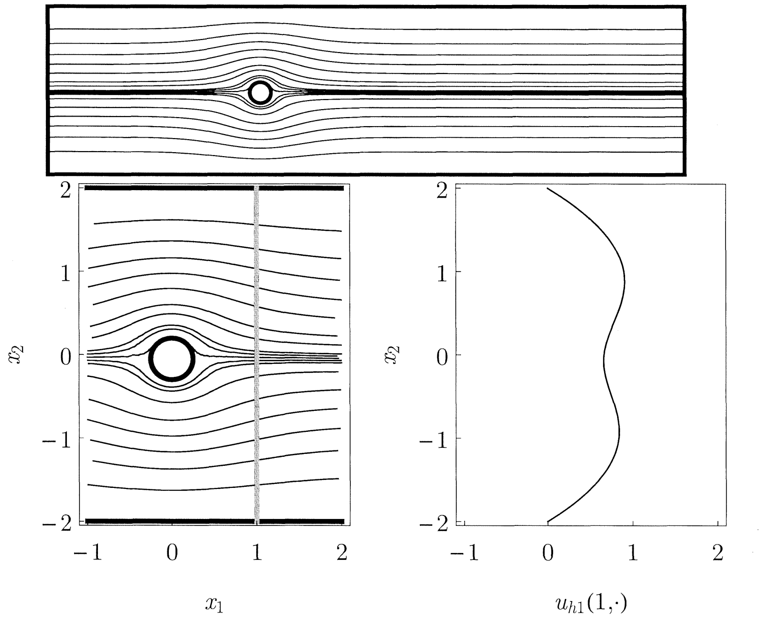


図 3: u_h^0 の流線（上，左下）と $u_{h1}^0(1,\cdot)$ のプロファイル（右下）.

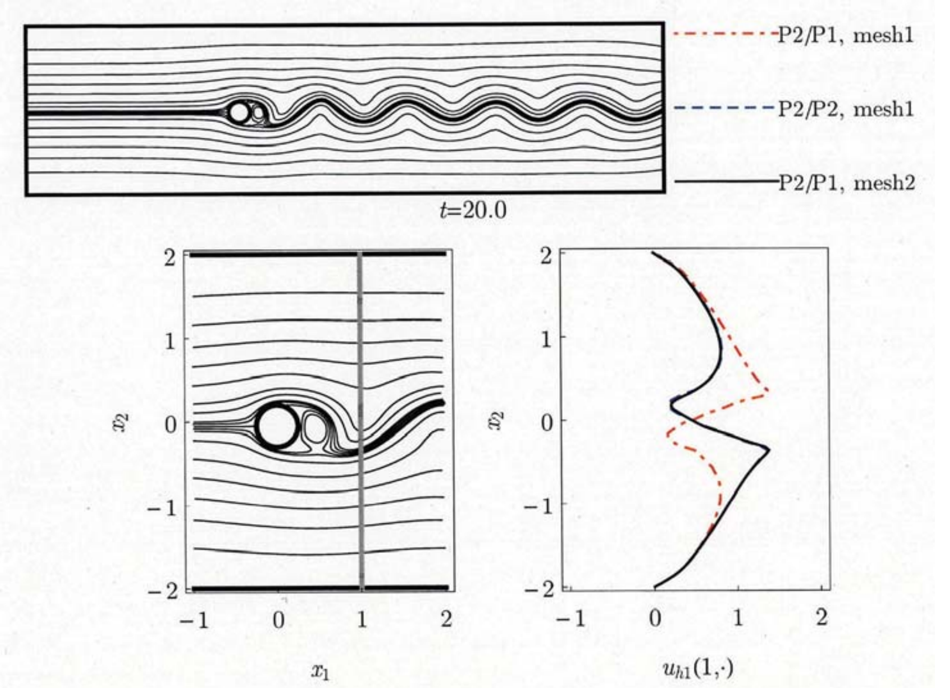


図 4: u_h^n $(t^n = 20)$ の流線（上，左下）と $u_{h1}^n(1,\cdot)$ のプロファイル（右下）.

用い安定化項を加えるスキームが，P_2/P_1 要素を用いるスキームよりも良好な結果が得られることが観察された.

参考文献

[1] M. Benzi, G.H. Golub, and J. Liesen. Numerical solution of saddle point problems. *Acta Numerica*, 14:1–137, 2005.

[2] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin. *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer, Berlin Heidelberg, 2013.

[3] F. Brezzi and J. Pitkäranta. On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations. In W. Hackbusch, editor, *Efficient Solutions of Elliptic Systems*, pages 11–19. Vieweg, 1984.

[4] E. Burman. Pressure projection stabilizations for Galerkin approximations of Stokes' and Darcy's problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1):127–143, 2008.

[5] E. Burman and M. A. Fernández. Galerkin finite element methods with symmetric pressure stabilization for the transient Stokes equations: Stability and convergence analysis. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(1):409–439, 2009.

[6] M. A. Case, V. J. Ervin, A. Linke, and L. G. Rebholz. A connection between Scott–Vogelius and grad-div stabilized Taylor–Hood FE approximations of the Navier–Stokes equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 49(4):1461–1481, 2011.

[7] J. de Frutos, B. García-Archilla, V. John, and J. Novo. Grad-div stabilization for the evolutionary Oseen problem with inf-sup stable finite elements. *Journal of Scientific Computing*, 66(3):991–1024, 2016.

[8] F. Hecht. New development in FreeFem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4):251–265, 2012.

[9] T.J.R. Hughes, L.P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. circumventing the Babuška–Brezzi condition: a stable Petrov–Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1):85–99, 1986.

[10] V. John and J. Novo. Analysis of the pressure stabilized Petrov–Galerkin method for the evolutionary Stokes equations avoiding time step restrictions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 53(2):1005–1031, 2015.

[11] H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a pressure-stabilized characteristics finite element scheme for the Oseen equations. *Journal of Scientific Computing*, 65(3):940–955, 2015.

[12] H. Notsu and M. Tabata. Error estimates of a stabilized Lagrange–Galerkin scheme for the Navier–Stokes equations. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 50(2):361–380, 2016.

[13] M. Tabata and S. Uchiumi. A genuinely stable Lagrange–Galerkin scheme for convection-diffusion problems. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 33(1):121–143, 2016.

[14] M. Tabata and S. Uchiumi. An exactly computable Lagrange–Galerkin scheme for the Navier–Stokes equations and its error estimates. *Mathematics of Computation*, 87:39–67, 2018.

[15] S. Uchiumi. A viscosity-independent error estimate of a pressure-stabilized Lagrange–Galerkin scheme for the Oseen problem. arXiv:1712.04150 [math.NA].