数理解析研究所講究録 第2103巻 2019年 60-75



# 誘導表現の重複度の一様有界性について

奈良女子大学 理学部　北川 宣稔
Masatoshi Kitagawa
Faculty of Science, Nara Women's University

Abstract

$G_{\mathbb{R}}$ を実簡約リー群、$G'_{\mathbb{R}}$ をその (代数的な) 簡約部分群とする。このとき、$G'_{\mathbb{R}}$ の既約 smooth 表現 $V'$ から、誘導表現と呼ばれる $G_{\mathbb{R}}$ の smooth な表現 $C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{G'_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}}(V')$ を構成することができる。$G_{\mathbb{R}}$ の既約 smooth 表現 $V$ に対して、重複度 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{R}}}(V, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{G'_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}}(V')))$ が定まるが、これが $V$ によらない定数で抑えられるのはいつか、という問題を考える。

$V'$ が有限次元である場合、$G_{\mathbb{R}}/G'_{\mathbb{R}}$ の複素化 $G/G'$ が $G$-球多様体であることと、重複度が既約表現 $V$ によらずある定数で抑えられることが同値であることが、小林–大島 [14] によって示されている。本稿では、$V'$ が無限次元の場合にも、重複度の有界性が $G/G'$ と $V'$ の性質で特徴付けられることを紹介する。また、この結果を示すために用いた $\mathcal{D}$-加群に関する結果も紹介する。

## 1　導入

$G_{\mathbb{R}}$ を実簡約リー群、$G'_{\mathbb{R}}$ をその簡約部分群とする。このとき、$G'_{\mathbb{R}}$ の既約 smooth(Casselman–Wallach) 表現 $V'$ に対して、誘導表現

$$C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{G'_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}}(V') := \left\{ f \in C^\infty(G_{\mathbb{R}}, V') : f(\cdot g) = g^{-1} f(\cdot) \text{ for any } g \in G'_{\mathbb{R}} \right\}$$

が定まる。本稿では以下の問題を扱う。

**問題 1.** $G_{\mathbb{R}}$ の既約 smooth 表現 $V$ を動かしたときに重複度 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{R}}}(V, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{G'_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}}(V')))$ が有界になるような $V'$ はどのようなものか？

Frobenius 相互律から $\mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{R}}}(V, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_{G'_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}}(V')) \simeq \mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{R}}}(V, V')$ である。以下では右辺の空間を主に扱う。

### 1.1　既知の結果

主結果を述べる前に、すでに知られている結果を紹介する。

$G$ を $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群とする。$X$ が既約 $G$-代数多様体であり、$G$ の Borel 部分群 $B$ が開軌道を持つとき、$X$ は $G$-球多様体と呼ばれる。球多様体の表現論的な特徴づけとして Vinberg–Kimelfeld の以下の結果が知られている。

**事実 1.1** (Vinberg–Kimelfeld [19]). *$X$ が既約アファイン $G$-代数多様体のとき、$X$ が $G$-球多様体であることと $\mathcal{O}(X)$ が $G$ の表現として無重複であることは同値である。*

ここで、$\mathcal{O}(X)$ は $X$ 上の正則 (regular) 関数全体の空間である。また、$\mathcal{O}(X)$ が無重複であるとは、任意の $G$ の代数的な既約表現 $F$ に対して $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(F, \mathcal{O}(X))) \leq 1$ となることをいう。

$G'$ を $G$ の簡約な閉部分群とし (したがって $G/G'$ はアファインである)、$G/G'$ が $G$-球多様体であるとする。$G/G'$ が $G$-球多様体であるので、$G$ のある Borel 部分群 $B$ が存在し $BG'$ が $G$ の開集合となる。

$$L := \{g \in G' : gBG' = BG'\}$$

と置くと、$L$ は $G'$ の閉部分群であり、さらに Brion–Luna–Vust の結果 [5] から簡約代数群となる。

**事実 1.2** (F. Sato [16]). *$F'$ を $G'$ の代数的な既約表現とする。このとき*

$$\begin{aligned}&\max\{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G'}(F, F')) : F \text{ irr. } G\text{-module}\}\\ &= \max\{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_L(F', F_L)) : F_L \text{ irr. } L\text{-module}\}\end{aligned}$$

*が成り立つ。*

$\mathrm{Hom}_{G'}(F, F')$ は Frobenius 相互律から $\mathrm{Hom}_G(F, \mathcal{O}(G/G', G \times_{G'} F'))$ と同型になる。ここで、$\mathcal{O}(G/G', G \times_{G'} F')$ はベクトル束 $G \times_{G'} F'$ の大域切断全体の空間である。事実 1.2 は、$\mathcal{O}(G/G', G \times_{G'} F')$ の既約分解に現れる重複度の最大値は、ファイバー $F'$ の $L'$ への制限の既約分解から決まる、ということを主張している。この方向性で、$G/G'$ を等質とは限らない準アファイン $G$-球多様体に一般化することもできる [11]。$G_{\mathbb{R}}$ と $G'_{\mathbb{R}}$ を $G$ と $G'$ のコンパクトな実形にすれば、事実 1.2 は問題 1 のコンパクトな場合に対する一つの解答になっている。

事実 1.2 はベクトル束の大域切断に関する結果だが、高次のコホモロジー群に対する結果も知られている。

**事実 1.3** (M. Brion [4]). *$X$ を $G$-球多様体とし、$\mathcal{V}$ を $X$ 上の $G$-同変ベクトル束とする。このとき、$X$ のみに依存する定数 $C$ が存在して、任意の $G$ の代数的な既約表現 $F$ に対して*

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(F, H^i(X, \mathcal{V})) \leq C \cdot \mathrm{rank}(\mathcal{V})$$

*が成り立つ。*

次に、小林–大島の結果 [14] について述べよう。$G_{\mathbb{R}}$ を連結実簡約リー群、$G'_{\mathbb{R}}$ をその代数的な閉部分群とする。$G \supset G'$ を $G_{\mathbb{R}} \supset G'_{\mathbb{R}}$ の複素化の一つとする。

**事実 1.4** (Kobayashi–Oshima [14, Theorem B])**.** $G/G'$ が $G$-球多様体であるとする。このとき、$G_{\mathbb{R}}$ と $G'_{\mathbb{R}}$ にのみ依存する定数 $C$ が存在して、任意の $G'_{\mathbb{R}}$ の既約有限次元表現 $V'$ と既約許容表現 $V$ に対して

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{R}}}(V,V')) \leq C \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V')$$

が成り立つ。また、逆にそのような定数が存在すれば、$G/G'$ は $G$-球多様体となる。

特に、$G/G'$ が $G$-球多様体で $V'$ が有限次元であれば、$\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{G'_{\mathbb{R}}}(V,V'))$ は $V$ を動かしたときに有界になる。$G'_{\mathbb{R}}$ が極大コンパクト部分群になっている場合は、Harish-Chandra の subquotient theorem の系であり、$C=1$ と取ることができる。また、$(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ が対称対である場合は、van den Ban による結果 [18, Theorem 3.1] の精密化になっている。

# 2 主結果

次に主結果について述べる。問題 1 は smooth な表現の言葉で述べたが、以下では同様の問題を $(\mathfrak{g}, K)$-加群で考える。(smooth 表現でもほぼ同じ証明で示すことができる。)

## 2.1 記号

複素簡約リー環 $\mathfrak{g}$ と一つ固定した Borel 部分代数に対して、$\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ で BGG category $\mathcal{O}$(例えば、[10]) を表す。既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群の同型類全体を $\mathbf{Irr}(\mathfrak{g}, K)$、既約最高ウェイト加群の同型類全体を $\mathbf{Irr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}})$ とする。

一般に $(\mathfrak{g}, K) \supset (\mathfrak{g}', K')$ という二つの pair が与えらえているとする。このとき、$(\mathfrak{g}', K')$-加群 $V'$ に対して

$$\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V') := \sup_{V \in \mathbf{Irr}(\mathfrak{g},K)} \{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V,V'))\}$$

と定め、$(\mathfrak{g}, K)$-加群 $V$ に対して

$$\mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathfrak{g}',K'}(V) := \sup_{V' \in \mathbf{Irr}(\mathfrak{g}',K')} \{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V,V'))\}$$

と定める。$\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V')$ は $V'$ を $(\mathfrak{g}, K)$ に誘導した時の重複度の上限を表し、$\mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathfrak{g}',K'}(V)$ は $V$ を $(\mathfrak{g}', K')$ に制限した時の重複度の上限を表している。$\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}$ に対しても、$\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}(V'), \mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}'}}(V)$ を同様に定める。

## 2.2 主結果

$G$ を $\mathbb{C}$ 上の連結簡約代数群とし、$G'$ をその連結な簡約部分群とする。$K$ を $G$ の連結な対称部分群とし、$K'$ を $G'$ の連結な対称部分群で $K' \subset K$ となるものとする。$(K, K'$

は有限被覆をとっても良い。）対応する複素リー環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{k}, \mathfrak{k}'$ とする。また、$(\mathfrak{g}, K) \supset (\mathfrak{g}', K')$ に対応する実簡約リー群を $G_{\mathbb{R}} \supset G'_{\mathbb{R}}$ とする。

$\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V')$ の有限性を考える上で、次の結果が有用である。

**定理 2.1.** ある定数 $C$ が存在して、任意の既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群 $V'$ に対して

$$\frac{1}{C}\mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}) \leq \mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V') \leq C \cdot \mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'})$$

が成り立つ。ここで、$I = \mathrm{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')}(V')$ であり、PI.deg は後で定義する環の不変量である (定義 3.1)。

この定理から、$\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V')$ の有限性は PI.deg という不変量の有限性に帰着され、さらに primitive ideal である $I$ にしか依らないことがわかる。また、適切に Borel 部分代数を取れば、この定理は最高ウェイト加群に対しても同様に成り立つ。M. Duflo の結果 [6] から、$I$ を零化イデアルとするような最高ウェイト加群が存在するので、$(\mathfrak{g}, K)$-加群の命題を BGG category $\mathcal{O}$ の命題に帰着することができる。

$V'$ が自明な表現である場合は、$(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}$ は $G/G'$ 上の $G$-不変微分作用素環と同型となる。この場合には、$\mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}) < \infty$ であること、$(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}$ が可換になること、$G/G'$ が $G$-球多様体であることの 3 条件が同値になる (例えば、[17, Theorem 25.4])。この一部を一般化したものが次の結果になる。

**命題 2.2.** ある primitive ideal $I \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g}')$ に対して $\mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}) < \infty$ とすると、$G/G'$ は $G$-球多様体となる。

これは $\mathcal{U}(\mathfrak{g}')/I$ が有限次元の場合には本質的に [2, Theorem 3.7] や [14, Theorem B] で示されている。一般の場合は、$I$ を零化イデアルに持つような最高ウェイト加群を取り、有限次元表現の場合と同様の議論を行うことで示すことができる。

上の命題から $G/G'$ が $G$-球多様体になる場合だけを扱えばよいので、以下 $G/G'$ は $G$-球多様体と仮定する。$G/G'$ が $G$-球多様多なので、ある Borel 部分群 $B \subset G$ が存在して $BG' \subset G$ が開集合となる。

$$L := \{g \in G' : gBG' = BG'\}_0$$

と置くと、これは $G'$ の簡約部分群になる [5]。(ここで、$(\cdot)_0$ は代数群の単位元成分を表す。) $B$ をうまく取ることで、$K_L := L \cap K$ が $L$ の対称部分群になるようにとることができる。この $L$ が何かは次の小節で述べる。

以下が本稿における主定理である。

**定理 2.3.** ある定数 $C$ が存在して、任意の既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群 $V'$ に対して

$$\frac{1}{C}\mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathfrak{l},K_L}(V') \leq \mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V') \leq C \cdot \mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathfrak{l},K_L}(V')$$

が成り立つ。

この定理により、誘導表現の重複度の一様有界性を $V'$ の分岐則の一様有界性に帰着することができる。特に $V'$ が有限次元の場合、事実 1.4 の $G'_{\mathbb{R}}$ が簡約である場合の精密化になっている。

一般に $L$ は小さな部分群になるため、$\mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathfrak{l},K_L}(V') < \infty$ という条件はかなり強いものになっている。

## 2.3 $L$ について

$P := \{g \in G : gBG' = BG'\}$ と置くと、$P$ は $B$ を含む $G$ の閉部分群なので、放物型部分群となる。$L$ の定義から、$L = (P \cap G')_0$ となる。Brion–Luna–Vust は $L$ が簡約部分群であることだけでなく、$L$ が $P$ の Levi 部分群の導来群を含んでいることも示している。つまり、$P$ の Levi 部分群 $M$ で $M \supset L \supset [M, M]$ となるものが存在する。以上をまとめると次のようになる。

**命題 2.4.** $P, L$ は以下の性質を満たす。

1. $\mathfrak{p} + \mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$
2. $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}' = \mathfrak{l}$
3. $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{l} \supset [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$

また、$P \cap G'$ は $B \cap G'$ を含む $G$ の最小の簡約部分群であり、$\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{g}'$ を Borel 部分代数として含む。

**例 2.5.** $(G, G')$ を対称対とし、対応する $G$ の実形 $G^d_{\mathbb{R}}$ を取る。このとき、$P$ は $G^d_{\mathbb{R}}$ の極小放物型部分群 $P_{\mathbb{R}}$ を複素化したものであり、$P \cap G'$ は $P_{\mathbb{R}}$ の Langlands 分解 $M_{\mathbb{R}}A_{\mathbb{R}}N_{\mathbb{R}}$ の $M_{\mathbb{R}}$ を複素化したものと一致する。

**例 2.6.** 上の例の特別な場合として $(G, G') = (H \times H, \Delta(H))$ がある ($H$ は簡約代数群)。この場合には $L$ は $\Delta(H)$ の Cartan 部分群となる。$B$ の取り方を変えると、対称対 $(L, K_L)$、つまり対応する $H_{\mathbb{R}}$ の Cartan 部分群が変化する。

# 3 PI.deg と $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群

PI.deg を定義し、重複度と PI.deg をどのようにつなげるかについて述べる。

## 3.1 PI.deg の定義と性質

まずは、PI.deg を定める。詳しくは、例えば [15, Chapter 13] を参照されたい。

**定義 3.1.** $s_n$ を $n$ 変数非可換多項式

$$s_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) X_{\sigma(1)} X_{\sigma(2)} \cdots X_{\sigma(n)}$$

とする。ここで、$\mathfrak{S}_n$ は $n$ 次対称群で、sgn は置換の符号である。$\mathcal{R}$ を環とし、

$$\mathrm{PI.deg}(\mathcal{R}) := \min\{n \in \mathbb{N} : s_{2n} \equiv 0 \text{ on } \mathcal{R}\}$$

と定める。

例えば、環 $\mathcal{R}$ が可換であることと $\mathrm{PI.deg}(\mathcal{R}) = 1$ であることは同値である。これは $s_2(X, Y) = XY - YX$ であることからすぐにわかる。また、Amitsur–Levitzki による結果 (例えば、[15, Theorem 3.3]) によると、$\mathrm{PI.deg}(M_n(\mathbb{C})) = n$ となる。このことから次の命題が従う。

**命題 3.2.** $\mathcal{A}$ を高々加算次元の $\mathbb{C}$-代数とする。

1. $\{V_\lambda\}_\lambda$ を $\mathcal{A}$-加群の族とし、$\bigoplus_\lambda V_\lambda$ は忠実な $\mathcal{A}$-加群であるとする。このとき、$\mathrm{PI.deg}(\mathcal{A}) \leq \sup_\lambda \{\dim_{\mathbb{C}}(V_\lambda)\}$ となる。
2. $V$ を既約 $\mathcal{A}$-加群とすると、$\dim_{\mathbb{C}}(V) \leq \mathrm{PI.deg}(\mathcal{A})$ となる。

証明　1. $\mathcal{A} \hookrightarrow \prod_\lambda \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\lambda)$ という単射ができるので、Amitsur–Levitzki の定理から従う。

2. Jacobson density theorem より、$V$ が有限次元なら、加群を定める $\mathcal{A}$ から $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ への準同型が全射になるので、Amitsur–Levitzki の定理から主張が従う。$V$ が無限次元の場合も同様に、$\mathcal{A}$ から $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ への準同型の像が任意の大きさの行列環と同型な部分代数を含むことがわかるので、$\mathrm{PI.deg}(\mathcal{A}) = \infty$ が従う。 □

## 3.2 完全可約表現

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群と PI.deg の関係について述べる前に、古典的な完全可約表現の場合について説明する。例えば [7, 4.2.1] を参照されたい。

$G$ を簡約代数群とし、$V$ をその (代数群の) 有限次元表現とする。簡約代数群の表現は完全可約であるので、

$$V \simeq \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} \mathrm{Hom}_G(F_\lambda, V) \otimes F_\lambda$$

という canonical な既約分解が存在する。ここで、$\widehat{G}$ は $G$ の有限次元既約表現の同型類の集合であり、$F_\lambda$ は $\lambda$ の表現空間である。右辺の各項から左辺への写像は $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda, V) \otimes F_\lambda \ni f \otimes v \mapsto f(v) \in V$ で与えられる。

$\mathbb{C}$-代数 $\mathrm{End}_G(V)$ が $\mathrm{Hom}_G(F_\lambda, V)$ に

$$\mathrm{End}_G(V) \times \mathrm{Hom}_G(F_\lambda, V) \ni (T, f) \mapsto T \circ f \in \mathrm{Hom}_G(F_\lambda, V)$$

によって作用している。Jacobson density theorem からこれは既約となる。また、上の $V$ の既約分解の式から $\bigoplus_\lambda \mathrm{Hom}_G(F_\lambda, V)$ は忠実な $\mathrm{End}_G(V)$-加群となっている。したがって、命題 3.2 から

$$\max_\lambda \{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_G(F_\lambda, V))\} = \mathrm{PI.deg}(\mathrm{End}_G(V))$$

となる。$\mathrm{Hom}_G(F_\lambda, V)$ の次元が $F_\lambda$ の $V$ における重複度であるので、重複度の最大値と $\mathrm{PI.deg}(\mathrm{End}_G(V))$ が等しいことがわかる。

まとめると、

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \overset{\text{既約}}{\curvearrowright} V & \\
 & & \cup \\
\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \arrow[uur] \arrow[rr, squiggly, "\text{commutant}"] & & \mathrm{End}_G(V) \overset{\text{既約}}{\curvearrowright} \mathrm{Hom}_G(F_\lambda, V)
\end{tikzcd}$$

となる。$(\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V), \mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathrm{End}_G(V))$ を $(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), \mathcal{U}(\mathfrak{g}'), \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'})$ に置き換えて同様の結果が成り立てばよいが、無限次元表現の場合には、一般に完全可約にならない、Jacobson density theorem が直接使えない、など問題が生じる。

## 3.3　$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群と定理 2.1 の証明

定理 2.1 の証明の概略について述べる。

$V$ を $(\mathfrak{g}, K)$-加群とし、$V'$ を $(\mathfrak{g}', K')$-加群とする。このとき、$V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ には、$v' \otimes v \in V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ と $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$ に対して $X \cdot (v' \otimes v) = v' \otimes Xv$ として $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の構造が入る。また、$K'$ が連結なので

$$\begin{aligned}(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V)^* &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(V, (V')^*) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}', K'}(V, V'^{\vee})\end{aligned}$$

という (右)$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の同型が存在する。ここで、$V'^{\vee} = (V')^{*}_{K'}$ は $(V')^{*}$ の $K'$-有限なベクトル全体を取ったものであり、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V, V'^{\vee})$ には前小節の $\mathrm{Hom}_{G}(F_{\lambda}, V)$ と同様にして $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の構造を入れる。

**例 3.3.** $V$ が $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ の Weil 表現 (の $K$-有限な部分) とし、$(G'_{\mathbb{R}}, G''_{\mathbb{R}})$ が簡約 dual pair であるとき、

$$(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V)^{K'} = \Theta(V'^{\vee})$$

となる。ここで、$\Theta(V'^{\vee})$ は $V'^{\vee}$ の (既約商を取る前の)theta lifting である。[9]

$V'$ が既約であるとき $V'^{\vee}$ も既約であり $V'^{\vee\vee} \simeq V'$ なので、重複度を考えるときに $V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ の次元を考えても同等である。つまり、既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群 $V'$ に対して

$$\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V'^{\vee}) = \sup_{V \in \mathbf{Irr}(\mathfrak{g},K)} \left\{ \dim_{\mathbb{C}}(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V) \right\}$$

となっている。以下では、右辺を上下から評価することを考える。

## 3.4 上からの評価

3.2 節の類似で、以下のような定理が成り立つ。証明の概略については 5 節で述べる。

**定理 3.4.** ある定数 $C$ が存在して、任意の既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $V$ と既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群 $V'$ に対して

$$\mathrm{Len}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}}(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V) \leq C$$

となる。ここで、$\mathrm{Len}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}}$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の長さを表す。

3.2 節の完全可約かつ有限次元の場合と異なり、$V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ は一般に既約になるとは限らない。実際、既約にならない例が Howe 双対性の具体例で多く見られる。定理 3.4 は、既約にならないとしても長さを一様にある定数で抑えることができると主張している。

この定理を用いると $V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ の次元を上から評価することができる。

**定理 *2.1* の上からの評価の証明**　$V$ を既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群、$V'$ を既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群とし、$I = {}^{t}\mathrm{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')}(V')$ と置く。$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$ の $V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ への作用は、$(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}$ を経由する。また、命題 3.2 から、任意の既約 $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}$-加群の次元は $\mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'})$ 以下となる。したがって、定理 3.4 の定数 $C$ を取れば

$$\dim_{\mathbb{C}}(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V) \leq C \cdot \mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'})$$

となる。$V$ に関して上限を取れば欲しい評価が得られる。 $\square$

## 3.5　下からの評価

次に $\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V')$ の下からの評価について述べる。

定理 2.1 の下からの評価が成り立つということは、常に $\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V') \neq 0$ とならなければならない。そのため、次の補題を示す必要がある。

**補題 3.5.** 既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群 $V'$ に対して $V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V \neq 0$ となるような既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $V$ が存在する。

誘導表現の文脈でみると、$G'_{\mathbb{R}}$ の既約表現の $G_{\mathbb{R}}$ への誘導表現が必ず既約な部分表現を持つ、という主張になる。

**証明の概略**　$V'$ を $V'^{\vee}$ で置き換えて、$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}',K'}(V, V') \neq 0$ となる $V$ が存在することを示す。Casselman の subrepresentation theorem から、$V'$ はある主系列表現 $W'$ の商として実現できる。したがって、$G_{\mathbb{R}}$ の有限長表現 $W$ で $W'$ に全射が存在するようなものを見つければよい。

$G'_{\mathbb{R}}$ の極小放物型部分群を $P'_{\mathbb{R}}$ とし、$P'_{\mathbb{R}}$ を含む極小な $G_{\mathbb{R}}$ の放物型部分群を $P_{\mathbb{R}}$ とする。$G'_{\mathbb{R}}/P'_{\mathbb{R}}$ から $G_{\mathbb{R}}/P_{\mathbb{R}}$ への自然な写像は閉埋め込みになるので、ベクトル束の大域切断を制限する写像は全射となる。このことから、$P'_{\mathbb{R}}$ の既約表現 $F'$ に対して、$P_{\mathbb{R}}$ の既約表現 $F$ を $\mathrm{Hom}_{P'_{\mathbb{R}}}(F, F') \neq 0$ となるように選べるか、という問題に帰着される。$P_{\mathbb{R}}$ の取り方から、$P'_{\mathbb{R}}$ の冪零根基は $P_{\mathbb{R}}$ の冪零根基に含まれるので、この問題はもとの主張の $G'_{\mathbb{R}}$ がコンパクトな場合と同値であり、その場合は容易に示すことができる。 $\square$

次に、$V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V \neq 0$ となるような $V$ が $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}$ の環構造を復元できる程度に十分たくさん存在することを示す。誘導表現の言葉で延べると、誘導表現には $G_{\mathbb{R}}$-不変微分作用素環の構造を復元できる程度に十分たくさんの既約 (または有限長の) 部分表現が存在する、ということになる。

**補題 3.6.** $V'$ を既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群とし、その零化イデアルを ${}^tI$ とする。このとき、ある有限長の $(\mathfrak{g}, K)$-加群の族 $\{P_i\}_i$ と $(\mathfrak{g}, K)$ のみに依る定数 $C$ が存在して以下の性質を満たす。

- $P_i$ の長さは $C$ 以下である。
- $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}$ が $\bigoplus_i V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} P_i$ に忠実に作用する。

この補題から定理 2.1 の下からの評価はすぐに得られる。

定理 *2.1* の下からの評価の証明　補題 3.6 の $C$ と $\{P_i\}$ を取ると、命題 3.2 の 1 から

$$\begin{aligned}\mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}) &\leq \sup_i \left\{\dim_{\mathbb{C}}(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} P_i)\right\} \\ &\leq C \cdot \mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V')\end{aligned}$$

となる。二つ目の不等式で $V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} \cdot$ が右完全関手であることを使った。 □

補題の証明のために記号を準備する。普遍包絡環の中心 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して、$\mathrm{Mod}(\mathfrak{g},K)^n_{\mathfrak{m}}$ を、$\mathfrak{m}^n V = 0$ となるような有限長 $(\mathfrak{g},K)$-加群の圏とする。各 $K$ の有限次元表現 $F$ に対して、$(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})} F$ は $\mathrm{Mod}(\mathfrak{g},K)^n_{\mathfrak{m}}$ の射影加群であるので、$\mathrm{Mod}(\mathfrak{g},K)^n_{\mathfrak{m}}$ は十分多くの射影加群を持つ。したがって、既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群に対してその射影被覆が一意に存在する。

$n = |W_G|$ と固定して、既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群の射影被覆の同型類全体を $\{P_i\}_i$ とする。このとき、以下の命題が成り立つ。

**命題 3.7.** $V$ を既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群、$F$ を $G$ の代数的な有限次元表現としたとき、$V \otimes F$ は $\bigoplus_{\mathfrak{m}} \mathrm{Mod}(\mathfrak{g},K)^{|W_G|}_{\mathfrak{m}}$ の対象であり、特にいくつかの $P_i$ の直和からの全射が存在する。

証明　$V \otimes F$ の primary decomposition に関する Kostant の結果の証明からわかる。(例えば、[12, Theorem 7.133] を見よ。) □

$P_i$ の長さは $i$ に依らない定数で抑えることができる。5 節で紹介する $\mathcal{D}$-加群を用いた手法で、$(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathfrak{m}^n(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{k})} F$ の $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-加群としての長さが $\mathfrak{m}$ に依らない定数で抑えられることがわかる。[14, Proposition 4.1] の証明と同様にして、$P_i$ の長さを一様に抑えることができる。

補題 *3.6* の証明の概略　$\mathcal{A} := \mathcal{O}(G/G') \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ と置く。

$V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ には右 $\mathcal{A}$-加群の構造が入り既約となる。例えば、$V'$ が自明な加群の場合には $\mathbb{C} \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ は $G_{\mathbb{R}}/G'_{\mathbb{R}}$ の $\{eG'_{\mathbb{R}}\}$ を台とする超関数の空間と同型になる。

補題 3.5 から $V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V \neq 0$ となるような既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群 $V$ が存在する。このとき、$\mathcal{O}(G/G') \otimes V$ には左 $\mathcal{A}$-加群の構造が自然に入る。これを利用すると

$$\begin{aligned}(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} (\mathcal{O}(G/G') \otimes V))^* &\hookleftarrow (V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{O}(G/G') \otimes V))^* \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} \mathcal{U}(\mathfrak{g}), (\mathcal{O}(G/G') \otimes V)^*)\end{aligned}$$

という $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の準同型が定まる。$V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の既約性から、最後の空間の 0 でない元は単射となる。また、$V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V \neq 0$ から、$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} \mathcal{U}(\mathfrak{g}), (\mathcal{O}(G/G') \otimes V)^*)$ の 0 でない元を作ることができる。これから、零化イデアルの計算を $V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ に押し付けることが出来、$(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'}$ が $V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} (\mathcal{O}(G/G') \otimes V)$ に忠実に作用していることがわかる。

最後に $\mathcal{O}(G/G')\otimes V$ に対して命題 3.7 を適応すれば主張が示される。($\mathcal{O}(G/G')$ は $G$ の有限次元既約表現の直和に分解する。) $\square$

## 4 定理 2.3 の証明の概略

定理 2.1 は $(\mathfrak{g},K)$-加群だけでなく、最高ウェイト加群に対しても同様に成り立ち、また誘導表現だけでなく分岐則に対しても同様の定理が成り立つ。証明は定理 2.1 とほぼ同じである。大部分は generalized pair $(\mathcal{A},G)$ の加群の命題として統一的に扱えるが、ここでは省略する。

**定理 4.1.** ある定数 $C$ が存在して、任意の既約 $(\mathfrak{g}',K')$-加群 $V'$ に対して

$$\frac{1}{C}\mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g}')/I)^L)\leq \mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathfrak{l},K_L}(V')\leq C\cdot \mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g}')/I)^L)$$

となる。ここで、$I=\mathrm{Ann}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')}(V')$ とした。

BGG category $\mathcal{O}$ を使うので Borel 部分代数を固定する。すでに $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数は固定していることに注意せよ。$\mathfrak{b}_L := \mathfrak{b}\cap\mathfrak{l}$ は命題 2.4 より、$\mathfrak{l}$ の Borel 部分代数となる。$\mathfrak{b}'\subset\mathfrak{g}'$ を、$\mathfrak{b}'\cap\mathfrak{l}=\mathfrak{b}_L$ となるような Borel 部分代数とする。

$V'$ を既約 $(\mathfrak{g}',K')$-加群とし、$W'$ を $\mathfrak{g}'$ の既約最高ウェイト加群とする。$I:=\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}'}(V')=\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}'}(W')$ とすると、以下の同値関係が成り立つ。(実際には、隣接している二つの数は $V',W'$ によらない定数倍で上下に抑えられている。)

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathfrak{g},K}(V')<\infty & & \mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathfrak{l},K_L}(V')<\infty \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I\mathcal{U}(\mathfrak{g}))^{G'})<\infty & & \mathrm{PI.deg}((\mathcal{U}(\mathfrak{g}')/I)^L)<\infty \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}(W')<\infty & \overset{?}{\Longleftrightarrow} & \mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}}(W')<\infty \\
 & & \\
\text{induction} & & \text{restriction}
\end{array}$$

?の部分の同値を示せば定理 2.3 の証明が終わる。

*?の証明* 任意の $\mathfrak{m}$ の既約最高ウェイト加群 $W_M$ に対して、($\mathfrak{m}$ については 2.3 を参照)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}'}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})}W_M,W') &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}'}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}')\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}'\cap\mathfrak{p})}W_M,W') \\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}}(W_M|_{\mathfrak{l}},W')
\end{aligned}$$

となる。ここで、命題 2.4 の $\mathfrak{p}+\mathfrak{g}'=\mathfrak{g},\mathfrak{p}\cap\mathfrak{g}'=\mathfrak{l}$ という関係を用いた。

$\mathfrak{g}$ の最高ウェイト加群は $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} W_M$ という一般化 Verma 加群の既約商で表される。$\mathfrak{l}$ は $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ を含み $\mathfrak{m}$ に含まれるので、$W_M|_{\mathfrak{l}}$ は既約である。また、$\mathfrak{l}$ の任意の既約最高ウェイト加群はこのようにして得られる。したがって、

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}^{\mathrm{ind}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{g}}}(W') = \sup_{W \in \mathbf{Irr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}})} \{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}'}(W, W'))\} < \infty \\
\Leftrightarrow &\sup_{W_L \in \mathbf{Irr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{l}})} \{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}}(W_L, W'))\} < \infty \\
\Leftrightarrow &\mathcal{M}^{\mathrm{res}}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{l}}}(W') = \sup_{W_L \in \mathbf{Irr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{l}})} \{\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{l}}(W', W_L))\} < \infty
\end{aligned}$$

となる。最後の同値では、$W'|_{\mathfrak{l}}$ が離散分解するすることを用いた ([13])。(より詳細に $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} W_M$ の長さは $\mathfrak{g}$ のみに依る定数で抑えられるので、二つの量は定数倍で上下から抑えられる。) $\square$

# 5 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の有限性

最後に定理 3.4 の証明の概略について述べる。

## 5.1 Bernstein 関手

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群は直接扱うには複雑なのでリー環の加群の問題に帰着する。$V' \otimes V$ は $\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}$-加群である。これに Bernstein 関手を当てて $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}, \Delta(G'))$-加群を作る。Bernstein 関手に関しては [12, II. 1] を参照されたい。

**事実 5.1.**

$$\Pi(V' \otimes V) := \mathcal{O}(\Delta(G')) \otimes_{\mathcal{U}(\Delta(\mathfrak{g}'))} (V' \otimes V)$$

と定めると $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}, \Delta(G'))$-加群となり、さらに

$$\Pi(V' \otimes V)^{\Delta(G')} \simeq V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$$

という $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}$-加群の同型が存在する。

**命題 5.2.**

$$\mathrm{Len}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{G'}}(V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V) \leq \mathrm{Len}_{\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}}(\Pi(V' \otimes V))$$

証明　$\Delta(G')$ の $\Pi(V' \otimes V)$ への作用は完全可約である。したがって、$\Pi(V' \otimes V)^{\Delta(G')}$ の部分加群 $X$ に対して $X$ で生成される $\Pi(V' \otimes V)$ の部分 $(\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}, \Delta(G'))$-加群を対応させる写像は単射になる。これから主張が従う。 $\square$

この命題より、$V' \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}')} V$ の長さではなく $\Pi(V' \otimes V)$ の長さを上から評価すればよいことがわかる。

## 5.2 $\mathcal{D}$-加群

問題は $V'$ と $V$ を既約加群全体を動かしたときに、一様に長さを抑えられるか、というところにある。$V'$ と $V$ を動かしたときの加群の長さを統制するために、$G/U \to G/B$ という主 $T$ 束を考える。

まず、Beilinson–Bernstein 対応について復習しておく。しばらくの間、$G$ を簡約代数群、$B = TU$ を Borel 部分群とする。$\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対して、$\mathcal{D}_{G/B,\lambda}$ を $G/B$ 上の $\lambda$ を捩れとする捩れ微分作用素の層とする。パラメータの取り方は何通りか考えられるが、

$$\Gamma(G/B, \mathcal{D}_{G/B,\lambda}) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda$$

と以下の定理が満たされるようにしておく。ここで、$I_\lambda$ は無限小指標 $\lambda$ を持つ極小原始イデアルとした。

**事実 5.3** (Beilinson–Bernstein [1])**.** $\lambda$ が regular かつ anti-dominant であるとき、局所化をとる関手 $\mathrm{L}$ と大域切断をとる関手 $\Gamma$ は圏同値

$$\mathrm{Mod}_{qc}(\mathcal{D}_{G/B,\lambda}) \underset{\Gamma}{\overset{\mathrm{L}}{\leftrightarrows}} \mathrm{Mod}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\lambda)$$

を与える。ここで、Mod は加群の圏を表し、$\mathrm{Mod}_{qc}$ は quasi-coherent なものの部分圏を表す。

この事実により、$\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}$-加群の命題を $\mathcal{D}$-加群の命題に帰着することができる。

$\mathcal{D}_{G/B,\lambda}$-加群の族を統制するために $G/U$ を考える。自然な射影 $p : G/U \to G/B$ により、$G/U$ は $G/B$ 上の主 $T$ 束となる。$G/B$ 上の $\mathcal{D}$-加群を $G/U$ 上の $\mathcal{D}$-加群の direct image として考え、捩れ $\lambda$ を動かすことで族だと思う。

**例 5.4.** $\rho$ を正ルートの和の半分とする。各 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ に対して、$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}$ は $\mathcal{D}_{G/B,\lambda}$-加群となる。$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{u})} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}_{-2\rho}$ は $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-加群の構造だけでなく $\mathcal{D}_{G/U}$-加群の構造も持つ。つまり、

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{u})} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}_{-2\rho} \overset{\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{t})}\mathbb{C}_{\lambda+\rho}}{\mapsto} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_{\lambda-\rho}$$

という風に、$\mathcal{D}_{G/U}$-加群から $\mathcal{D}_{G/B,\lambda}$-加群の族を得ることができる。さらにこの関手 $\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{t})}\mathbb{C}_{\lambda+\rho}$ は $\mathcal{D}$-加群の direct image として表すことができる。

$\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{g}$ の場合に戻る。$\widetilde{G} := G' \times G$ とし、上の $T, U$ などに $\widetilde{\cdot}$ を 付ける。

$\mathcal{D}_{\widetilde{G}/\widetilde{U}}$-加群 $\mathcal{M}$ と $\lambda \in \widetilde{\mathfrak{t}}^*$ に対して、

$$p_{+,\lambda}(\mathcal{M}) := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{U}(\widetilde{\mathfrak{t}})} \mathbb{C}_{\lambda+\rho} \in \mathrm{Mod}_{qc}(\mathcal{D}_{\widetilde{G}/\widetilde{B},\lambda})$$

と定める。(これは direct image 関手の 0 番目のコホモロジーである。)

このとき、以下の補題が成り立つ。

**補題 5.5.** ある holonomic $\mathcal{D}_{\widetilde{G}/\widetilde{U}}$-加群 $\mathcal{M}$ が存在して次の条件を満たす。任意の既約 $(\mathfrak{g}, K)$-加群 $V$ と既約 $(\mathfrak{g}', K')$-加群 $V'$ に対して、ある anti-dominant な $\lambda \in \widetilde{\mathfrak{t}}^*$ と全射

$$\Gamma(p_{+,\lambda}(\mathcal{M})) \twoheadrightarrow \Pi(V' \otimes V)$$

が存在する。

これから、$p_{+,\lambda}(\mathcal{M})$ の長さを $\lambda$ によらない定数で抑えられれば良いことがわかる。$\mathcal{D}$-加群の長さを評価するには有限な開被覆をとって、各開被覆上で評価してやればよい。$\widetilde{G}/\widetilde{B}$ の場合には、有限開被覆 $\widetilde{G}/\widetilde{B} = \bigcup_i U_i$ であって、

$$U_i \simeq \mathbb{C}^n$$
$$p^{-1}(U_i) \simeq \mathbb{C}^n \times \widetilde{T}$$

となるものが存在する。$m = \dim_{\mathbb{C}}(\widetilde{T})$ として $\widetilde{T} \hookrightarrow \mathbb{C}^m$ という開埋め込みを固定する。$\mathbb{D}_{\mathbb{C}^{n+m}}$ を $\mathbb{C}^{n+m}$ 上の Weyl 代数とする。

$p_{+,\lambda}(\mathcal{M})$ の長さを $\mathcal{M}$ にしかよらない定数で評価するために以下の補題を示せばよい。

**補題 5.6.** $M$ を holonomic $\mathbb{D}_{\mathbb{C}^{n+m}}$-加群とする。このとき、任意の $\lambda \in \widetilde{\mathfrak{t}}^*$ に対して $M_\lambda := \mathbb{C}_\lambda \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{t})} M$ は holonomic $\mathbb{D}_{\mathbb{C}^n}$-加群であり、

$$\mathrm{Len}_{\mathbb{D}_{\mathbb{C}^n}}(M_\lambda) \leq m(M_\lambda) \leq 2^m m(M)$$

となる。ここで、$m(M)$ は $M$ の multiplicity (または Bernstein degree) である。

$\mathrm{Len}_{\mathbb{D}_{\mathbb{C}^n}}(N) \leq m(N)$ は一般の holonomic $\mathbb{D}_{\mathbb{C}^n}$-加群 $N$ に対して成り立つ。Weyl 代数と $m(M)$ については例えば [8, 3.2.2] や [3, 1.§3 and §4] などを参照されたい。

$m = 1$ の場合を示せば、それを繰り返し用いることで $m$ が一般の場合が従う。$\mathbb{C}^{n+1}$ の標準座標系を $(x_1, \ldots, x_n, t)$ とすると、

$$\mathbb{D}_{\mathbb{C}^{n+1}} = \mathbb{C}[x_1, \partial/\partial x_1, \ldots, x_n, \partial/\partial x_n, t, \partial/\partial t]$$

である。$E := t\frac{\partial}{\partial t}$ と置く。補題 5.6 は次の補題から従う。

**補題 5.7.** $M$ を holonomic $\mathbb{D}_{\mathbb{C}^{n+1}}$-加群とする。このとき、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $M_\lambda := M/(E-\lambda)M$ は holonomic $\mathbb{D}_{\mathbb{C}^n}$-加群であり

$$m(M_\lambda) \leq 2m(M)$$

となる。

証明　基本的な証明の方針は [3, 1.6.2] と同様である。[3, 1.6.2] の場合は $M/\frac{\partial}{\partial t}M$ を考えている。今回の主張の場合、Heisenberg リー環 $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{1, t, \partial/\partial t\}$ の表現論を使って $E$ の作用が、完全可約であるか torsion-free であるかの二通りしかないこと、前者の場合に $t$ または $\partial/\partial t$ が torsion-free に作用していること、を使えばよい。 □

## 参考文献


[1] A. Beilinson and J. Bernstein. Localisation de $\mathfrak{g}$-modules. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 292(1):15–18, 1981.

[2] F. Bien. Orbits, multiplicities and differential operators. In *Representation theory of groups and algebras*, volume 145 of *Contemp. Math.*, pages 199–227. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[3] J.-E. Björk. *Rings of differential operators*, volume 21 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.

[4] M. Brion. Représentations des groupes réductifs dans des espaces de cohomologie. *Math. Ann.*, 300(4):589–604, 1994.

[5] M. Brion, D. Luna, and T. Vust. Espaces homogènes sphériques. *Invent. Math.*, 84(3):617–632, 1986.

[6] M. Duflo. Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple. *Ann. of Math. (2)*, 105(1):107–120, 1977.

[7] R. Goodman and N. R. Wallach. *Symmetry, representations, and invariants*, volume 255 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, 2009.

[8] R. Hotta, K. Takeuchi, and T. Tanisaki. *D-modules, perverse sheaves, and representation theory*, volume 236 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. Translated from the 1995 Japanese edition by Takeuchi.

[9] R. Howe. Transcending classical invariant theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(3):535–552, 1989.

[10] J. E. Humphreys. *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, volume 94 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[11] M. Kitagawa. Stability of branching laws for highest weight modules. *Transform. Groups*, 19(4):1027–1050, 2014.

[12] A. W. Knapp and D. A. Vogan, Jr. *Cohomological induction and unitary represen-*

*tations*, volume 45 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[13] T. Kobayashi. Restrictions of generalized Verma modules to symmetric pairs. *Transform. Groups*, 17(2):523–546, 2012.

[14] T. Kobayashi and T. Oshima. Finite multiplicity theorems for induction and restriction. *Adv. Math.*, 248:921–944, 2013.

[15] J. C. McConnell and J. C. Robson. *Noncommutative Noetherian rings*, volume 30 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, revised edition, 2001. With the cooperation of L. W. Small.

[16] F. Sato. On the stability of branching coefficients of rational representations of reductive groups. *Comment. Math. Univ. St. Paul.*, 42(2):189–207, 1993.

[17] D. A. Timashev. *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, volume 138 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, Heidelberg, 2011. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, 8.

[18] E. P. van den Ban. Invariant differential operators on a semisimple symmetric space and finite multiplicities in a Plancherel formula. *Ark. Mat.*, 25(2):175–187, 1987.

[19] É. B. Vinberg and B. N. Kimel'fel'd. Homogeneous domains on flag manifolds and spherical subgroups of semisimple lie groups. *Funct. Anal. Appl.*, 12(3):168–174, 1978.