

Numerical simulation of vortex sheet motion approximated by point vortices

Takeshi Gotoda

Research Institute for Electronic Science, Hokkaido University *

Robert Krasny

Department of Mathematics, University of Michigan †

1 研究の背景

非粘性流体中の二次元 Vortex Sheet の時間発展については Birkhoff-Rott 方程式と呼ばれる微分積分方程式によって記述される。ここで、Vortex Sheet とは曲線上に線密度の渦が分布している状態を指す。この方程式については、その線形化方程式が Kelvin-Helmholtz 不安定性により Hadamard の意味で非適切であることから、非適切な問題であることが指摘されている。一方で、初期値が解析的なら Cauchy-Kowalewski の定理により解析的な時間局所解が存在することが証明できるため [12]、この解が有限時刻で解析性を失うかどうかの問題となる。しかし、一般に Birkhoff-Rott 方程式の数学解析は容易ではなく、滑らかな初期値に対する非適切性の数学的な証明はなされていない。一方で、Moore[9] は定常解に滑らかな微小摂動を加えた初期値について、有限時刻で Vortex Sheet の曲率が発散することを漸近解析の手法を用いて示した。また、Krasny は [4] において、Vortex Sheet を点渦近似することで Birkhoff-Rott 方程式を離散化し、その解の時間発展の数値計算を通して Moore の結果を実証した。さらに、Krasny[5] では Chorin[1] により導入された Vortex blob 法と呼ばれる方法で Birkhoff-Rott 方程式を正則化し、計算を安定させることで Vortex Sheet の爆発時間を越えた計算を可能にし、結果として渦の巻き上げ現象が起こることを示した。渦層の数学解析、数値計算に関する成果のサーベイ論文については、例えば坂上 [11] を参照されたい。上記の研究は 1 層の Vortex Sheet の結果であるが、本研究では 2 層の Vortex Sheet について、線形化方程式における安定性の解析、解の爆発の数値計算、Vortex blob 法による渦の巻き上げ現象の数値計算を行った。特に、2 層の場合には Vortex Sheet の相互作用があるため、より複雑な渦運動が数値計算によって確認できることがわかった。

〒060-0812 北海道札幌市北区北 12 条西 7 丁目, E-mail: gotoda@es.hokudai.ac.jp
4830 East Hall 530 Church Street University of Michigan Ann Arbor, MI 48109-1043

2 一層の Vortex Sheet に関する先行研究

二次元非粘性非圧縮流体における Vortex Sheet は複素曲線によって表すことができる.

$$z(\Gamma, t) = x(\Gamma, t) + iy(\Gamma, t).$$

ここで, t は時刻であり, Γ は循環を表すラグランジアンパラメータである. Vortex Sheet の時間発展は Birkhoff-Rott 方程式と呼ばれる, 以下で与えられる非線形の微分積分方程式によって記述される. これは曲線上に初期渦度が集中し, その時間発展についても曲線で表されるという仮定の下で二次元 Euler 方程式から形式的に導かれる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{z}(\Gamma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z(\Gamma, t) - z(\tilde{\Gamma}, t)} d\tilde{\Gamma}. \quad (1)$$

ただし, \bar{z} は z の複素共役を表し, 積分は Cauchy の主値である. ここで, $p(\Gamma, t) = z(\Gamma, t) - \Gamma$ が Γ について周期的でその周期が 1 と仮定すると (1) は以下で書き換えられる.

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{z}(\Gamma, t) = \frac{1}{2i} \int_0^1 \cot \pi \left(z(\Gamma, t) - z(\tilde{\Gamma}, t) \right) d\tilde{\Gamma}. \quad (2)$$

ここでは初期条件として $z(\Gamma, 0) = \Gamma + p(\Gamma, 0)$ を考える. これは定常解である $z(\Gamma, t) = \Gamma$ に摂動項 p を加えた形である. この定常解に対する安定性解析については, (1) の線形化方程式に対して $P e^{\omega t + ik\Gamma}$ なる解を求めることができ, それは

$$z(\Gamma, t) = \varepsilon(1 - i)e^{\frac{k}{2}t + ik\Gamma}, \quad z(\Gamma, t) = \varepsilon(1 + i)e^{-\frac{k}{2}t + ik\Gamma},$$

となる. 特に前者の解については, 任意の増大率を持つ短波長の解を持つことを意味しており (Kelvin-Helmholtz 不安定性), 線形方程式が Hadamard の意味で非適切な問題であることを意味している. このことから, 元の非線形 Birkhoff-Rott 方程式についても非適切な問題であることが推測されるが, 実際に Moore の漸近解析 [9] によれば,

$$z(\Gamma, 0) = \Gamma + i\varepsilon \sin \Gamma,$$

なる滑らかな初期値に対して,

$$1 + \frac{t_c}{2} + \ln t_c = \ln \frac{4}{\varepsilon},$$

を満たす時刻 t_c で Vortex Sheet の曲率 (2 回微分) が発散することが示されている (ただし, 1 回連続微分可能ではある). この事実は, Krasny による数値計算 [4] によっても実証されている. ここでは解の周期性の下, (2) を以下のように離散化する.

$$\frac{d}{dt} \bar{z}_j = \frac{1}{2iN} \sum_{k \neq j}^N \cot \pi (z_j - z_k). \quad (3)$$

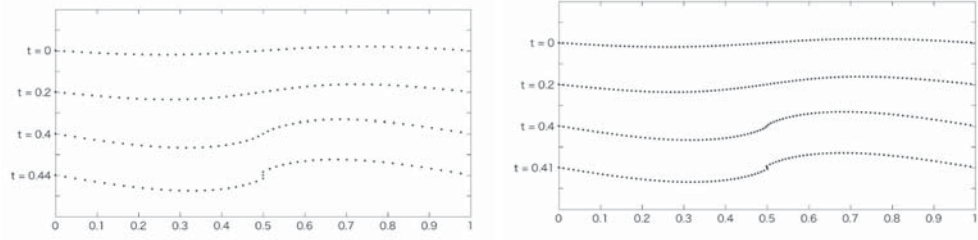


図1 点渦近似した常微分方程式 (3) の数値解. 時間発展については 4 次の Runge-Kutta 法を用いた (以下の数値計算も同様). 左図は $N = 50$, 右図は $N = 100$.

ただし, $z_j(t) = z(\Gamma_j, t)$, $\Gamma_j = (j-1)/N$, $j = 1, \dots, N$ であり, 初期データは $z_j(0) = \Gamma_j + p(\Gamma_j, 0)$ で与える. (3) は次の常微分方程式系と同値である.

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= -\frac{1}{2N} \sum_{k \neq j}^N \frac{\sinh 2\pi(y_j - y_k)}{\cosh 2\pi(y_j - y_k) - \cos 2\pi(x_j - x_k)}, \\ \frac{dy_j}{dt} &= \frac{1}{2N} \sum_{k \neq j}^N \frac{\sin 2\pi(x_j - x_k)}{\cosh 2\pi(y_j - y_k) - \cos 2\pi(x_j - x_k)}. \end{aligned} \quad (4)$$

(4) の初期データ $z_j(0) = \Gamma_j + 0.01 \sin 2\pi\Gamma_j$ に対する数値解を図 1 に示す. 数値解において特異性の発生時刻 t_c は Vortex Sheet を近似している点渦の x -軸方向の順序が入れ替わる (点渦が垂直に並ぶ) 時刻で定義する. 実際にこの時刻において曲率が発散していることが数値的に確認できる. さらに, 図 1 から推測できるように点渦の個数を増やす (近似の精度を上げる) と t_c は単調に減少していき, ある一定の値に近づいていく. 外挿法により $N \rightarrow \infty$ における t_c の値を求めることで Moore の解析により得られる時刻に一致することが知られている [4]. さらに, Krasny は (3) の Vortex blob 法による正則化方程式を考え, Vortex Sheet の時間発展の数値計算を行った [5]. 正則化方程式の離散化は次で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= -\frac{1}{2N} \sum_{k \neq j}^N \frac{\sinh 2\pi(y_j - y_k)}{\cosh 2\pi(y_j - y_k) - \cos 2\pi(x_j - x_k) + \delta^2}, \\ \frac{dy_j}{dt} &= \frac{1}{2N} \sum_{k \neq j}^N \frac{\sin 2\pi(x_j - x_k)}{\cosh 2\pi(y_j - y_k) - \cos 2\pi(x_j - x_k) + \delta^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

(5) の右辺において, $\delta > 0$ では分母が 0 にならず特異性が表れないことに注意する. 図 1 と同じ初期値に対する数値解を図 2 に示す. 正則化方程式では解は時間大域的に存在するので時刻 t_c を超えて数値計算が可能であり, 特異点が現れていた付近において “渦の巻き上げ” を確認できる. 図 2 からわかるように δ を小さく取ると渦の巻き上げ数が多くなるが, 全体としての渦の大きさは変わらない. Vortex blob 法については (1) において解が存在する間は $\delta \rightarrow 0$ 極限で (1) の解に収束し, また任意の時間区間において二次元 Euler 方程式の弱解に収束することが知られている [8] (二次元 Euler 方程式の Vortex Sheet 初期値に対する弱解の存在は知られているが一意性は不明 [3]).

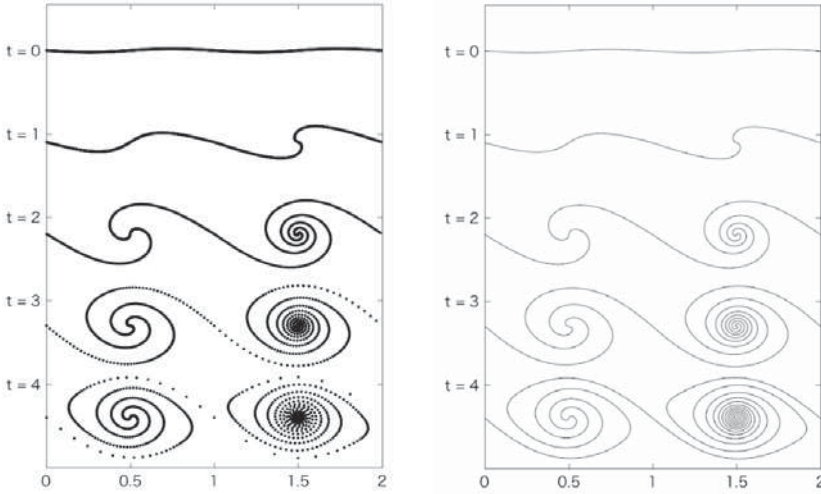


図2 正則化方程式の数値解 ($N = 400$). 左図は点渦の位置, 右図はそれらの補間曲線を図示している. $[0, 1]$ 区間には $\delta = 0.5$, $[1, 2]$ 区間には $\delta = 0.25$ に対応する数値解を図示.

3 2層の Vortex Sheet の数理解析

前節の1層 Vortex Sheet の数理解析を踏まえて2層の Vortex Sheet を考える. 時間発展を記述する Birkhoff-Rott 方程式は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} z^+(\Gamma, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\Gamma}}{z^+(\Gamma, t) - z^+(\tilde{\Gamma}, t)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\Gamma}}{z^+(\Gamma, t) - z^-(\tilde{\Gamma}, t)}, \\ \frac{\partial}{\partial t} z^-(\Gamma, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\Gamma}}{z^-(\Gamma, t) - z^-(\tilde{\Gamma}, t)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{\Gamma}}{z^-(\Gamma, t) - z^+(\tilde{\Gamma}, t)}. \end{aligned} \quad (6)$$

本研究では初期データとして上下平行に位置する2層の Vortex Sheet を与える.

$$z^+(\Gamma, 0) = \Gamma + i\frac{d}{2} + p^+(\Gamma, 0), \quad z^-(\Gamma, 0) = \Gamma - i\frac{d}{2} + p^-(\Gamma, 0).$$

ただし, z^+ , z^- はそれぞれ上層, 下層の Vortex Sheet を表し, d は Vortex Sheet 間の距離を表す定数である. まずは安定性解析の結果を述べる. 1層の場合と同様に線形化方程式を考え,

$$z^\pm(\Gamma, t) = \Gamma \pm i\frac{d}{2} + P^\pm e^{\omega t + ik\Gamma},$$

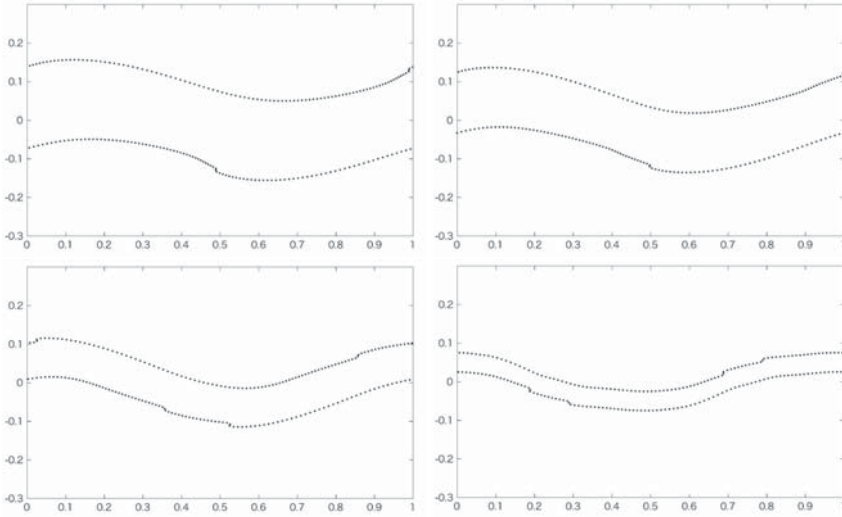


図3 反対称初期データに対する特異点の発生時刻における数値解 ($\varepsilon = 0.01$, $k = 1$, $N = 100$). 左上, 右上, 左下, 右下の順に, $d = 0.2$, $d = 0.15$, $d = 0.1$, $d = 0.05$ である.

となる形の解を求める 波数 k のモードに対して増大率・減衰率を持つ解がそれぞれ2つずつ求めることができるが, ここでは次の増大率を持つ解に注目する (複号同順. 以下も同様).

$$z^+(\Gamma, t) = \Gamma + i\frac{d}{2} \mp \varepsilon \left(\sqrt{1 \mp E_k} - i\sqrt{1 \pm E_k} \right) e^{\frac{k}{2}t\sqrt{1-E_k^2}} \sin\left(\pm\frac{k}{2}tE_k + k\Gamma\right),$$

$$z^-(\Gamma, t) = \Gamma - i\frac{d}{2} + \varepsilon \left(\sqrt{1 \mp E_k} + i\sqrt{1 \pm E_k} \right) e^{\frac{k}{2}t\sqrt{1-E_k^2}} \sin\left(\pm\frac{k}{2}tE_k + k\Gamma\right).$$

ただし, $E_k = e^{-kd}$ である. よって, 1層の場合と同様に任意の増大率の短波長の解を持つことがわかる. Γ に対する周期境界条件の下で (6) を離散化する.

$$\begin{aligned} \frac{dx_j^\pm}{dt} &= -\frac{1}{2N} \sum_{k \neq j}^N \frac{\sinh 2\pi(y_j^\pm - y_k^\pm)}{\cosh 2\pi(y_j^\pm - y_k^\pm) - \cos 2\pi(x_j^\pm - x_k^\pm)} \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{k \neq j}^N \frac{\sinh 2\pi(y_j^\pm - y_k^\mp)}{\cosh 2\pi(y_j^\pm - y_k^\mp) - \cos 2\pi(x_j^\pm - x_k^\mp)}, \\ \frac{dy_j^\pm}{dt} &= \frac{1}{2N} \sum_{k \neq j}^N \frac{\sin 2\pi(x_j^\pm - x_k^\pm)}{\cosh 2\pi(y_j^\pm - y_k^\pm) - \cos 2\pi(x_j^\pm - x_k^\pm)} \\ &\quad - \frac{1}{2N} \sum_{k \neq j}^N \frac{\sin 2\pi(x_j^\pm - x_k^\mp)}{\cosh 2\pi(y_j^\pm - y_k^\mp) - \cos 2\pi(x_j^\pm - x_k^\mp)}. \end{aligned} \tag{7}$$

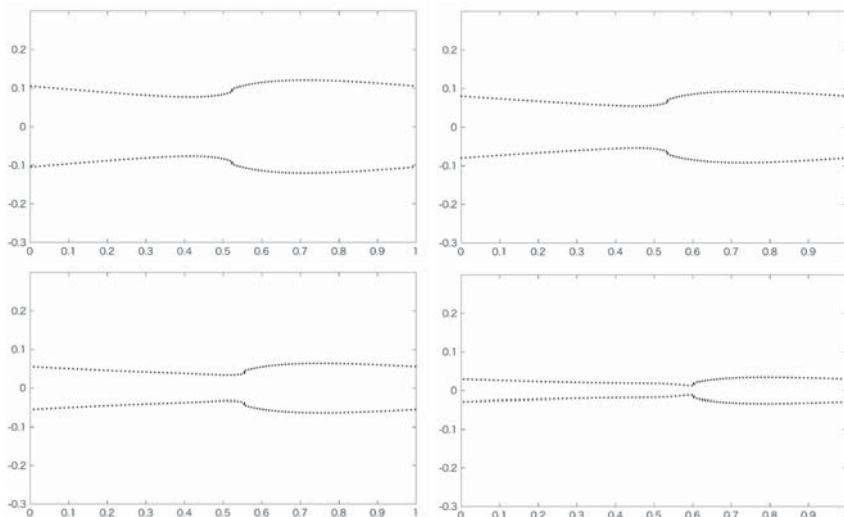


図4 対称初期データに対する特異点の発生時刻における数値解 ($\varepsilon = 0.01$, $k = 1$, $N = 100$).
 左上, 右上, 左下, 右下の順に, $d = 0.2$, $d = 0.15$, $d = 0.1$, $d = 0.05$ である.

初期データについては線形化方程式の解をもとに以下の2つを考える.

$$z^{\pm}(\Gamma, 0) = \Gamma_j \pm i\frac{d}{2} + \varepsilon \left(\mp\sqrt{1-E_k} + i\sqrt{1+E_k} \right) \sin(2\pi k\Gamma_j), \quad (8)$$

$$z^{\pm}(\Gamma, 0) = \Gamma_j \pm i\frac{d}{2} + \varepsilon \left(\sqrt{1+E_k} \mp i\sqrt{1-E_k} \right) \sin(2\pi k\Gamma_j). \quad (9)$$

(8), (9) については $z^+(\Gamma, 0)$, $z^-(\Gamma, 0)$ の配置がそれぞれ反対称, 対称であることから反対称モード, 対称モードと呼ぶことにする. まずは反対称モード (8) について, 2層の距離 d の値を変化させた場合の特異点の発生時刻における数値解を図3に示す. 数値解が示すように, d の値が大きいときには上下層間の相互作用は小さく, それぞれ1層の場合と同様に1周期に1つの特異性が発生している (上層と下層では特異点の位置が半周期ずれることに注意する). 2層が近づくと上下層の相互作用が与える影響から特異性が2箇所が発生し, その位置も少しずれていることがわかる. $d = 0.05$ になるとその変化はより顕著であり, 層全体で曲率の変動が数値的に確認できるが, 数値誤差が影響している可能性もあるため検証が必要である ([4] で提案されたフィルタリングの手法は用いている). 次に対称モードの初期値 (9) に対する数値解を図4に示す. 反対称モードと同じく2層が十分離れていれば1層の場合と同様の特異性の発生が確認できる. ただし, 対称モードでは d が小さいときにも各層での特異点の発生は1箇所のみである. ただし特異点付近で x -軸正の方向への強い層の巻き込みが見られ, 実際に曲率の変動の大きさにも特異点の左右で非対称性があることが数値的に確認できる.

次に Vortex blob 法による正則化モデルにおける2層 Vortex Sheet の時間発展を考える. 正則化された離散化方程式は (5) の場合と同様に (7) 右辺のそれぞれの分母に δ^2 を加えることで得ら

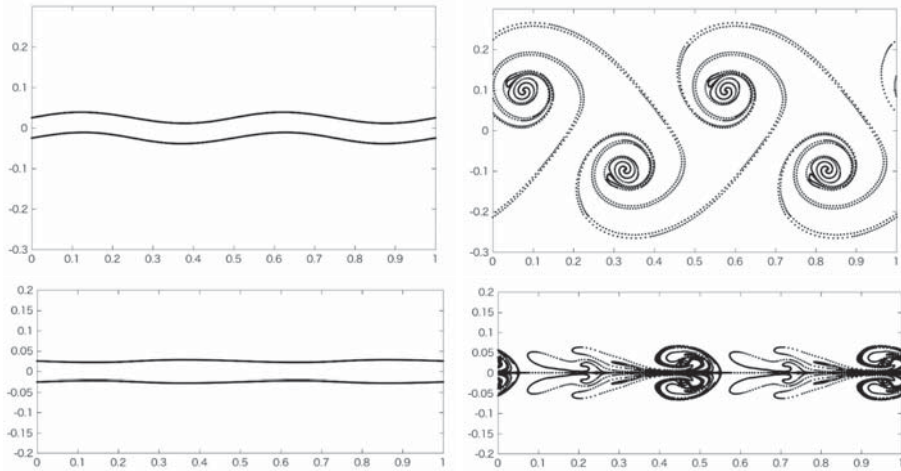


図5 正則化モデルにおける数値解 ($\varepsilon = 0.01$, $k = 2$, $d = 0.05$, $\delta = 0.15$). 左上が反対称初期データ, 左下が対称初期データであり, 対応する数値解をそれぞれ右側に示している.

れる. 初期値については (8), (9) において, $\varepsilon = 0.01$, $k = 2$, $d = 0.05$ とする. このときの数値解を図 5 に示す. 点渦近似の個数については初期時刻において $N = 200$ としたが, 時間発展に伴い点渦間の距離が一定以上離れた場合には適当な補間手法により点渦の挿入を行っている. 反対称モード, 対称モードともに時間の経過とともに渦の巻き上がり現象が確認できるが, 巻き上がり方は大きく異なる. 特に反対称モードについてはカルマン渦のような渦のパターンの形成が見られる. 一方で対称モードではジェットと呼ばれる, スリット間の狭い隙間から流体を噴出した際に観察される渦の形状とよく似たパターンが観察される (ジェットの数値シミュレーションについては例えば [6] を参照). また, これら二つのモードについては, 初期値のパラメータを変えることで異なる渦のパターンが形成されることも確認できる ([10] を参照).

本研究ではさらに反対称, 対称モードを線形結合した初期データを考えることで, より複雑な渦運動を再現に取り組んだ. 特に特徴的な渦パターン形成の例を図 6 に示す. これらの渦形成のパターンは実際の流体の運動においても実験的に観察されるものであり (例えば石鹸膜実験においても図 6 に類似したパターンの干渉縞が現れる [2]), 1 層の Vortex Sheet によるこれらの再現シミュレーションも行われている [6] が, そこでの初期データの選び方はいくぶんか人工的であり, 2 層モデルでは線形化方程式の解である反対称, 対称モードの単純な線形結合を初期データとして選ぶことで再現できる.

4 二次元 Navier-Stokes 方程式との比較

最後に Vortex blob 法による正則化モデルと二次元 Navier-Stokes 方程式との関係について, Vortex Sheet による渦のパターン形成から考察を行う. まず速度場 \mathbf{u} に対して渦度を $\omega = \text{curl } \mathbf{u}$,

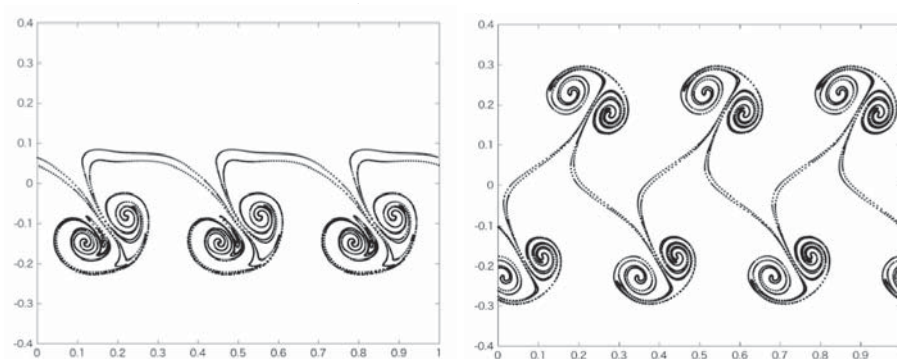


図6 反対称, 対称モードを組み合わせた数値解 ($\delta = 0.15, d = 0.05$). 左図は初期データを反対称 ($\varepsilon = 0.01, k = 3$) + 対称 ($\varepsilon = 0.015, k = 3$), 右図は反対称 ($\varepsilon = 0.06, k = 3$) + 対称 ($\varepsilon = 0.02, k = 6$) とした数値解.

流れ関数 ψ を $\mathbf{u} = (\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x)$ を満たす関数として定義すると, 二次元 Navier-Stokes 方程式から次の方程式が導かれる.

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial y} = \nu\Delta\omega, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\omega. \quad (10)$$

ただし, ν は粘性率に対応する定数である. 初期渦度については $z(\Gamma, 0) = x(\Gamma, 0) + iy(\Gamma, 0)$ の曲線上に Delta 関数的に分布していると仮定するが, 数値計算の都合から以下のような正則化を行う. まずは, $z(\Gamma, 0)$ 上の渦度が生み出す速度場 $\mathbf{u}_0(x, y) = (u_0(x, y), v_0(x, y))$ については

$$u_0(x, y) - iv_0(x, y) = \frac{1}{2i} \int_0^1 \cot \pi(z - \tilde{z}) d\tilde{\Gamma} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sinh 2\pi(y - \tilde{y}) + i \sin 2\pi(x - \tilde{x})}{\cosh 2\pi(y - \tilde{y}) - \cos 2\pi(x - \tilde{x})} d\tilde{\Gamma} \quad (11)$$

となる. ここで, $\tilde{z} = z(\tilde{\Gamma}, 0)$ であり, (\tilde{x}, \tilde{y}) も同様とする. Vortex blob 法に基づき (11) を次のように正則化する.

$$u_0^\sigma(x, y) - iv_0^\sigma(x, y) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sinh 2\pi(y - \tilde{y}) + i \sin 2\pi(x - \tilde{x})}{\cosh 2\pi(y - \tilde{y}) - \cos 2\pi(x - \tilde{x}) + \sigma^2} d\tilde{\Gamma}.$$

この正則化された速度場に対する渦度を再度計算することで, 数値計算の初期値として用いる以下の正則化された渦度が得られる.

$$\omega_0^\sigma(x, y) = \pi\sigma^2 \int_0^1 \frac{\cosh 2\pi(y - \tilde{y}) + \cos 2\pi(x - \tilde{x})}{(\cosh 2\pi(y - \tilde{y}) - \cos 2\pi(x - \tilde{x}) + \sigma^2)^2} d\tilde{\Gamma}.$$

(10) の数値計算については x -軸方向は周期境界条件, y -軸方向には Dirichlet 境界条件を課し, 時間方向は前進差分, 空間方向は中心差分によるスキームを, 初期値の積分計算には台形則を用いた. また, 速度場の数値解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ については, 流れ関数から中心差分によって求めることに注意する. Navier-Stokes 方程式における Vortex Sheet の挙動については初期時刻に

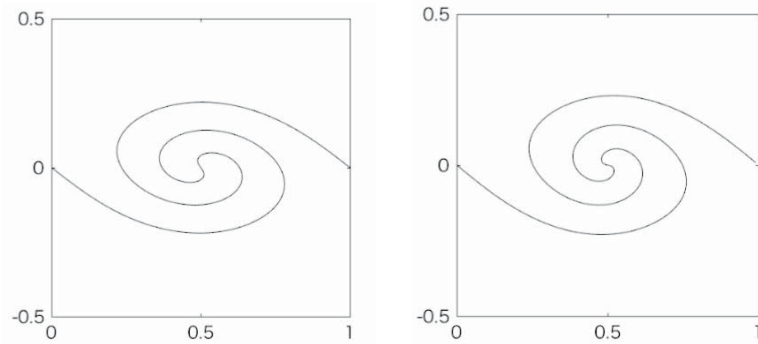


図7 初期値 $z(\Gamma, 0) = \Gamma + 0.01(1 - i) \sin(2\pi\Gamma)$ に対する数値解. 左図は Navier-Stokes 方程式における tracer の位置, 右図は Vortex blob 法 (Birkhoff-Rott 方程式) の数値解.

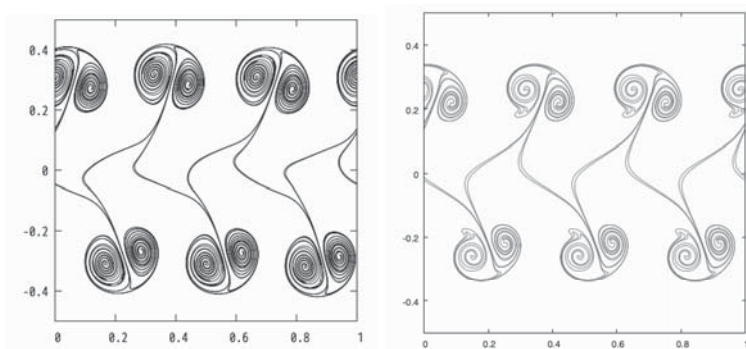


図8 反対称, 対称モードを組み合わせた初期値に対する数値解. 左図は Navier-Stokes 方程式における tracer の位置, 右図は Vortex blob 法 (Birkhoff-Rott 方程式) の数値解.

$z(\Gamma, 0)$ 上に tracer となる点 $\mathbf{x}_n(0) = (x_n(0), y_n(0))$ を N 個配置し, その時間発展を (10) より求める Navier-Stokes 方程式の解 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ を用いて

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_n(t), t)$$

によって記述する. つまり, tracer は Navier-Stokes 方程式の解には影響を与えない, 速度場によって流される受け身の粒子と考える.

まずは一層の Vortex Sheet について, 数値計算結果を図 7 に示す. Navier-Stokes 方程式における粘性係数 ν , Vortex blob 法における δ が十分小さいとき, tracer の軌道と Vortex Sheet はともに巻き上がりが起こり, その時間発展にも類似性があるように見える (両者の比較については [13] も参照). さらに, 前節で見たより複雑な渦パターンについても図 8 に示すように Navier-Stokes 方程式において同じ初期配置について計算をするとよく似た性質をもつ渦のパターンが現れる. これ

らの数値計算が示唆するように Vortex Sheet のような解のクラスについて, Navier-Stokes 方程式の解の粘性係数ゼロ極限と Vortex blob 法における正則化 Euler 方程式の解の正則化パラメータ極限が一致するのかどうか, さらにはそれらの極限解が存在するならば Euler 方程式の弱解とはどのような関係にあるのかといった数学的な問題についても今後取り組んでいきたい。

参考文献

- [1] A. J. Chorin and P. S. Bernard, Discretization of a vortex sheet, with an example of roll-up. *J. Comput. Phys.*, **13** 1973, 423-429.
- [2] Y. Couder and C. Basdevant, Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows. *J. Fluid Mech.*, **173** 1986, 225-251.
- [3] J. M. Delort, Existence de nappe de tourbillion en dimension deux. *J. Amer. Math. Soc.*, **4** 1991, 553-586.
- [4] R. Krasny, A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation. *J. Fluid Mech.*, **167** 1986, 65-93.
- [5] R. Krasny, Desingularization of periodic vortex sheet roll-up. *J. Comput. Phys.*, **65** 1986, 292-313.
- [6] R. Krasny, Vortex sheet computations: roll-up, wakes, separation. *Lect. Appl. Math.*, AMS, **28** 1986, 385-402.
- [7] R. Krasny, Viscous simulation of wake patterns, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Vortex Flows and Related Numerical Methods, Grenoble, France, J.T. Beale, G.-H. Cottet, S. Huberson (eds.), NATO ASI Series, **395** 1993, 145-151
- [8] J. G. Liu and Z. Xin, Convergence of vortex methods for weak solutions to the 2-D Euler equations with vortex sheet data. *Comm. Pure Appl. Math.*, **48(6)** 1995, 611-628.
- [9] D. W. Moore, The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet. *Proc. R. Soc. Lond. A* **365** 1979, 105-119.
- [10] T. Sakajo, Interactions of two vortex sheets. *Adv. Math. Sci. Appl.*, **8** 1998, 631-662.
- [11] 坂上貴之, 渦層の時間発展と特異点～それでも渦層は巻き上がる?～. *物性研究*, **82(1)** 2004, 1-44.
- [12] C. Sulem, P. L. Sulem, C. Bardos and U. Frisch, Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin-Helmholtz instability. *Commun. Math. Phys.*, **80** 1981, 485-516.
- [13] G. Tryggvason, W. J. A. Dahm and K. Sbeih, Fine structure of vortex sheet rollup by viscous and inviscid simulation, *J. Fluids Eng.*, **113** 1991, 31-36.