

## $L^2(\mathbb{T})$ における不変部分空間の一考察

静岡大学・教育学部 大和田 智義 (Tomoyoshi Ohwada)  
 Faculty of Education, Shizuoka University  
 吉原高等学校 佐野 弘一 (Kouichi Sano)  
 Yoshiwara High School

### 1 序

複素線形空間  $X$  上の線形作用素  $T$  の不変部分空間 (または単に  $T$  不変) とは  $X$  の自明でない線形部分空間  $M (M \neq \{0\}, X)$  で条件  $TM \subset M$  をみたすものをいう. 不変部分空間の研究は固有値問題と関連をして古くから数学の中心的な話題の一つであり, 現在もその理論は発展をし続けている. (cf. [2, 4])

函数環論における不変部分空間の研究の始まりは 1949 年の Beurling[1] まで遡る. 単位円  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  上の 2 乗可積分関数全体を  $L^2(\mathbb{T})$  とし, その部分空間として Hardy 空間  $H^2(\mathbb{T})$  を

$$H^2(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \mid \hat{f}(n) = 0 \ (n < 0) \right\}$$

により与える. ここで  $\hat{f}$  は  $f$  のフーリエ変換

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (n \in \mathbb{N})$$

を表す. 各  $n \in \mathbb{Z}$  に対して,  $L^2(\mathbb{T})$  上のユニタリ作用素  $M_n$  を

$$(M_n f)(e^{i\theta}) = e^{in\theta} f(e^{i\theta}) \quad (f \in L^2(\mathbb{T}), e^{i\theta} \in \mathbb{T})$$

と定義しシフト作用素とよぶ.  $L^2(\mathbb{T})$  の自明でない閉部分空間  $E$  が全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して不変であるとき, すなわち

$$M_n E \subset E \quad (n \in \mathbb{N})$$

を満たすとき  $E$  をシフト不変, または単に不変という. 全ての  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $M_n = (M_1)^n$  であることから, 明らかに  $E \subset L^2(\mathbb{T})$  がシフト不変であることと,  $E$  が  $M_1$  不変であることは同値である. また  $H^2(\mathbb{T})$  は, 最も自然なシフト不変部分空間の例である. Beurling[1] は,  $H^2(\mathbb{T})$  のシフト不変部分空間に対して以下の美しい構造定理を与えた.

**定理 1.1** (cf. [5, 定理 I-3.23])  $H^2(\mathbb{T})$  の自明でない閉部分空間  $E$  がシフト不変であるための必要十分条件は  $|q(e^{i\theta})| = 1$  (a.e.) となる  $H^2(\mathbb{T})$  の元  $q$  が存在して  $E = qH^2(\mathbb{T})$  を満たすことである.

一方で, 各  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  に対して  $L^2(\mathbb{T})$  上のユニタリ作用素  $W_{e^{i\phi}}$  を

$$(W_{e^{i\phi}}f)(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta-\phi)}) \quad (f \in L^2(\mathbb{T}), e^{i\theta} \in \mathbb{T})$$

により与え, これを平行移動作用素とよぶ. 平行移動作用素による不変部分空間 (以下, 平行移動不変部分空間とよぶ) の研究もこれまでに盛んに行われているが, 特に近年では, より抽象的な設定において著しい発展がみられる. (cf. [3])

本研究では, これまで独立して行われてきたシフト不変部分空間と平行移動不変部分空間の構造解析を, 作用素環の構造解析で有用な道具であった, スペクトル部分空間の理論を用いて同時に扱うことにより, その構造を詳細に調べた結果を紹介する.

## 2 不変部分空間の構造

この章では, まずスペクトル部分空間の定義を与える.

**定義 2.1**  $L^2(\mathbb{T})$  の元  $f$  に対して, その台  $\text{supp} f$  を

$$\text{supp} f = \{n \in \mathbb{Z} \mid \hat{f}(n) \neq 0\}$$

により与え,  $L^2(\mathbb{T})$  の閉部分空間  $E$  に対して  $E$  の台  $\Sigma_E$  を

$$\Sigma_E = \bigcup_{f \in E} \text{supp} f$$

で定義する. このとき,  $\mathbb{Z}$  の部分集合  $\Gamma$  に対して,  $L^2(\mathbb{T})$  の  $\Gamma$  に対するスペクトル部分空間  $S(\Gamma)$  を

$$S(\Gamma) = \{f \in L^2(\mathbb{T}) \mid \text{supp} f \subset \Gamma\}$$

により定義する.

**注意 2.2** 定義より直ちに以下がわかる.

- (i)  $S(\mathbb{Z}) = L^2(\mathbb{T})$ ,  $S(\{0\}) = \mathbb{C}$
- (ii) 各  $m \in \mathbb{Z}$  に対して  $\mathbb{Z}_m = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq m\}$  とするとき  $S(\mathbb{Z}_0) = H^2(\mathbb{T})$  である
- (iii) 全ての  $E \subset L^2(\mathbb{T})$  に対して  $E \subset S(\Sigma_E)$  である

スペクトル部分空間の構造を調べる上で, 以下は基本的な性質である.

**補題 2.3**  $L^2(\mathbb{T})$  の閉部分空間  $E_1, E_2$  に対して以下が成立する.

(i)  $E_1 \subset E_2$  なら  $\Sigma_{E_1} \subset \Sigma_{E_2}$

(ii)  $E_1 = E_2$  なら  $\Sigma_{E_1} = \Sigma_{E_2}$

特に  $E_i = S(\Sigma_{E_i})$  ( $i = 1, 2$ ) であるとき, この逆も成立する.

明らかに  $L^2(\mathbb{T}) = S(\mathbb{Z}) = S(\Sigma_{L^2(\mathbb{T})})$  かつ  $H^2(\mathbb{T}) = S(\mathbb{Z}_0) = S(\Sigma_{H^2(\mathbb{T})})$  であるが, 全ての  $E \subset L^2(\mathbb{T})$  に対して  $E = S(\Sigma_E)$  が成立するとは限らない. そこで我々は, まず  $E = S(\Sigma_E)$  が成立するための条件を考察して, 以下の定理を得た.

**定理 2.4**  $E$  を  $L^2(\mathbb{T})$  の閉部分空間とする. 全ての  $e^{i\phi} \in \mathbb{T}$  に対して,  $E$  が平行移動不変, すなわち,  $W_{e^{i\phi}}E \subset E$  を満たすなら,  $E = S(\Sigma_E)$  である.

この定理より, スペクトル部分空間を利用してシフト不変部分空間の構造解析を行うには, 平行移動不変であることが重要である. そこで  $L^2(\mathbb{T})$  の自明でないシフト不変かつ平行移動不変な閉部分空間全体の集合  $I$  を考える. いま,  $E \in I$  に対して  $m \in \Sigma_E$  をとれば, シフト不変性から  $m+1 \in \Sigma_E$  を満たすので  $\Lambda = \{\mathbb{Z}_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$  とおけば  $\Sigma_E \in \Lambda$  である. 更に  $E$  は平行移動不変なので定理 2.4 より  $E = S(\Sigma_E)$  を満たすので以下が成立する.

**定理 2.5** 上の記号の下で, 以下が成立する.

(i) 全ての  $I$  の元  $E$  に対して,  $\Sigma_E$  は  $\Lambda$  に属する

(ii) 全ての  $\Lambda$  の元  $\mathbb{Z}_m$  に対して,  $S(\mathbb{Z}_m)$  は  $I$  の元である.

すなわち,  $I$  と  $\Lambda$  の間には 1 対 1 対応が存在する.

これより直ちに, 我々はシフト不変かつ平行移動不変な部分空間の構造に関する次の系を得る.

**系 2.6** 全ての  $I$  の元  $E$  に対して, 整数  $m$  が存在して  $E = M_m H^2(\mathbb{T})$  を満たす. すなわち  $I = \{M_m H^2(\mathbb{T}) \mid m \in \mathbb{Z}\}$  である.

**最後に**

去る 2017 年 5 月 1 日に, 本研究集会におきまして常に中心的な存在でありました岡山県立大学名誉教授の高橋泰嗣先生が急逝されました. 更に, 2017 年 11 月 18 日に北海道大学名誉教授の中路貴彦先生が作用素論・作用素環論研究集会の参加中にやはり急逝されました. この場をお借りして, お二人のご生前のご功績を偲び, 心からご冥福をお祈り申し上げます.

## 参考文献

- [1] A. Beurling, *On two problems concerning linear transformations in Hilbert space*, Acta Math., **81**(1949), 239–255.
- [2] K. Hamm and J. Ledford, *On the structure and interpolation properties of quasi shift-invariant spaces*, J. Funct. Anal., **274** (2018), no. 7, 1959–1992.
- [3] J. Iverson, *Subspaces of  $L^2(G)$  invariant under translation by an abelian subgroup*, J. Funct. Anal. **269** (2015), no. 3, 865–913.
- [4] T. Nakazi, *Multipliers of a wandering subspace for a shift invariant subspace II*, Nihonkai Math. J. **26** (2015), no. 1, 31–36.
- [5] 中路貴彦, 正則関数のなすヒルベルト空間, 岩波書店, (2009).
- [6] T. Ohwada and K. Sano, *On the structure of shift and translation invariant subspaces*, in preparation.