数理解析研究所講究録 第2103巻 2019年 86-89

偶数次直交群の有限型多重旗多様体

龍谷大学 文学部　松木 敏彦
Toshihiko Matsuki
Faculty of Letters, Ryukoku University

Abstract

標数 $\neq 2$ の無限体 $\mathbb{F}$ 上の偶数次 split 直交群 G の有限型多重旗多様体の分類を行なう。ただし、多重旗多様体 $\mathcal{M} = G/P_1 \times \cdots \times G/P_k$ 上の G の対角作用による軌道が有限個のとき、$\mathcal{M}$ は有限型であるという。

$\mathbb{F}$ は標数 $\neq 2$ の可換無限体とする。$\mathbb{F}^{2n}$ 上の対称双線形形式 (,) を

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,2n+1-j}$$

で定義する。ただし、$e_1, \ldots, e_{2n}$ は $\mathbb{F}^{2n}$ の標準基底とする。split 直交群を

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{F}) \mid (gu, gv) = (u, v) \text{ for all } u, v \in \mathbb{F}^{2n}\}$$

で定義する。本稿では便宜的に $G = \mathrm{O}_{2n}(\mathbb{F})$ と表わそう。split 特殊直交群

$$G_0 = \{g \in G \mid \det g = 1\} \ (= \mathrm{SO}_{2n}(\mathbb{F}))$$

も定義でき、$G = G_0 \sqcup \mathrm{diag}(I_{n-1}, J_2, I_{n-1})G_0$ である。ただし、$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

正整数の列 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p)$ $(a_1 + \cdots + a_p \leq n)$ に対し、G の旗多様体 $M_{\mathbf{a}}$ が

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{a}} = \{V_1 \subset \cdots \subset V_p \mid & V_j \text{ は } \mathbb{F}^{2n} \text{ の部分空間 }, \\ & \dim V_j = a_1 + \cdots + a_j,\ (V_p, V_p) = \{0\}\} \end{aligned}$$

で定義される。

多重旗多様体 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k} = M_{\mathbf{a}_1} \times \cdots \times M_{\mathbf{a}_k}$ に G の対角作用

$$g(m_1, \ldots, m_k) = (gm_1, \ldots, gm_k) \quad (g \in G,\ m_j \in M_{\mathbf{a}_j})$$

が定義される。

問題 $|G\backslash\mathcal{M}| < \infty$ となるための $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ の条件を求めよ。 （$|G\backslash\mathcal{M}| < \infty$ となる多重旗多様体 $\mathcal{M}$ は有限型であるという。）

注意 1 (i) 奇数次の split 直交群について、この問題は [M15] で解かれた。

(ii) Magyar, Weyman and Zelevinsky [MWZ99] は一般線形群についてこの問題を解決した。

(iii) [MWZ00] はシンプレクティック群についてこの問題を解決した。ただし、$\mathbb{F}$ は代数的閉体とする。

本稿では、この問題の解決について報告する。詳細は [M18] に発表予定である。まず、次のことが成り立つ。

命題 2 $n \geq 2,\ k \geq 4$ のとき、$|G\backslash\mathcal{M}| = \infty$

従って、以下では 3 重旗多様体 $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} = M_{\mathbf{a}} \times M_{\mathbf{b}} \times M_{\mathbf{c}}$ を考察すればよい。ただし

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_p), \quad \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q), \quad \mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_r)$$

とする。（注： $k = 2$ のとき、$G\backslash\mathcal{M}$ は G の Bruhat 分解に帰着する。） $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ の順番を入れ替えることにより、

$$p \leq q \leq r$$

と仮定してよい。

命題 3 $n \geq 3,\ |G\backslash\mathcal{T}| < \infty$ のとき、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のうちのどれかは (1) または (n) である。

従って

$$\mathbf{a} = (1) \text{ or } (n), \quad q \leq r. \tag{1}$$

と仮定してよい。

命題 4 $n \geq 3,\ \mathbf{a} = (1),\ q \geq 2,\ |G\backslash\mathcal{T}| < \infty$ のとき、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のどちらかは $(k, n-k)$ with some k である。

従って、必要に応じて $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ を入れ替えることにより、

$$\mathbf{a} = (1) \text{ and } q \geq 2 \Longrightarrow \mathbf{b} = (k, n-k) \tag{2}$$

と仮定してよい。

命題 5 $n \geq 4,\ \mathbf{a} = (n),\ q \geq 2,\ |G\backslash\mathcal{T}| < \infty$ のとき、$\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ のどちらかは

$$(1,1), \quad (1, n-1) \quad \text{または} \quad (n-1, 1)$$

である。

従って、必要に応じて $\mathbf{b}$ と $\mathbf{c}$ を入れ替えることにより、

$$\mathbf{a} = (n) \text{ and } q \geq 2 \Longrightarrow \mathbf{b} = (1,1),\ (1, n-1) \text{ or } (n-1, 1) \tag{3}$$

と仮定してよい。

次の命題は体 $\mathbb{F}$ の性質による条件を与える。

命題 6 $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| = \infty$ のとき、次の 3 つの場合について $|G\backslash\mathcal{T}| = \infty$ である。

(i) $\max(a_1, b_1, c_1) < n$ (Proposition 1.4 in [M15]).

(ii) $\mathbf{a} = (n),\ q, r \geq 2$ and $\max(b_1 + b_2, c_1 + c_2) < n$.

(iii) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b)$ with $3 \leq b \leq n-2,\ r \geq 4$ and $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 < n$.

従って、次の 3 条件を仮定してよい。

$$\max(a_1, b_1, c_1) < n \Longrightarrow |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty. \tag{4}$$

$$\mathbf{a} = (n),\ q, r \geq 2 \text{ and } \max(b_1 + b_2, c_1 + c_2) < n \Longrightarrow |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b) \text{ with } 3 \leq b \leq n-2,\ r \geq 4, \quad c_1 + c_2 + c_3 + c_4 < n \\ &\qquad \Longrightarrow |\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| < \infty. \end{aligned} \tag{6}$$

偶数次直交群の有限型 3 重旗多様体は次のように分類される。[*1]

定理 7 (1), . . . , (6) を仮定する。このとき、$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}}$ が有限型であるための必要十分条件は $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ が次の 7 つの条件のどれかを満たすことである。

(I-1) $\mathbf{a} = (1)$ and $q = 1$.

(I-2) $\mathbf{a} = (1)$ and $\mathbf{b} = (k, n-k)$.

(II) $\mathbf{a} = (n)$ and $\mathbf{b} = (1),\ (2),\ (3),\ (n-1),\ (n),\ (1,1),\ (1, n-1)$ or $(n-1, 1)$.

(III-1) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b)$ with $4 \leq b \leq n-2$ and $r = 1$.

(III-2) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b)$ with $4 \leq b \leq n-2$ and $r = 2$.

(III-3) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b)$ with $4 \leq b \leq n-2$ and $\mathbf{c}$ is one of

$$\begin{aligned} &(1, k, n-k-1),\ (k, 1, n-k-1),\ (k, n-k-1, 1), \\ &(1, 1, k),\ (1, k, 1) \text{ or } (k, 1, 1). \end{aligned}$$

(III-4) $\mathbf{a} = (n),\ \mathbf{b} = (b)$ with $4 \leq b \leq n-2$ and $\mathbf{c}$ is one of

$$(1, 1, 1, n-3),\ (1, 1, n-3, 1),\ (1, n-3, 1, 1),\ (n-3, 1, 1, 1) \text{ or } (1, 1, 1, 1).$$

注意 8 (i) $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ のとき、$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ が定理 7 の (I-1), (I-2), (II) のどれかを満たすとする。このとき、[S03] によって、2 重旗多様体 $\mathcal{D} = M_{\mathbf{a}} \times M_{\mathbf{b}}$ は開 B-軌道を持つ。ただし、B は G のボレル部分群とする。Brion および Vinberg の定理 ([B86], [V86]) により、$\mathcal{D}$ は有

[*1] 6 月の講演では、命題 6 の (iii) と定理 7 の (III-4) が欠落していた。お詫びして訂正する。

限個の B-軌道を持つ。従って、このとき 3 重旗多様体 $\mathcal{T}_{\mathbf{a},\mathbf{b},(1^n)}$ は有限型である。（注意：$\mathbb{C}$ は代数的閉体であるので、$(\mathbb{C}^\times)^2 = \mathbb{C}^\times$）

(ii) $|\mathbb{F}^\times/(\mathbb{F}^\times)^2| = \infty$ となる体 $\mathbb{F}$ も存在する（例えば $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$）。

証明 ([M18]) は大きく 2 つの部分に分かれる。前半では命題 2, ... , 6 を示し、さらに $\mathbf{a} = (n)$, $\mathbf{b} = (b)$ with $4 \leq b \leq n-2$ の場合も詳しく調べて、定理 7 の 7 条件が有限型であるために必要であることを証明する。2 年前の講演 ([M16]) で紹介した $O_6(\mathbb{F})$, $O_8(\mathbb{F})$, $O_{12}(\mathbb{F})$ の無限型 3 重旗多様体が中心的な役割を果たす。

後半では 7 つのすべての場合について case-by-case に有限性を証明する。ただし、(III-1) と (III-2) については [M15] の方法によりすぐにわかる。用いる道具は初等的線形代数のみ（[H04], [M13], [M15]）であるが、大がかりである。

参考文献

[B86] M. Brion, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55** (1986), 191–198.

[H04] T. Hashimoto, *B_{n-1}-orbits on the flag variety GL_n/B_n*, Geom. Dedicata **105** (2004), 13–27.

[MWZ99] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), 97–118.

[MWZ00] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Alg. **230** (2000), 245–265.

[M13] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, J. Alg. **375** (2013), 148–187.

[M15] T. Matsuki, *Orthogonal multiple flag varieties of finite type I : odd degree case*, J. Alg. **425** (2015), 450–523.

[M16] T. Matsuki, 直交群の多重旗多様体, 数理解析研究所講究録 **2031** (2017), 33–38.

[M18] T. Matsuki, *Orthogonal multiple flag varieties of finite type II : even degree case*, in preparation.

[S03] J. R. Stembridge, *Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters*, Representation Theory **7** (2003), 404–439.

[V86] E. B. Vinberg, *Complexity of action of reductive groups*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.