数理解析研究所講究録 第2095巻 2018年 222-226

Characterization of generalized Besov Morrey spaces by ball means of differences[1]
(Generalized Besov Morrey 空間と差分による特徴づけ)

首都大学東京　理工学研究科　野井貴弘
Takahiro Noi
Tokyo Metropolitan University

1　関数空間の定義

$r>0$ とし, $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n : |x-y|\le r\}$ とする.

$0<q<\infty$ とする. $\mathcal{G}_q$ で, 次の性質を満たす非減少関数 $\varphi:(0,\infty)\to(0,\infty)$ 全体の集合とする;

$$\varphi(t_1){t_1}^{-n/q}\gtrsim\varphi(t_2){t_2}^{-n/q}\quad(0<t_1\le t_2<\infty).$$

定義 1.1 (Generalized Morrey 空間 [1]). $0<q<\infty$, $\varphi\in\mathcal{G}_q$ とする. このとき,

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^\varphi}\equiv\sup_{Q\in\mathcal{Q}}\varphi(\ell(Q))\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$$

を満たす可測関数 f 全体の集合を $\mathcal{M}_q^\varphi(\mathbb{R}^n)$ で表し, これを generalized Morry 空間という.

Besov 空間を定義するために, 滑らかな単位の分解を導入する.

定義 1.2. $\Theta(\mathbb{R}^n)$ を次の 3 条件を満たす $\{\theta_j\}_{j=0}^\infty\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 全体の集合とする;
(i)

$$\begin{cases}\operatorname{supp}\theta_0\subset\{x\in\mathbb{R}^n : |x|\le 2\}\\ \operatorname{supp}\theta_j\subset\{x\in\mathbb{R}^n : 2^{j-1}\le|x|\le 2^{j+1}\}\ \text{ if } j=1,2,\ldots,\end{cases}$$

(ii) 任意の多重指数 α に対して, ある正の定数 c_α が存在し

$$2^{j|\alpha|}\,|\partial^\alpha\theta_j(x)|\le c_\alpha$$

が, 任意の $j=0,1,\ldots$ と $x\in\mathbb{R}^n$ に対して成り立つ,
(iii) 任意の $x\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$\sum_{j=0}^\infty\theta_j(x)=1.$$

フーリエ変換と逆フーリエ変換をそれぞれ $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}^{-1}$ で表し, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して, $\varphi(D)f\equiv\mathcal{F}^{-1}[\varphi\mathcal{F}f]$ と定義する.

[1]岡山大学　出来光夫氏との共同研究

定義 1.3 (Generalized Besov Morrey 空間 [2]). $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, $\{\theta_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Theta(\mathbb{R}^n)$ とする. *The (nonhomogeneous) generalized Besov-Morrey* 空間 $\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}(\mathbb{R}^n)$ を, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ でセミノルム

$$\|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}} \equiv \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsr} \|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}^{\varphi}_q}{}^r\right)^{\frac{1}{r}} & (r < \infty), \\ \displaystyle\sup_{j\in\mathbb{N}_0} 2^{js}\|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}^{\varphi}_q} & (r = \infty) \end{cases}$$

が有限なもの全体の集合とする.

注意 1.4. 今後 $\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \|f_j\|_{\mathcal{M}^{\varphi}_q}{}^r\right)^{\frac{1}{r}}$ を $\|\{f_j\}_{j=0}\|_{\ell^r(\mathcal{M}^{\varphi}_q)}$ と表すことがある.

2　差分の球平均 (ball means of difference) による特徴づけ

$\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}(\mathbb{R}^n)$ の差分の球平均による特徴づけを述べる. そのために, まず差分を定義する. f を $\mathbb{R}^n$ 上の関数とし, $h \in \mathbb{R}^n$ とする. このとき,

$$\triangle^1_h f(x) = f(x+h) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

と定義する. 高次の差分は次のように帰納的に定義する;

$$\begin{aligned} \triangle^M_h f(x) &:= \triangle^1_h(\triangle^{M-1}_h f)(x) \\ &= \sum_{j=0}^{M} (-1)^j \binom{M}{j} f(x+(M-j)h) \quad M = 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

高次の差分は直接的に

$$\Delta^M_h f(x) := \sum_{j=0}^{M} (-1)^j \binom{M}{j} f(x+(M-j)h)$$

と定義することができる. ここで $\binom{M}{j}$ は 2 項係数を表すものである.

$u \in (0,\infty)$, $t > 0$, $M \in \mathbb{N}$ とする. f の差分の球平均と呼ばれる量を

$$d^M_{t,u} f(x) = \left(t^{-n}\int_{|h|\leq t} \left|\triangle^M_h f(x)\right|^u \mathrm{d}h\right)^{1/u} = \left(\int_B \left|\triangle^M_{th} f(x)\right|^u \mathrm{d}h\right)^{1/u}$$

でもって定義する.

次に generalized Besov Morrey 空間のセミノルムに対応するセミノルムを次のように定義する; $f \in \mathcal{M}^{\varphi}_q(\mathbb{R}^n)$ とするとき,

$$\|f\|^*_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^{\varphi}_q,r}} \equiv \|f\|_{\mathcal{M}^{\varphi}_q} + \left(\int_0^1 t^{-sr} \|d^M_{t,u} f\|^r_{\mathcal{M}^{\varphi}_q} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/r}$$

と

$$\|f\|^{**}_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} \equiv \|f\|_{\mathcal{M}^\varphi_q} + \left\| \left\{ 2^{ks} d^M_{2^{-k},u} f \right\}^\infty_{k=1} \right\|_{\ell^r(\mathcal{M}^\varphi_q)}.$$

このとき, 常の Besov 空間における差分の球平均の特徴付け [3] と同様に次の定理が成り立つ.

定理 2.1 (主定理)**.** $1 \le u \le \infty$, $0 < q < \infty$, $0 < r \le \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とし, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とする. さらに $M \in \mathbb{N}$ は $M > s$ を満たすとする. もしも

$$s > \left(\frac{n}{q} - \frac{n}{u}\right)_+,$$

であれば, $f \in \mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ必要十分条件は $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ と $\|f\|^*_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} < \infty$ が成り立つことである. さらにこのとき $\|f\|^*_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}} \sim \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}$ が成り立つ.

上で述べたことは $\|f\|^{**}_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}$ に対しても成立する.

$\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ は緩増加超関数の空間であるので, そもそも差分を考えることができるかどうかが気になるが, s の条件

$$s > \left(\frac{n}{q} - \frac{n}{u}\right)_+ \ge \left(\frac{n}{q} - n\right)_+ \equiv \sigma_q$$

から $f \in \mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ であるとき,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^\varphi_q} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}$$

が成り立つ. このことは $s > \sigma_q$ より $s - \sigma_q > \epsilon$ を満たす $\epsilon > 0$ をとれば

$$\begin{aligned}
\|f\|^{\min(1,q)}_{\mathcal{M}^\varphi_q} &= \|\sum_{k=0}^\infty \theta_k(D) f\|^{\min(1,q)}_{\mathcal{M}^\varphi_q} \\
&\le \sum_{k=0}^\infty \|\theta_k(D) f\|^{\min(1,q)}_{\mathcal{M}^\varphi_q} \\
&\lesssim \sum_{k=0}^\infty 2^{(\sigma_q - s + \epsilon)\min(1,q)k} \|f\|^{\min(1,q)}_{\mathcal{N}^{s-\sigma_q-\epsilon}_{\mathcal{M}^\varphi_q,1}} \\
&\lesssim \|f\|^{\min(1,q)}_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}
\end{aligned}$$

と計算することができることからわかる. よって $1 \le q$ であれば $f \in \mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ であるとき $f \in \mathcal{M}^\varphi_q(\mathbb{R}^n)$ であるので f は局所可積分関数と見なせる. 問題は $0 < q < 1$ のときであるが, このときは次の補題が成り立つ.

補題 2.2. $0 < q < 1$, $0 < r \le \infty$, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ とし, $s > \left(\frac{n}{q} - n\right)_+$ とする. このとき

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \|f\|_{L^1(B(y,1))} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}}$$

が成り立つ. つまり $0 < q < 1$ のときでも $\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n)$ の元は局所可積分関数と見なせる.

Proof. 通常の Besov 空間の場合と同様に, 任意の $0 < r \leq \infty$ に対して

$$\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つので,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^1(B(y,1))} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}}$$

を示せば十分である. [2, Lemma 3.4] の証明内で

$$|\theta_j(D)f(x)| \lesssim \frac{2^{-js}}{\varphi(2^{-j})}\|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}}$$

が任意の $j \in \mathbb{N}_0$ に対して成り立つことが示されている. つまり

$$2^{js}\varphi(2^{-j})\|\theta_j(D)f\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}}$$

が成り立つ. また $\|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}}$ の定義から

$$2^{js}\|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}^\varphi_q} \leq \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}}.$$

が成り立つことがわかる. このことから

$$2^{js(1-q)}\varphi(2^{-j})^{1-q}\|\theta_j(D)f\|^{1-q}_{L^\infty} \lesssim \|f\|^{1-q}_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}}$$

と

$$2^{jsq}\|\theta_j(D)f\|^q_{\mathcal{M}^\varphi_q} \leq \|f\|^q_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}}$$

が成り立つので,

$$2^{js}\varphi(2^{-j})^{1-q}\|\theta_j(D)f\|^q_{\mathcal{M}^\varphi_q}\|\theta_j(D)f\|^{1-q}_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}} \tag{1}$$

を得る. 一方

$$\varphi(r)^q \int_{B(x,r)} |f(y)|\,\mathrm{d}y \leq \|f\|^{1-q}_{L^\infty}\left(\varphi(r)^q \int_{B(x,r)} |f(y)|^q\,\mathrm{d}y\right)$$

であるので, $\varphi^q = \psi$ とおくとき $\|f\|_{\mathcal{M}^\psi_1} \leq \|f\|^q_{\mathcal{M}^\varphi_q}\|f\|^{1-q}_{L^\infty}$ が成り立つことがわかる. よって, (1) と組み合わせることにより

$$2^{js}\varphi(2^{-j})^{1-q}\|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}^\psi_1} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}}$$

が成り立つ. $\varphi \in \mathcal{G}_q$ より $\varphi(2^{-j}) \gtrsim 2^{-jn/q}\varphi(1)$ であるので,

$$\sum_{j=0}^\infty \frac{2^{-js}}{\varphi(2^{-j})^{1-q}} \lesssim \sum_{j=0}^\infty 2^{-js}2^{jn(1-q)/q} = \sum_{j=0}^\infty 2^{-j(s-n(\frac{1}{q}-1))} < \infty$$

を得る. よって,

$$\|f\|_{\mathcal{M}^\psi_1} \leq \sum_{j=0}^\infty \|\theta_j(D)f\|_{\mathcal{M}^\psi_1} \lesssim \sum_{j=0}^\infty \frac{2^{-js}}{\varphi(2^{-j})^{1-q}}\|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q,\infty}}$$

が成り立つ.

□

定理 2.1 は $1 \leq u \leq \infty$ のときであるが, $0 < u < 1$ のときは次の定理が成り立つ.

定理 2.3. $0 < u < 1$, $0 < q < \infty$, $0 < r \leq \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とし, $\varphi \in \mathcal{G}_q$ が成り立つとする. さらに $M \in \mathbb{N}$ は $M > s$ を満たし, s は

$$s > \left(\frac{n}{q} - n\right)_+$$

を満たすとする. このとき, $f \in \mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}(\mathbb{R}^n)$, ならば $\|f\|^*_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}} \sim \|f\|_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}}$ が成り立つ.

上で述べたことは $\|f\|^{**}_{\mathcal{N}^s_{\mathcal{M}^\varphi_q, r}}$ に対しても成立する.

参考文献

[1] E. Nakai, *Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and the Riesz potentials on generalized Morrey spaces.* Math. Nachr. **166** (1994), 95–103.

[2] S. Nakamura, T. Noi and Y. Sawano, *Gereralized Morrey spaces and trace operator.* Sci. China Math. **59** (2016), 281–336.

[3] H. Triebel, *Theory of Function Spaces II.* Birkhäuser, Basel, Boston, 1987.