数理解析研究所講究録 1356 巻 2004 年 59-72

The Turing patterns in gradient/skew-gradient dissipative systems

神戸大学発達科学部　桑村雅隆 (Masataka Kuwamura)
Faculty of Human Development
Kobe University

1 序

いくつかの安定な定常パターンが存在するとき、ある条件の下でそれらのうちのどのパターンがもっとも選ばれやすいのかという問題は、パターン選択問題とよばれている [1]。これは、非常に根本的な問題で意外に難しい。というのは、パターン選択問題を解くことは、定常解のアトラクターの basin を分類することと同じであり、それはほとんどの場合不可能であると思われるからである。ここでは、勾配・歪勾配系とよばれる散逸系において、空間 1 次元チューリングパターンの選択問題について、パターンの線形安定性解析と数値実験の結果から得られた法則について報告する。

2 勾配・歪勾配構造

まず、勾配・歪勾配系の定義から始めよう。歪勾配系の概念は、反応拡散方程式系の standing pulse 解の不安定性を考察するために [11] によって初めて導入され、[8] において、より一般的な形式で次のように定式化された。$\mathbf{R}$ 上の n 個の成分からなる系

(2.1)
$$Tu_t = Du_{xx} + f(u)$$

を考える。ここで、T は非負対角行列であり、 D は正則行列である。また、非線形項は

(2.2)
$$f(u) = Q \nabla_u F(u)$$

であるとする。ただし、Q は対称行列で $Q^2 = I_n$ をみたし、$F = F(u) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は十分なめらかであると仮定する。さらに、次の条件

(2.3)
$$D^T Q = QD$$

を仮定する。このとき、QD は非退化な対称行列であり、f のヤコビ行列 f_u は

(2.4)
$$f_u(u)^T Q = Q f_u(u)$$

をみたす。(2.1) は (歪) エネルギー関数

$$\mathcal{E}[u] = \int \left\{ \frac{1}{2}\langle Du_x, Qu_x\rangle - F(u) \right\} dx \tag{2.5}$$

をもつ。ここで、$\langle \, , \, \rangle$ は通常の $\mathbf{R}^n$ 上のユークリッド内積である。実際、簡単な計算により

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}[u(x,t)] = -\int \langle u_t, QTu_t\rangle \, dx$$

が成り立つことが確かめられる。(2.1) は QT が非負のとき勾配構造をもつという。そうでないときは歪勾配構造をもつという。(2.1) の定常問題

$$Du_{xx} + f(u) = 0 \tag{2.6}$$

はハミルトン構造 [2, 7] をもつことに注意しよう。実際、(2.3) により $Z = (u, u_x)^T$ とおくと、(2.6) は

$$JZ_x = \frac{\partial H(Z)}{\partial Z} \tag{2.7}$$

の形に書ける。ここで、

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -QD \\ QD & 0 \end{pmatrix}$$

は交代行列であり、

$$H(Z) = H(u, u_x) := \frac{1}{2}\langle Du_x, Qu_x\rangle + F(u)$$

は第 1 積分（ハミルトニアン）である。勾配・歪勾配系の例として、ここでは、Ben-Jacob [3] らによる activator-inhibitor 型のモデル方程式系

$$\tau_1 u_t = d_1 u_{xx} + \alpha(1-u^2)u - \beta v, \quad \tau_2 v_t = d_2 v_{xx} - \gamma(1+v^2)v + \beta u \tag{2.8}$$

と、Swift-Hohenberg equation

$$u_t = \mu u - (1+\partial_{xx})^2 u - u^3 \tag{2.9}$$

をあげておく。(2.8) は

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F = F(u,v) = \frac{\alpha}{4}(1-u^2)^2 - \beta uv + \frac{\gamma}{4}(1+v^2)^2$$

とすれば (2.1) の形に書ける。(2.9) についてはv $v = u + u_{xx}$ とおくと、

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F = F(u,v) = \frac{\mu}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4 - uv + \frac{1}{2}v^2$$

によって (2.1) の形に書けることがわかる。他の例については [8] を見よ。

3 チューリングパターンの存在条件

この節では、チューリングパターンの存在条件について考える。$\bar{u}$ は空間一様な (2.1) の定常解とする。$\bar{u}$ が不安定化し、空間周期定常解が分岐する状況を考える。(2.1) を $u = \bar{u}$ のまわりで線形化すると

$$\lambda T\Psi = L\Psi \tag{3.1}$$

を得る。ここで、$L = D\partial_x^2 + f_u(\bar{u})$ である。線形化固有値問題 (3.1) を解くために $\Psi = \sum_k e^{ikx}\Psi_k$, $\Psi_k \in \mathbf{C}^n$ とおいて、(3.1) に代入すると、連立一次方程式

$$(\lambda T + k^2 D - f_u(\bar{u}))\Psi_k = 0 \tag{3.2}$$

を得る。$\bar{u}$ が不安定化し、別の空間非一様な定常解が分岐するためには、$\lambda = 0$ に対して (3.2) が非自明な解をもつことが必要である。つまり、$\det(k^2D - f_u(\bar{u})) = 0$ でなければならない。以下では、分岐パラメータを μ で表す。μ は D または 非線形項 f に含まれているパラメータのうちの 1 つである。$\det(k^2D - f_u(\bar{u})) = 0$ を μ について解いたものを $\mu = \hat{\mu}(k^2)$ とする。このとき、分岐点 μ_c を次の式で定義する。

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\mu}(\theta)|_{\theta=k_c^2} = 0, \quad \mu_c = \hat{\mu}(k_c^2) \tag{3.3}$$

ここで、k_c は critical な波数とよばれる。分岐解が図 1 のように $\mu > \mu_c$ で現れるものと仮定しても一般性は失われないので

$$\frac{\partial}{\partial\theta^2}\hat{\mu}(\theta)|_{\theta=k_c^2} > 0$$

を仮定する。

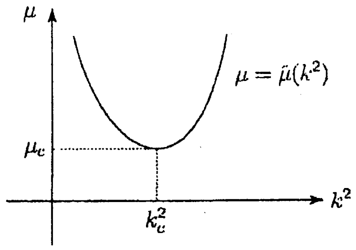


図1：$\mu = \hat{\mu}(k^2)$ のグラフ

さらに、$\bar{u}$ は $\mu < \mu_c$ で安定でなければならないから、$\det(\lambda T + k^2 D - f_u(\bar{u})) = 0$ によって定義される dispersion relation $\lambda = \lambda(k^2; \mu)$ は、$\mu < \mu_c$ および 任意の k に対して、$Re\lambda = Re\lambda(k^2; \mu) < 0$ をみたすものとする。このとき、スタンダードな分岐理論によると、適当な仮定のもとで、分岐点 (k_c, μ_c) の近くで

$$\phi(x; k, \mu) = ae^{ikx}\Phi_k + c.c. + h.o.t. \tag{3.4}$$

の形の分岐解が構成できることが知られている。ここで、$c.c.$ は複素共役、 $h.o.t.$ は a に関する高次の項を表し、$\Phi_k \in \mathbf{C}^n$ は

$$(k^2 D - f_u(\bar{u}))\Phi_k = 0 \quad \text{for} \quad \mu = \hat{\mu}(k^2) \tag{3.5}$$

および $\langle \Phi_k, \Phi_k \rangle = 1$ (ここでは、$\langle \ , \ \rangle$ は $\mathbf{C}^n$ の標準的な内積を表す) をみたす。また、$a = a(k, \mu - \hat{\mu}(k^2)) \geq 0$ は $a(k, 0) = 0$ をみたし十分小さい。(3.4) は波数 k によってパラメタライズされた (2.1) の空間周期定常解の1パラメータ族である。$k_c \neq 0$ のとき (3.4) はチューリングパターンとよばれる。次の定理は、チューリングパターンが存在するための必要条件である。

定理1　QD が definite ならば、$k_c = 0$ である。

この証明は [9] を見よ。

4 チューリングパターンの不安定性

本節では、前節で構成したチューリングパターンの不安定性について考える。まったく当たり前のことだが、不安定なパターンが選択されることはありえない。まず (3.4) の線形安定性問題から考える。(3.4) の不安定性は、次の一般的に成立する定理によって知ることができる。

定理２　$u=\varphi(x;k)$ は (2.1) の空間周期定常解の１パラメータ族で、波数 k によってパラメタライズされているとする。つまり、$\varphi(x;k)$ は

$$D\varphi_{xx}(x;k)+f(\varphi(x;k))=0,\quad \varphi(x;k)=\varphi(x+l(k);k) \tag{4.1}$$

をみたすとする。ただし、$l(k)=2\pi/k$ は $\varphi(x;k)$ の空間周期である。このとき、

$$sgn(I(k)\cdot d^2E(k)/dk^2)<0$$

ならば、$\varphi(x;k)$ は $L^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)\cap C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$ で線形不安定である。ここで、

$$I(k):=\int_0^{l(k)}\langle T\varphi_x(x;k),Q\varphi_x(x;k)\rangle\,dx \tag{4.2}$$

$$E(k):=\frac{1}{l(k)}\int_0^{l(k)}\left\{\frac{1}{2}\langle D\varphi_x(x;k),Q\varphi_x(x;k)\rangle-F(\varphi(x;k))\right\}dx \tag{4.3}$$

である。

勾配系の定義を思い出すと、(2.1) が勾配系のとき QT は正値であるから $I(k)>0$ となる。したがって、次の系を得る。

系１　上の定理２において、(2.1) が勾配系のときは、 $d^2E(k)/dk^2<0$ ならば、$\varphi(x;k)$ は $L^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)\cap C(\mathbf{R},\mathbf{R}^n)$ で線形不安定である。

定理２の証明については、[9] を見よ。定理２は、どんな空間周期定常解の１パラメータ族に対しても成立する極めて一般的な結果である。したがって、(3.4) において、分岐パラメータ μ を任意に選んで固定し、$\varphi(x;k)=\phi(x;k,\mu)$ とおいて定理２を適用することができる。

$$E(k,\mu):=\frac{1}{l(k)}\int_0^{l(k)}\left\{\frac{1}{2}\langle D\phi_x(x;k,\mu),Q\phi_x(x;k,\mu)\rangle-F(\phi(x;k,\mu))\right\}dx \tag{4.4}$$

とおく。定理２より $\phi(x;k,\mu)$ の不安定性は $\partial_k^2E(k,\mu)=0$ において変化する可能性があることがわかる。$\partial_k^2E(k,\mu)=0$ を μ について解いて得られる $\mu=\mu_E(k)$ は Eckhaus instability criterion とよばれる。また、(2.5) に注意して (4.4) をチューリングパターン $\phi(x;k,\mu)$ の単位長さあたりの（歪）自由エネルギーとよぶ。

5　$E(k,\mu)$ の性質

前節の定理２により、チューリングパターンの不安定性は、$E(k,\mu)$ の影響を受けていることがわかる。本節では、$E(k,\mu)$ の性質について調べる。

定義１　$E_c := Re\,\partial_k\langle D\Phi_k,\ Q\Phi_k\rangle|_{k=k_c} \neq 0$ のとき、分岐点 (k_c, μ_c) は非退化であるという。ここで、Φ_k は、(3.5) で定義されている。

チューリング分岐点 $(k_c \neq 0)$ が非退化のとき、次のことが成り立つ。

定理３　分岐点 (k_c, μ_c) は非退化で $k_c \neq 0$ とする。このとき、分岐点の近くで次の (1) と (2) が成り立つ。

(1) 任意の $\mu > \mu_c$ に対して、$E(k) := E(k, \mu)$ は $(\underline{k}, \bar{k})$ においてただ一つの極値をもつ。ただし、$\underline{k}$ と $\bar{k}$ は $\hat{\mu}(\underline{k}^2) = \hat{\mu}(\bar{k}^2) = \mu$ によって定義される。
(2) (1) で述べた極値を与える $k_m = k_m(\mu)$ は、$Re\langle D\Phi_k,\ Q\Phi_k\rangle = 0$ を解いて (近似的に) 得られる。

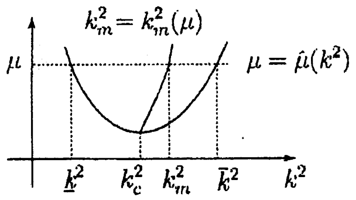


図２: $\mu > \hat{\mu}(k^2)$ に対して $E(k, \mu)$ は $k_m = k_m(\mu)$ でただ一つの極値をとる。

注意　(1) 定理３ (2) は μ が非線形項 f に含まれる (D に含まれない) とき、$k_m(\mu)$ が (μ によらない一定値) k_c で (近似的に) 与えられることを意味する。このとき $k_m(\mu) \approx k_c$ と書く。

(2) ２成分系の勾配・歪勾配系については、$k_c \leq k_m(\mu)$ が成り立つ。

(3) 定理１により、チューリング分岐点では QD は定符号でない。そのことは、$Re\langle D\Phi_k,\ Q\Phi_k\rangle = 0$ をみたす k が存在する必要条件である。

さらに、つぎのことが成り立つ。

系２　$E_c > 0$ ならば、$E(k) = E(k, \mu)$ は k に関して下に凸であり、$k_m = k_m(\mu)$ においてのみ最小値をとる。

定理３と系１についての証明は、[9] を見よ。

6 応用

この節では、前節までで得られた結果を具体的な例に適用してみる。まず、Ginzburg-Landau 方程式

$$u_t = u_{xx} + u(\mu - u^2 - v^2), \quad v_t = v_{xx} + v(\mu - u^2 - v^2) \tag{6.1}$$

について考える。これは、$T = D = Q = I_2$, $F = \mu(u^2+v^2)/2-(u^2+v^2)^2/4$ とおくと、(2.1) の形に書くことができる。$QD = I_2$ は正値であるから、定理1により (6.1) はチューリングパターンをもたないが、$\phi(x; k, \mu) = \sqrt{\mu - k^2}\,(\cos kx, \sin kx)$ の形の空間周期定常解の1パラメータ族をもつことはすぐにわかる。この $\phi(x; k, \mu)$ に対して、定理2を適用してみる。直接の計算により、$E(k) = E(k, \mu) = -(\mu - k^2)^2/4$ であることがわかるので、これより $E''(k) = \partial_k^2 E(k, \mu) = \mu - 3k^2$ をえる。一方、$QT = I_2$ は正値であるから、勾配系の定義により (6.1) は勾配系である。よって、系1により $\mu < 3k^2$ のとき、$\phi(x; k, \mu)$ は不安定となる。これは、Eckhaus instability とよばれている。

つぎに、(2.8) について考える。3節で述べたように $\bar{u} = 0$ とおいて (3.5) を解くと

$$\begin{aligned} &\beta^2 - (\alpha - k^2 d_1)(\gamma + k^2 d_2) = 0 \\ &\Phi_k = \left(\frac{\beta^2}{\beta^2 + (\alpha - k^2 d_1)^2}, \frac{(\alpha - k^2 d_1)^2}{\beta^2 + (\alpha - k^2 d_1)^2}\right) \end{aligned} \tag{6.2}$$

となる。分岐パラメータを $\mu = d_2$ に選ぶと、(6.2) の第1式より

$$d_2 = \hat{d}_2(k^2) = \frac{\beta^2}{k^2(\alpha - k^2 d_1)} - \frac{\gamma}{k^2}$$

を得る。$\hat{d}_2' = 0$ より分岐点が

$$k_c^2 = \frac{\alpha\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{d_1(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})} > 0\,, \quad d_2^c = \hat{d}_2(k_c^2) = \frac{d_1(\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma})^2}{\alpha^2} \tag{6.3}$$

で与えられることがわかる。また、適当な条件の下で $d_2 > \hat{d}_2(k^2)$ のとき、分岐点の近くで分岐解 (3.4) が構成でき、簡単な計算により、$E_c = \partial_k \langle D\Phi_k,\, Q\Phi_k\rangle|_{k=k_c} > 0$ が示せる。さらに、$\langle D\Phi_k,\, Q\Phi_k\rangle = 0$ より

$$k_m^2 = k_m^2(d_2) = \frac{\alpha}{d_1} - \frac{\beta}{\sqrt{d_1 d_2}} > k_c^2 \tag{6.4}$$

が示せる。同様に、分岐パラメータを $\mu = \beta^2$ に選ぶケースも考えられる。このときは

$$\begin{aligned} &\hat{\beta}^2(k^2) = (\alpha - k^2 d_1)(\gamma + k^2 d_2) \\ &k_c^2 = \frac{\alpha d_2 - \gamma d_1}{2 d_1 d_2} > 0\,, \quad \beta_c^2 = \hat{\beta}^2(k_c^2) = \frac{(\alpha d_2 + \gamma d_1)^2}{4 d_1 d_2} \end{aligned} \tag{6.5}$$

となる。(3節の仮定とは異なるけれども) 適当な条件の下で $\beta^2 < \hat{\beta}^2(k^2)$ のとき、分岐点の近くで分岐解 (3.4) が構成でき、$E_c = \partial_k \langle D\Phi_k, Q\Phi_k \rangle|_{k=k_c} > 0$ が確かめられる。また、$\langle D\Phi_k, Q\Phi_k \rangle = 0$ より、

$$k_m^2 = k_m^2(\beta^2) = \frac{\alpha d_2 - \gamma d_1}{2d_1 d_2}$$

を得る。

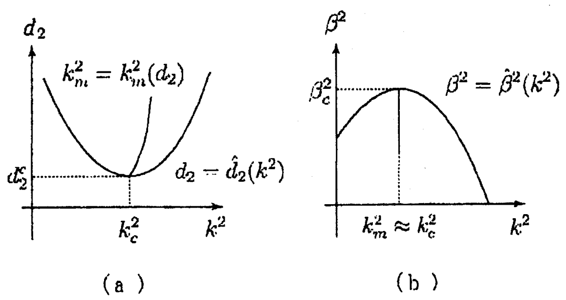


図2：チューリングパターンの分岐図；(a) $\mu = d_2$ (b) $\mu = \beta^2$

7 パターン選択

本節では、前節までの結果を踏まえた上で数値実験を行い、どのチューリングパターンが選択されるのかを調べる。ここでは、周期境界条件の下で、(2.1) に関連した次の初期値境界値問題を擬スペクトル法と離散 FFT を用いて数値的に解く：

$$(7.1) \qquad \begin{aligned} &Tu_t = Du_{xx} + f(u), \quad 0 < x < L \\ &u(x,0) = \varepsilon u_0(x) \end{aligned}$$

ここで、ε と $|D|/L$ ($|D| = \max|d_{ij}|$) は十分小さいものとし、初期値 $u_0(x) \in (-1/2, 1/2)$ は疑似乱数によって生成されたランダムなデータであるとする。分岐パラメータ μ を μ_c の近くで固定し、(7.1) を数値的に解くと、数値解の空間的なプロファイルは、図3に見られるように時間発展していき、十分時間がたった後、図3 (e) のような空間周期的なパターンへ落ち着く。図3の例では (e) のパターンが選択されたとみなすことができる。ここでは、図4に見られるように、それらのパワースペクトラムを調べることにより、どの波数 k をもつパターンが選択されたのかを判定する。

[5] によると、$u_0(x)$ のパワースペクトラムが $k = k_c$ においてのみ最大値をとるならば、μ が μ_c の十分近くにあるとき、十分大きな T_1 に対して $u(x, T_1)$ のパワースペクトラムは $k = k_c$ を中心とした図4 (e) のような釣鐘形のクラスター分布を

とることが証明されている。このことは、分岐点の十分近くであれば、どんな系に対しても成立する。この結果から、選択されるパターンの波数は k_c の近くにあることが予想される。以下では具体的な方程式系を用いて数値実験を行い、どの波数のパターンが選択されるのかを調べる。

まず、(2.9) を調べる。(2.9) は分岐点 $(k_c, \mu_c) = (1, 0)$ をもち、$\mu > (1-k^2)^2$ のとき、この分岐点の近くで

$$\phi(x; k, \mu) = \frac{2a}{\sqrt{3}} \cos(kx) + O(a^3) \quad , \quad a = \sqrt{\mu - (1-k^2)^2}$$

のかたちの分岐解をもつことが知られている [4]。この例では、前節の結果から $k_m(\mu) \approx k_c = 1$ が成り立つことがわかる。$L = 200\pi$ とおくと、$k_c = 1$ を波数にもつ基本パターンの空間周期 $\lambda_c = 2\pi$ に対して L/λ_c は整数となる。この場合、離散 FFT は $\delta k = 2\pi/L = 0.01$ の精度の波数の変化を検出することができる。図３と４は、$\mu = 0.01$, $\varepsilon = 0.0001$ として (2.9) を解いた結果を示している。図３ (e) は $T_1 = 2000$ のときの $u(x, T_1)$ のプロファイルであり、(準) 安定なパターンを示している。また、そのパワースペクトラムは図４ (e) で与えられている。一般には、(準) 安定な空間周期パターンのパワースペクトラムが必ずしも図４ (e) のようなきれいな釣鐘形になるわけではない。そこで、３０個の異なる初期値に対する $u(x, T_1)$ のパワースペクトラムを求め、その平均をとりピークとなる波数 $k_s(\mu)$ を決める。この例では、$k_s(0.01) = 1.00$ となることがわかる。μ をいろいろ変化させて $k_s(\mu)$ を調べると、以下のような表を得る。

μ	0.01	0.02	0.05	0.1	0.2
T_1	2000	1500	1000	500	500
$k_s(\mu)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

表１：いろいろな μ に対する $k_s(\mu)$

したがって、(2.9) においては $k_s(\mu) \approx k_m(\mu) \approx k_c$ が成り立つことがわかる。

次に (2.8) を扱う。まず、$\mu = \beta^2$ の場合について調べよう。前節の結果から $k_m(\mu) \approx k_c$ が成り立つので、この場合も $k_s(\mu) \approx k_m(\mu) \approx k_c$ が成り立つことが期待される。(2.9) のときと同様に $L = 200\pi$, $k_c = 1$ とおく。(6.5) より、$\alpha = 1.0$, $\gamma = 2.0$, $d_1 = 0.25$, $d_2 = 1.0$ とおくと $\mu_c = \beta_c^2 = (1.5)^2$ となる。$\tau_1 = \tau_2 = 1.0$, $\varepsilon = 0.0001$ とおいて、先程の例と同様にいろいろな $\mu = \beta^2 \, (< \beta_c^2)$ に対して $k_s(\mu) = k_s(\beta^2)$ を調べると次の結果を得る。

μ	$\|\mu-\mu_c\|/\mu_c$	$k_c(\approx k_m(\mu))$	$k_s(\mu)$
$(1.49)^2$	0.0132889	1.00	0.99
$(1.485)^2$	0.0199	1.00	0.97
$(1.48)^2$	0.0264889	1.00	0.97
$(1.46)^2$	0.0526222	1.00	0.94

表２： いろいろな μ に対する $k_s(\mu)$

この結果から、$k_s(\mu)$ は必ずしも $k_c(\approx k_m(\mu))$ に一致しないことがわかる。分岐点の十分近くでは $k_s(\mu)\approx k_m(\mu)\approx k_c$ が成り立つけれども、分岐点から離れると $k_s(\mu)<k_m(\mu)$ が成り立つことがわかる。

次に $\mu=d_2$ のケースを調べる。この場合、前節の結果から $k_m=k_m(\mu)>k_c$ が成り立つ。前のケースと同様に $\tau_1=\tau_2=1.0$, $\varepsilon=0.0001$, $L=200\pi$, $k_c=1$ と設定し、$\alpha=1.0$, $\beta=1.5$, $\gamma=2.0$ とおく。このとき、 (6.3) より $d_1=0.25$ と $\mu_c=d_2^c=1.0$ を得る。 k_c と k_m の役割を調べるために、 (6.4) に注意して $k_m(\mu)$ が離散 FFT によって検出できるように $\mu=d_2\,(>d_2^c)$ を動かす。すると、以下の結果を得る。

μ	$\|\mu-\mu_c\|/\mu_c$	k_c	$k_s(\mu)$	$k_m(\mu)$
1.01354	0.0135359	1.00	1.00	1.01
1.02749	0.0274873	1.00	1.00	1.02
1.072	0.0720021	1.00	1.01	1.05
1.1562	0.156203	1.00	1.01	1.10

表３： $\alpha=1.0, \beta=1.5, \gamma=2.0.$ に対する $k_s(\mu)$ と $k_m(\mu)$

同様に、$\alpha=1.0$, $\beta=1.43$, $\gamma=2.0$ とおくと、(6.3) より $d_1\approx 0.129056$ and $d_2^c\approx 0.347912$ となる。この場合は、次の計算結果を得る。

μ	$\|\mu-\mu_c\|/\mu_c$	k_c	$k_s(\mu)$	$k_m(\mu)$
0.352115	0.0120813	1.00	1.01	1.02
0.358726	0.0310831	1.00	1.03	1.05
0.370618	0.0652656	1.00	1.05	1.10
0.383708	0.102891	1.00	1.08	1.15

表４： $\alpha=1.0, \beta=1.43, \gamma=2.0.$ に対する $k_s(\mu)$ と $k_m(\mu)$

これらの数値実験の結果から、選択されるパターンの波数は k_c でもないし、$k_m(\mu)$ でもないということがわかる。一般にいえることは次のことである。

数値実験結果　一般に、２つの成分からなる勾配・歪勾配系においては、分岐点の近くで

$$k_s(\mu) \leq k_m(\mu) \tag{7.2}$$

が成り立つ。

注意　一般の n 成分系では、上のような結果が成り立つかどうかは、まだ何も調べていないのでわからない。

$k_s(\mu)$ は最も選択されやすいパターンの波数であると思われるが、どうやって $k_s(\mu)$ を予測すればよいのだろうか？これについては、[10] において述べる予定である。[10] では、２次元ロールパターンに関する臨界安定性仮説 [6] の正当性についての検証を行う。不等式 (7.2) が成立するかどうかを確かめることが、臨界安定性仮説の検証につながっている。

8　まとめ

[1] でも述べられているように、パターン選択問題はいろいろな分野に現れる普遍的な問題であるのだが、既知の結果がたくさんあるようには思えない。ここで取り扱ったのは、もっとも基本的と思われる空間１次元のチューリングパターンの選択問題である。このレベルの基本的な問題に対してさえ、どういうことがいえるのかは意外にも知られていなかったように思える。実際、どのスタンダードな教科書においても「選択されるパターンの波数は k_c である」という通説が述べられている程度であるように思える。確かにこの通説は、分岐点の十分近くでは正しい。しかし、ここでの結果から、分岐点から少し離れたところであっても、この説が正しくない場合がありうることがわかる。

勾配・歪勾配系は、(2.7) に見られるようなある種の対称構造を内在している。この対称性のおかげで、選択される波数 $k_s(\mu)$ は $k_s(\mu) \leq k_m(\mu)$ を満たす範囲にある。この事実を数値的に見いだしたということが、この報告の結論である。

参考文献

[1] 西浦廉政、非線形問題１、岩波書店

[2] アーノルド、古典力学の数学的方法、岩波書店

[3] E. Ben-Jacob, H. Brand, G. Dee, L. Kramer and J. S. Langer, Physica D **14** (1985), pp.348-

[4] P. Collet and J. P. Eckmann, Instabilities and Fronts in Extended Systems, Princeton Univ. Press, 1990.

[5] W. Eckhaus, J. Nonlinear Sci. **3** (1993), pp.329-

[6] 太田隆夫、界面ダイナミクスの数理、日本評論社

[7] ゴールドスタイン、古典力学（上、下）、吉岡書店

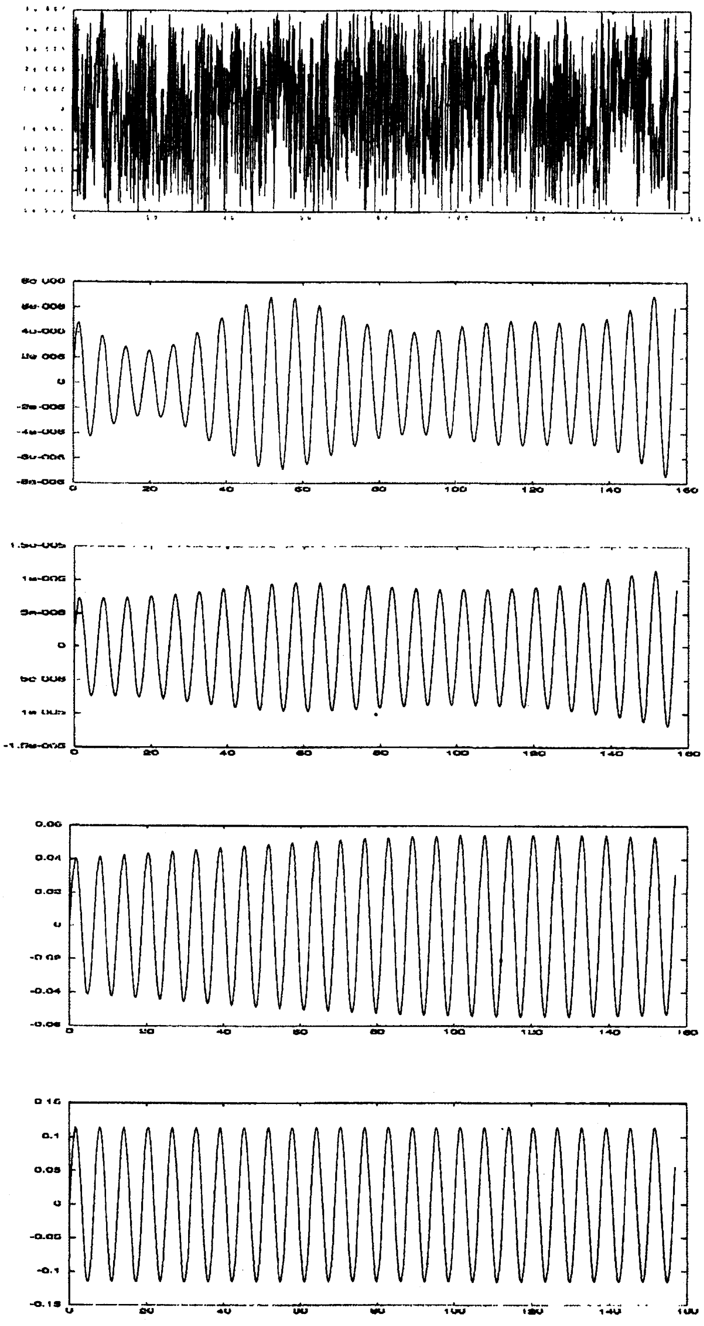
[8] M. Kuwamura and E. Yanagida, Physica D **175** (2003), pp.185-

[9] M. Kuwamura, submitted.

[10] M. Kuwamura, in preparation.

[11] E. Yanagida, J. Dyn. Diff. Eqns. **14** (2002), pp.189-

図 3: (2.9) の数値解の $0 \leq x \leq 50\pi$ における空間プロファイル; (a) $t = 0$, (b) $t = 40$, (c) $t = 100$, (d) $t = 1000$, (e) $t = 2000$.



(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

図 4: 図 3 で示された (2.9) の数値解のパワースペクトラムの $0.64 \le k \le 1.28$ における分布; (a) $t = 0$, (b) $t = 40$, (c) $t = 100$, (d) $t = 1000$, (e) $t = 2000$.