数理解析研究所講究録 第2103巻 2019年 90-108

A vector-valued version of Kostant's separation of variables theorem

拓殖大学 工学部　織田 寛 *
Hiroshi Oda
Faculty of Engineering, Takushoku University

Abstract

Let G be a connected reductive algebraic group defined over $\mathbb{C}$ and $\mathfrak{g}$ its Lie algebra. Let (π_μ, V_μ) be a minuscule representation of G. The space $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes V_\mu$ of V_μ-valued polynomials on $\mathfrak{g}$ is naturally a module of a commutative algebra $\mathcal{I}_\mu$ containing $\mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ (A. A. Kirillov's family algebra). In this report, we define the space $\mathcal{H}_\mu$ of V_μ-valued harmonic polynomials and show the separation of variables formula "$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes V_\mu = \mathcal{I}_\mu \otimes \mathcal{H}_\mu$" as a generalization of Kostant's well-known result.

1　主結果

G を $\mathbb{C}$ 上の連結な簡約代数群とし，T をその極大トーラスとする．G や T の Lie 環を $\mathfrak{g}$ や $\mathfrak{t}$ で表す．(G, T) に関するルート系，Weyl 群をそれぞれ Δ，W とし，Δ^+ を適当な正ルート系とする．T の解析的整ウェイトの格子を Λ（$\subset \mathfrak{t}^*$）とし，この部分集合である優整ウェイト全体を Λ^+ と記す．$\mu \in \Lambda^+$ に対して，(π_μ, V_μ) は μ を最高ウェイトとする G の正則な既約有限次元表現とする．

$\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ 上の多項式環，$\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ 上の対称代数とする．$\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ の元 D は，$\mathfrak{g}^*$ 上の多項式関数とも $\mathfrak{g}$ 上の定数係数線形微分作用素 $\partial(D)$ とも見なすことができる．0 次部分（定数項）のない $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ の元全体を $\mathcal{S}^+(\mathfrak{g})$ と記す．双対冪零多様体 $\mathcal{N}^*_{\mathfrak{g}}$ は $\mathcal{S}^+(\mathfrak{g})^G$ の共通零点である．本稿では $\otimes$ はすべて $\mathbb{C}$ 上のテンソル積とする．$\mathcal{P}_\mu := \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes V_\mu$ は V_μ に値を取る $\mathfrak{g}$ 上の多項式全体の空間である．この空間に群 G と 2 つの環 $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes \operatorname{End} V_\mu$，$\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \otimes \operatorname{End} V_\mu$ がそれぞれ以下のように作用する：

$$\begin{aligned} g(f(x) \otimes v) &= f(\operatorname{Ad}(g^{-1})x) \otimes \pi_\mu(g)v && (g \in G), \\ (h(x) \otimes u)(f(x) \otimes v) &= (h(x)f(x)) \otimes uv && (h(x) \otimes u \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes \operatorname{End} V_\mu), \\ \partial(D \otimes u)(f(x) \otimes v) &= (\partial(D)f)(x) \otimes uv && (D \otimes u \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \otimes \operatorname{End} V_\mu). \end{aligned}$$

また，$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes \operatorname{End} V_\mu$ や $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \otimes \operatorname{End} V_\mu$ にも G が対角に作用する（$\operatorname{End} V_\mu$ への作用は共役作用）．

* 本研究は科研費 (課題番号:18K03346) の助成を受けたものである．

定義 1.1 $\mu \in \Lambda^+$ に対して，**行列値不変多項式環** $\mathcal{I}_\mu := (\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G$，**ベクトル値調和多項式の空間** $\mathcal{H}_\mu := \left\{\varphi \in \mathcal{P}_\mu \;\middle|\; \partial(\delta)\varphi = 0 \ (\forall \delta \in (\mathcal{S}^+(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G)\right\}$ を定める．

明らかに $\mathcal{H}_\mu$ は $\mathcal{P}_\mu$ の部分 G 加群である．

定義 1.2 (π_μ, V_μ) のすべての T ウェイトが W の単一の軌道に含まれるとき，μ または (π_μ, V_μ) は**ミニスキュル**であるという．ミニスキュルな優整ウェイト全体を Λ^+_{m} と表す．

例えば $G = \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ のときは，自然表現 $V = \mathbb{C}^n$ の外積表現 $\bigwedge^k V$ $(k = 0, \ldots, n-1)$ がミニスキュル表現全体になる．一般に，ミニスキュル表現の分類は G が単連結単純 Lie 群である場合に帰着するが，その場合しばしば単位表現 (π_0, V_0) がミニスキュルから除外される．しかし，我々の定義では単位表現などの 1 次元表現は常にミニスキュルである．ミニスキュルウェイトの基本的な性質については [Bo, Ch.VI, §1, Exercises] を参照してほしい．

本稿の主結果を述べる：

定理 A（変数分離定理） 各 $\mu \in \Lambda^+$ について，掛け算による写像 $\mathcal{I}_\mu \otimes \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{P}_\mu$ は全射である．これがさらに単射であるためには，$\mu \in \Lambda^+_{\mathrm{m}}$ が必要十分である．

$\mu = 0$ のときは，$\mathcal{I}_0$ が $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ の部分環 $\mathcal{I}_{\mathfrak{g}} := \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$，$\mathcal{H}_0$ が通常の調和多項式の空間 $\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} := \left\{f \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \;\middle|\; \partial(D)f = 0 \ (\forall D \in \mathcal{S}^+(\mathfrak{g})^G)\right\}$ と同一視されるので，定理から得られる同型写像は

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{I}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \tag{1.1}$$

という Kostant による古典的な変数分離定理に他ならない．このような意味で，定理 A および以下に述べる定理 B，定理 C は，スカラー値多項式に関する [Ko3] の諸結果をベクトル値版へ自然に拡張したものになっている．しかし我々は，Kostant の結果をより一般的な設定のもとに証明し直すという立場は取らない．むしろ本稿の結果の大部分は (1.1) や後述の定理 1.3 などの [Ko3] の結果に強く依拠している．

ベクトル値調和多項式の空間 $\mathcal{H}_\mu$ の自然な基底を与えるために，**拡張双対冪零多様体**

$$\mathcal{N}^*_\mu = \left\{(\xi, v) \in \mathcal{N}^*_{\mathfrak{g}} \times V_\mu \;\middle|\; \delta(\xi)v = 0 \ (\forall \delta \in (\mathcal{S}^+(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G)\right\}$$

を定める．この定義においては $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\, V_\mu$ の元 δ を $\mathfrak{g}^*$ 上の $\mathrm{End}\, V_\mu$ 値多項式と見なしている．

定理 B $\mu \in \Lambda^+$ とする．任意の $(\xi, v) \in \mathcal{N}^*_\mu$，$i = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\xi^i \otimes v \in \mathcal{H}_\mu$ である．さらに $\mu \in \Lambda^+_{\mathrm{m}}$ であれば，$\mathcal{H}_\mu$ はこれらの元が張る線形空間と一致する．

以降この節では $\mu \in \Lambda^+_{\mathrm{m}}$ とする．G 加群としての $\mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{P}_\mu$ の構造を知るために，次の定理を手本にして $\mathcal{H}_\mu$ と同型な表現を幾何学的に実現する（定理 C）．

定理 1.3（[Ko3, Theorem 0.9]） $x \in \mathfrak{g}$ を正則元とする．つまり，軌道 $O_x := \mathrm{Ad}(G)x \simeq G/G^x$ が最大の次元 $\dim G - \dim T$ を持つ随伴軌道であるとする．また，$\mathcal{R}(O_x)$ で O_x 上の正則関数（regular functions）の環を表す．このとき，制限写像 $\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \to \mathcal{R}(O_x)$ は G 加群の同型になる．特に，$\mathcal{R}(O_x)$ は誘導表現 $\mathrm{Ind}_{G^x}^G \mathbf{1} = \{f \in \mathcal{R}(G) \mid f(gh) = f(g)\ (\forall h \in G^x)\}$ とも同型なので，Frobenius 相互律により，任意の有限次元表現 V に対して評価写像

$$\mathrm{ev}_x : (\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes V)^G \to V; \quad f \otimes v \mapsto f(x)v$$

から線形同型 $(\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes V)^G \xrightarrow{\sim} V^{G^x}$ が導かれる．

定理 C $x = s + n$ を正則元 $x \in \mathfrak{g}$ の Jordan 分解（s：半単純元，n：冪零元）とする．このとき G^s は連結な簡約代数群で $G^x = G^s \cap G^n$ となり（[Ko3, §3.4]），以下が成り立つ：

(i) V_μ^* の G^s 加群としての既約分解 $V_\mu^* = E_1^* \oplus \cdots \oplus E_k^*$ は重複度自由で，各成分は G^s のミニスキュル表現である．この分解は G^x 加群としての直既約分解にもなっていて，どの成分も他と同型ではない．

(ii) 各 G^x 加群 E_j^* の半単純成分（ソクル）は 1 次元である．つまり E_j^* は唯一の既約 G^x-部分加群 $\mathbb{C}v_j^*$ を持ち，その次元は 1 である．さらに，$\mathbb{C}v_j^*$ の双対 G^x 加群 $V_\mu/V_\mu^{v_j^*}$ を τ_j とすると，$\tau_1, \ldots, \tau_k$ は相異なる 1 次元表現である．ここで $V_\mu^{v_j^*} := \{v \in V_\mu \mid \langle v_j^*, v\rangle = 0\}$．

(iii) 各 $j = 1, \ldots, k$ に対して“(x, v_j^*) を通る拡張 G 軌道への制限写像”$\mathcal{P}_\mu \to \mathcal{R}(G)$ を $\varphi \mapsto \langle \pi_\mu^*(g)v_j^*, \varphi(\mathrm{Ad}(g)x)\rangle$ で定めると，これは次の G 加群の同型を誘導する：

$$\mathcal{H}_\mu \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_{G^x}^G \tau_j := \{f \in \mathcal{R}(G) \mid f(gh) = \tau_j(h)^{-1} f(g)\ (\forall h \in G^x)\}.$$

特に x が $\mathfrak{t}$ 内の正則半単純元のときは，$x = s \in \mathfrak{t}$，$G^x = G^s = T$ なので，(i) の V_μ^* の分解はウェイト分解になる．(ii) の τ_j $(j = 1, \ldots k)$ は V_μ のいずれかのウェイト $w\mu$ $(w \in W)$ に対する T 指標 $e^{w\mu}$ である．従って (iii) より任意の $w \in W$ に対して G 加群の同型 $\mathcal{H}_\mu \simeq \mathrm{Ind}_T^G e^{w\mu}$ が得られる．

系 1.4（重複度公式） 任意の $\lambda \in \Lambda^+$ に対して $\mathrm{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu) \simeq \mathrm{Hom}_T(V_\lambda, e^\mu)$. 特に μ に対する V_λ のウェイト空間を $V_\lambda(\mu)$ と書くと $\dim \mathrm{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu) = \dim V_\lambda(\mu)$.

良く知られているように，Λ_{m}^+ はウェイト格子 Λ をルート格子 $\mathbb{Z}\Delta$ で割った剰余群の完全代表系になっているので，$\Lambda^+ = \bigsqcup_{\mu \in \Lambda_{\mathrm{m}}^+} \Lambda_\mu^+$，$\Lambda_\mu^+ := (\mu + \mathbb{Z}\Delta) \cap \Lambda^+$ のような分解ができる．このとき $\lambda \in \Lambda^+$ に対して $\dim V_\lambda(\mu) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Lambda_\mu^+$ がいえるので（[Bo, Ch.VI, §1, Exercises]），$\mathcal{H}_\mu$ に現れる既約表現の最高ウェイトの全体がちょうど Λ_μ^+ になっている．

次に x が**主冪零元**（正則な冪零元）のときに定理 C から何が得られるか見てみよう．N を Δ^+ に対応する G の冪等部分群とし，$\mathfrak{n}$ をその Lie 環とする．$x \in \mathfrak{n}$ としても一般性を失わない．G_{ss} を $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ に対する解析的部分群とすると，[Ko2, §5] により $\mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}^x := \mathfrak{g}^x \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}} \subset \mathfrak{n}$ で，G_{ss}^x の単位元成分 $(G_{\mathrm{ss}}^x)_0$ が N の部分群になる．また，Z を

G の中心とすると $G = ZG_{\mathrm{ss}}$，$G^x = ZG^x_{\mathrm{ss}}$ となる．$\mathrm{Ad}(G^x) = \mathrm{Ad}(G)^x$ は $\mathrm{Ad}(G)$ の連結な部分群であり（[Ko3, Proposition 14]），その Lie 環は $\mathfrak{g}^x_{\mathrm{ss}}$ と同型である．これは $\mathrm{Ad}(G^x) = \mathrm{Ad}((G^x_{\mathrm{ss}})_0)$ を意味するが，Ad が N 上単射であることから直積分解

$$G^x = Z \times (G^x_{\mathrm{ss}})_0$$

が導かれる．この場合の定理 C (i) の分解は $V^*_\mu = E^*_1$，(ii) の v^*_1 は $(G^x_{\mathrm{ss}})_0$ が自明に作用する V^*_μ の最高ウェイトベクトルである．一般に，ミニスキュルウェイトと Z の指標は

$$\Lambda^+_{\mathrm{m}} \simeq \Lambda/\Lambda_0 \ni \mu \longleftrightarrow e^\mu|_Z \in \hat{Z} \tag{1.2}$$

により 1 対 1 に対応する．Schur の補題より $z \in Z$ に対して $\pi_\mu(z) = e^\mu(z)\,\mathrm{id}_{V_\mu}$ であるから，$\tau_1 = e^\mu|_Z \boxtimes \mathbf{1}$ となり，(iii) の同型として

$$\mathcal{H}_\mu \simeq \mathrm{Ind}^G_{Z\times(G^x_{\mathrm{ss}})_0}(e^\mu|_Z \boxtimes \mathbf{1})$$

が得られる．x が正則半単純元の場合と併せて次を得る：

系 1.5　$\mathrm{Ind}^G_T\, e^\mu \simeq \mathrm{Ind}^G_{Z\times(G^x_{\mathrm{ss}})_0}(e^\mu|_Z \boxtimes \mathbf{1})$.

これは，R. Brylinski [Bry2] と McGovern [Mc] によって独立に予想され，Graham [Gr] と Ginzburg [Gi] によって独立に示された同型である．

さて，$\mathcal{P}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{I}_\mathfrak{g}$, $\mathcal{H}_\mathfrak{g}$, $\mathcal{S}(\mathfrak{g}), \ldots$ には自然な次数構造があるが，それは $\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes V_\mu$, $\mathcal{I}_\mu$, $\mathcal{H}_\mu$, $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\, V_\mu, \ldots$ に引き継がれる．例えば

$$\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}^0_\mu \oplus \mathcal{P}^1_\mu \oplus \mathcal{P}^2_\mu \oplus \cdots = (\mathcal{P}^0(\mathfrak{g}) \otimes V_\mu) \oplus (\mathcal{P}^1(\mathfrak{g}) \otimes V_\mu) \oplus (\mathcal{P}^2(\mathfrak{g}) \otimes V_\mu) \oplus \cdots$$

である．次節で見るように，$\mathcal{I}_\mu$ の次数環としての構造は Panyushev [P] の議論により完全に把握できる．また，変数分離定理 $\mathcal{I}_\mu \otimes \mathcal{H}_\mu \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_\mu$ は明らかに次数構造と整合し，$\mathcal{I}^i_\mu \otimes \mathcal{H}^j_\mu \hookrightarrow \mathcal{P}^{i+j}_\mu$ が成り立つ．従って $\mathcal{P}_\mu$ の G 加群としての次数構造を理解するためには，各 $\lambda \in \Lambda^+_\mu$ に対して q を不定元とする多項式

$$m_\lambda(\mu; q) := \sum_{i=0}^{\infty} \dim \mathrm{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}^i_\mu) q^i$$

が分かればよい．そのために，$\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta^+$ に対して多項式 $P(\nu; q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[q]$ を等式

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+} (1 - qe^{-\alpha})^{-1} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta^+} P(\nu; q) e^\nu$$

で定める．（$\nu \in \Lambda \setminus \mathbb{Z}_{\geq 0}\Delta^+$ に対しては $P(\nu; q) = 0$ と置く．）$P(\nu; 1)$ は **Kostant の分割関数**（[Ko1]）であり，ウェイト重複度について

$$m_\lambda(\mu; 1) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu) = \dim V_\lambda(\mu) = \sum_{w\in W} \mathrm{sgn}(w) P(w(\lambda + \rho) - (\mu + \rho); 1)$$

が成り立つ．ここで $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}\alpha$ である．Lusztig は [L] で導入したウェイト重複度の q 類似（**Kostka-Foulkes 多項式**）が上の公式の q 類似

$$K_{\lambda\mu}(q) := \sum_{w\in W}\mathrm{sgn}(w)P(w(\lambda+\rho)-(\mu+\rho);q) \qquad (\lambda\in\Lambda^+)$$

に一致することを予想したが，その証明は加藤信一 [Ka] によって与えられた．

定理 D　各 $\lambda\in\Lambda^+$ に対して $m_\lambda(\mu;q)=K_{\lambda\mu}(q)$.

$\mu=0$ のとき，定理は Hesselink [He] と Peterson が独立に示した古典的な結果と一致する．

2　行列値不変多項式環

$\mu\in\Lambda^+$ とする．この節では行列値不変多項式環 $\mathcal{I}_\mu=(\mathcal{P}(\mathfrak{g})\otimes\operatorname{End}V_\mu)^G$ について詳しく述べる．$\mathrm{Ad}(G)$ 不変な $\mathfrak{g}$ 上の非退化対称双線形形式 $B(\cdot,\cdot)$ を固定すると，$\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}^*$，$\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ と $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ が自然に同一視され，$\mathcal{I}_\mu\simeq(\mathcal{S}(\mathfrak{g})\otimes\operatorname{End}V_\mu)^G$ となる．A. A. Kirillov は後者を**古典ファミリー代数**と呼んでいる（[Ki]）．

定理 2.1（[Ki]）　$\mathcal{I}_\mu\simeq(\mathcal{S}(\mathfrak{g})\otimes\operatorname{End}V_\mu)^G$ が可換であるためには，V_μ がウェイト重複度自由であることが必要十分である．

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環とする．$(\mathcal{S}(\mathfrak{g})\otimes\operatorname{End}V_\mu)^G$ は，Kirillov が**量子ファミリー代数**と呼んでいるフィルター代数 $(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes\operatorname{End}V_\mu)^G$ の次数化である．

定理 2.2（[Ro]）　$(\mathcal{U}_\mathfrak{g}\otimes\operatorname{End}V_\mu)^G$ が可換であるためには，V_μ がウェイト重複度自由であることが必要十分である．

実は，定理 2.2 は Deitmar による Riemann 対称空間上の不変微分作用環の可換性条件 [De] から直ちに導かれる（U を G の極大コンパクト群として G/U に適用）．特に $\mu\in\Lambda^+_\mathrm{m}$ のときは V_μ がウェイト重複度自由なので $\mathcal{I}_\mu$ は可換になるが，この場合は [P] によりさらに詳しい次数環としての $\mathcal{I}_\mu$ の構造が調べられている．

命題 2.3（[P]）　$\mu\in\Lambda^+_\mathrm{m}$ とする．$\varphi\in\mathcal{P}(\mathfrak{g})\otimes\operatorname{End}V_\mu$ を $\mathfrak{t}$ に制限することにより，次数環の同型

$$\mathcal{I}_\mu=(\mathcal{P}(\mathfrak{g})\otimes\operatorname{End}V_\mu)^G \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P}(\mathfrak{t})\otimes\operatorname{End}_T V_\mu)^W \tag{2.1}$$

が得られる．$\mathrm{id}_{w\mu}$ $(w\in W/W^\mu)$ を V_μ から $w\mu$ のウェイト空間 $V(w\mu)$ への射影とすると，

次の次数環の準同型が定まり，上式の右辺は $\mathcal{P}(\mathfrak{t})^{W^\mu}$ とも同型になる：

$$(\mathcal{P}(\mathfrak{t}) \otimes \mathrm{End}_T V_\mu)^W = \Big(\bigoplus_{w \in W/W^\mu} \mathcal{P}(\mathfrak{t}) \otimes \mathrm{id}_{w\mu} \Big)^W \xrightarrow{\mathrm{id}_\mu \text{ 成分への射影}} \mathcal{P}(\mathfrak{t})^{W^\mu}.$$

証明　命題の制限写像 (2.1) は任意の $\mu \in \Lambda^+$ に対して単射になる．[Bro2] の結果より，これが全射になるためには $\mathrm{End}\, V_\mu \simeq V_\mu \otimes V_\mu^*$ のウェイトに 2α $(\exists \alpha \in \Delta)$ の形のものがないことが必要十分である．$\mu \in \Lambda_{\mathrm{m}}^+$ のときこの条件が満たされることは容易に確認できる．　□

W^μ は鏡映で生成されるので，$\mathcal{P}(\mathfrak{t})^{W^\mu}$ が $\mathcal{P}(\mathfrak{t})$ と同型な多項式環になる．$\mathfrak{g}$ を中心と単純イデアルの直和に分解して $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_p$ とすると，$\mathfrak{t}$ とその双対，正ルート系，Weyl 群も自然に

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &= \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{t}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{t}_p, & \mathfrak{t}^* &= \mathfrak{z}^* \oplus \mathfrak{t}_1^* \oplus \cdots \oplus \mathfrak{t}_p^*, \\ \Delta^+ &= \Delta_1^+ \sqcup \cdots \sqcup \Delta_p^+, & W &= W_1 \times \cdots \times W_p \end{aligned}$$

と分解される．これにより $\mu \in \Lambda_{\mathrm{m}}^+ \subset \mathfrak{t}^*$ を $\mu = (\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ と表すと，

$$W^\mu = W_1^{\mu_1} \times \cdots \times W_p^{\mu_p}, \qquad \mathcal{P}(\mathfrak{t})^{W^\mu} = \mathcal{P}(\mathfrak{z}) \otimes \mathcal{P}(\mathfrak{t}_1)^{W_1^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(\mathfrak{t}_p)^{W_p^{\mu_p}}$$

を得る．各 μ_i $(i = 1, \ldots, p)$ はそれぞれの成分の優整ウェイトなので $W_i^{\mu_i}$ は W_i の放物型部分群である．従って $W_i^{\mu_i}$ はある Weyl 群と同型で，$m_{i1} \leq \cdots \leq m_{il_i}$ をその指数（exponents）とすると，$\mathcal{P}(\mathfrak{t}_i)^{W_i^{\mu_i}}$ の **Hilbert-Poincaré** 級数は

$$\frac{1}{(1-q)^{\dim \mathfrak{t}_i - l_i}} \prod_{j=1}^{l_i} \frac{1}{1 - q^{m_{ij}+1}}$$

で与えられる．$\mathcal{I}_\mu \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{t})^{W^\mu}$ 全体の Hilbert-Poincaré 級数は

$$\frac{1}{(1-q)^{\dim \mathfrak{z}}} \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{(1-q)^{\dim \mathfrak{t}_i - l_i}} \prod_{j=1}^{l_i} \frac{1}{1 - q^{m_{ij}+1}} \right)$$

である．ミニスキュルウェイトの性質により各 $i = 1, \ldots, p$ に対して μ_i は 0 あるいは Δ_i^+ の特別な基本ウェイトになっているので，$\dim \mathfrak{t}_i - l_i$ の値は 0 または 1 である．

3　変数分離定理の証明

古典的なスカラー値の変数分離定理 (1.1) は，[KR] により対称空間に対するものに拡張された．両者の証明は（双対）冪零多様体に関する代数幾何的なものである．筆者は当初これらの手法を模して予想していた定理 A を証明しようと試みたができなかった．拡張双対冪零多様体 $\mathcal{N}_\mu^*$ の幾何が単純でないからである．[KR] の変数分離定理の証明には，Goodman

と Wallach によるまったく新しい手法 [GW] があり，それは **Chevalley** 制限定理に基づく．本節ではこの新手法を使って定理 A を証明する．これが可能なのは，$\mu \in \Lambda_{\mathrm{m}}^+$ のときも行列値不変多項式環 $\mathcal{I}_\mu$ に対する Chevalley 制限定理の拡張 (2.1) があるからである．

3.1　掛け算写像の全射性

任意の $\mu \in \Lambda^+$ に対して $\mathcal{I}_\mu \otimes \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{P}_\mu$ の全射性を示す．$U \subset G$ を極大コンパクト部分群とし，$\mathfrak{u}$ をその Lie 環とする．$\sqrt{-1}\mathfrak{u}$ に関する共役 $\mathfrak{g} \ni x \mapsto \bar{x} \in \mathfrak{g}$ は $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ の 反線形同型を誘導する．$\mathfrak{g}$ 上の複素双線形形式 $B(\cdot,\cdot)$ を，$-B(\cdot,\cdot)$ の $\mathfrak{u}$ への制限が $\mathrm{Ad}(U)$ 不変な実数値内積となるように選んでおく．すると，$B(\cdot,\cdot)$ は $\mathrm{Ad}(G)$ 不変，非退化，対称になり，次数環の同型 $\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ を導く．これと $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ の 反線形同型を合成して，U の作用と可換な次数環の反線形同型

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \ni f \mapsto f^\star \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$$

を得る．

V_μ 上の $\pi_\mu(U)$ 不変な Hermite 内積 $(\cdot,\cdot)$ を固定する．これを $\mathcal{P}(\mathfrak{g})$ の **Fischer** 内積と組み合わせて $\mathcal{P}_\mu = \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes V_\mu$ 上の U 不変内積

$$(f_1 \otimes v_1, f_2 \otimes v_2) = (\partial(f_2^\star) f_1)(0)\,(v_1, v_2).$$

を得る．$u \in \mathrm{End}\,V_\mu$ の Hermite 共役を $u^\star$ とし，反線形同型

$$\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\,V_\mu \ni \delta = f \otimes u \mapsto \delta^\star := f^\star \otimes u^\star \in S(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\,V_\mu.$$

を定めると

$$(\delta \cdot \psi, \varphi) = (\psi, \partial(\delta^\star)\varphi), \qquad \psi, \varphi \in \mathcal{P}_\mu,\ \delta \in \mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\,V_\mu$$

という不変性が成り立つ．

$\mathcal{P}^+(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i>0} \mathcal{P}^i(\mathfrak{g}),\ \mathcal{I}_\mu^+ = (\mathcal{P}^+(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\,V_\mu)^G$ と置くと

$$(\mathcal{I}_\mu^+)^\star = \big((\mathcal{P}^+(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\,V_\mu)^U\big)^\star = (\mathcal{S}^+(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\,V_\mu)^U = (\mathcal{S}^+(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\,V_\mu)^G$$

であるから

$$\varphi \in \mathcal{H}_\mu \Leftrightarrow (\psi, \varphi) = 0\ \forall \psi \in \mathcal{I}_\mu^+ \mathcal{P}_\mu$$

となるが，$\mathcal{P}_\mu$ の内積は次数 $i = 0, 1, \ldots$ ごとに直交しているので

$$\mathcal{H}_\mu^i \text{は } \mathcal{P}_\mu^i \text{における} \sum_{j=1}^{i} \mathcal{I}_\mu^j \mathcal{P}_\mu^{i-j} \text{の直交補空間} \tag{3.1}$$

である．これから [Ko3, Proposition 1] と同様の i についての帰納的な議論により $\mathcal{P}_\mu = \mathcal{I}_\mu \mathcal{H}_\mu$ が示される．

3.2 単射性の必要条件

ここでは，ある $\mu \in \Lambda^+$ に対して $\mathcal{P}_\mu = \mathcal{I}_\mu \otimes \mathcal{H}_\mu$ が成り立っているとするとして $\mu \in \Lambda^+_{\mathrm{m}}$ を示す．後の節で利用するために少し遠回りして一般的な議論をする．

(1.1) より

$$\mathcal{P}_\mu = \mathcal{I}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes V_\mu, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{I}_\mu = (\mathcal{I}_{\mathfrak{g}} \otimes \mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G = \mathcal{I}_{\mathfrak{g}} \otimes (\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G. \tag{3.3}$$

である．μ に対する仮定と (3.3) より

$$\mathcal{P}_\mu = \mathcal{I}_{\mathfrak{g}} \otimes (\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G \otimes \mathcal{H}_\mu. \tag{3.4}$$

$x \in \mathfrak{g}$ を任意の正則元として $\mathcal{I}_{\mathfrak{g}}$ の極大イデアル

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{g}}(x) = \{ f \in \mathcal{I}_{\mathfrak{g}} \mid f(x) = 0 \}$$

を定めると，直和分解 $\mathcal{I}_{\mathfrak{g}} = \mathcal{I}_{\mathfrak{g}}(x) \oplus \mathbb{C}$ が成り立つので，(3.2) と (3.4) より G 加群 $\mathcal{P}_\mu$ の分解が 2 通り得られる：

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mu &= \mathcal{I}_{\mathfrak{g}}(x)\mathcal{P}_\mu \oplus (\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes V_\mu), \\ \mathcal{P}_\mu &= \mathcal{I}_{\mathfrak{g}}(x)\mathcal{P}_\mu \oplus \big((\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G \otimes \mathcal{H}_\mu\big). \end{aligned}$$

$\lambda \in \Lambda^+$ を任意に取る．定理 1.3 より

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_G\big(V_\lambda, (\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G \otimes \mathcal{H}_\mu\big) &\simeq \operatorname{Hom}_G\big(V_\lambda, \mathcal{P}_\mu / \mathcal{I}_{\mathfrak{g}}(x)\mathcal{P}_\mu\big) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes V_\mu) \\ &\simeq (\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes V_\mu \otimes V_\lambda^*)^G \\ &\simeq (V_\mu \otimes V_\lambda^*)^{G^x} \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, V_\mu). \end{aligned} \tag{3.5}$$

であるが，この同型は具体的には評価写像

$$\operatorname{ev}_x : \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{P}_\mu) \ni \Phi \mapsto (V_\lambda \ni e \mapsto \Phi(e)(x) \in V_\mu) \in \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, V_\mu). \tag{3.6}$$

により与えられる．同様に評価写像による同型

$$\operatorname{ev}_x : (\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_{G^x} V_\mu \tag{3.7}$$

が成り立つが，これらは自然な同型写像

$$(\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G \otimes \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, (\mathcal{H}_{\mathfrak{g}} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G \otimes \mathcal{H}_\mu) \tag{3.8}$$

と整合する．つまり，$\delta \in (\mathcal{H}_\mathfrak{g} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G$ と $\varPhi \in \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu)$ に対して $\operatorname{ev}_x(\delta \otimes \varPhi) = \operatorname{ev}_x(\delta) \circ \operatorname{ev}_x(\varPhi)$ となる．(3.5), (3.7) から (3.8) の各部は有限次元で

$$(\dim \operatorname{End}_{G^x} V_\mu)(\dim \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu)) = \dim \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, V_\mu) \tag{3.9}$$

が成り立つ．

特に x が正則な $\mathfrak{t}$ の元の場合は $G^x = T$ であるから

$$(\dim \operatorname{End}_T V_\mu)(\dim \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu)) = \dim \operatorname{Hom}_T(V_\lambda, V_\mu) \tag{3.10}$$

である．さらに λ は $\mu \in \varLambda_\lambda^+$ であるような $\varLambda_\mathrm{m}^+$ の元とし，各 $\nu \in \varLambda$ に対して $m_\mu(\nu) = \dim V_\mu(\nu)$ と置くと

$$\dim \operatorname{End}_T V_\mu = \sum_{\nu \in \varLambda} m_\mu(\nu)^2 \geq \sum_{\nu \in W\lambda} m_\mu(\nu)^2 \geq \sum_{\nu \in W\lambda} m_\mu(\nu) = \dim \operatorname{Hom}_T(V_\lambda, V_\mu) > 0$$

であるので，(3.10) が成り立つためには 2 つの '$\geq$' が '$=$' であって $\dim \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu) = 1$ でなければならない．最初の '$\geq$' が '$=$' であることから $\mu = \lambda$ が結論できる．

3.3　単射性の十分条件

$\mu \in \varLambda_\mathrm{m}^+$ のときの掛け算写像の単射性を Goodman と Wallach の手法により示す．冪零部分 Lie 環 $\mathfrak{n}_- \subset \mathfrak{g}$ を $-\varDelta$ に対するものとすると

$$\mathcal{P}_\mu \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{n} + \mathfrak{n}_-) \otimes \mathcal{P}(\mathfrak{t}) \otimes V_\mu \tag{3.11}$$

という自然な分解が成り立つ．[C] により，W^μ 安定な $\mathcal{P}(\mathfrak{t})$ の同次部分空間 $\mathcal{H}'$ で積により $\mathcal{P}(\mathfrak{t}) \simeq \mathcal{P}(\mathfrak{t})^{W^\mu} \otimes \mathcal{H}'$ となるものが存在する．ウェイト分解 $V_\mu = \bigoplus_{w \in W/W^\mu} V_\mu(w\mu)$ を用いて $\mathcal{H} = \sum_{w \in W/W^\mu} (w\mathcal{H}') \otimes V_\mu(w\mu) \subset \mathcal{P}(\mathfrak{t}) \otimes V_\mu$ と置くと，

$$(\mathcal{P}(\mathfrak{t}) \otimes \operatorname{End}_T V_\mu)^W = \left\{ \sum_{w \in W/W^\mu} f(w^{-1}t) \otimes \mathrm{id}_{w\mu} \;\middle|\; f \in \mathcal{P}(\mathfrak{t})^{W^\mu} \right\}$$

であるから，

$$\mathcal{P}(\mathfrak{t}) \otimes V_\mu \simeq (\mathcal{P}(\mathfrak{t}) \otimes \operatorname{End}_T V_\mu)^W \otimes \mathcal{H} \tag{3.12}$$

となる．

掛け算により定まる次数線形空間の射

$$\mathcal{I}_\mu \otimes \mathcal{P}(\mathfrak{n} + \mathfrak{n}_-) \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{P}_\mu \tag{3.13}$$

が同型であることを示そう．まず，(3.11) と (3.12) により

$$\mathcal{P}_\mu \simeq (\mathcal{P}(\mathfrak{t}) \otimes \operatorname{End}_T V_\mu)^W \otimes \mathcal{P}(\mathfrak{n} + \mathfrak{n}_-) \otimes \mathcal{H}$$

であるから，(2.1) により各 $i=0,1,\ldots$ について (3.13) の両辺の i 次同次成分が同じ次元を持っていることが分かる．よって (3.13) が全射であること，つまり各 $\mathcal{P}_\mu^i$ が像に含まれることを i についての帰納法で示せば十分である．

$$\delta\otimes f\otimes\varphi\in(\mathcal{P}^j(\mathfrak{t})\otimes\mathrm{End}_T V_\mu)^W\otimes\mathcal{P}^k(\mathfrak{n}+\mathfrak{n}_-)\otimes\mathcal{H}^{i-j-k}$$

が (3.13) の像に含まれることを示したい．

$$(\mathcal{P}^0(\mathfrak{t})\otimes\mathrm{End}_T V_\mu)^W=\mathbb{C}\,\mathrm{id}_{V_\mu}=(\mathcal{P}^0(\mathfrak{g})\otimes\mathrm{End}\,V_\mu)^G=\mathcal{I}_\mu^0,\quad \mathcal{H}^0=V_\mu$$

なので $j=0$ のときは自明である．$j>0$ とする．この場合は (2.1) により

$$\delta-\delta'\in\mathcal{P}^1(\mathfrak{n}+\mathfrak{n}_-)\,\mathcal{P}^{j-1}(\mathfrak{g})\otimes\mathrm{End}\,V_\mu$$

を満たす $\delta'\in\mathcal{I}_\mu^j$ が存在する．帰納法の仮定より $(\delta-\delta')f\varphi\in\mathcal{P}^1(\mathfrak{n}+\mathfrak{n}_-)\,\mathcal{P}_\mu^{i-1}$ は (3.13) の像に含まれるが，$\delta' f\varphi$ も像内にあるので，$\delta f\varphi$ も同様である．以上より (3.13) は同型である．

(3.13) の両辺を同一視すると，各 i について

$$\mathcal{P}_\mu^i=(\mathcal{P}(\mathfrak{n}+\mathfrak{n}_-)\otimes\mathcal{H})\cap\mathcal{P}_\mu^i\ \oplus\ \sum_{j=1}^{i}\mathcal{I}_\mu^j\mathcal{P}_\mu^{i-j}$$

となる．(3.1) と併せて

$$\dim(\mathcal{P}(\mathfrak{n}+\mathfrak{n}_-)\otimes\mathcal{H})\cap\mathcal{P}_\mu^i=\dim\mathcal{H}_\mu^i$$

を得るが，これは

$$\mathcal{I}_\mu\otimes\mathcal{H}_\mu\to\mathcal{P}_\mu \tag{3.14}$$

の両辺の各同次成分が同じ次元を持つことを意味する．§3.1 で全射であると示した (3.14) がこの場合（$\mu\in\Lambda_{\mathrm{m}}^+$ のとき）は単射でもあることが示された．

この証明から以下の系を得る．$w\in W$ に対してその長さを $\ell(w)$ と記す．$\lambda\in\Lambda^+$ に対して (π_λ,V_λ) の指標を χ_λ と記す．χ_λ は Laurent 多項式環 $\mathcal{R}(T)=\mathbb{C}[e^\nu\mid\nu\in\Lambda]$ の元である．

系 3.1　$\mu\in\Lambda_{\mathrm{m}}^+$ とする．任意の $\nu\in\Lambda$ に対して $\mathcal{H}_\mu^i$ のウェイト ν のウェイト空間を $\mathcal{H}_\mu^i(\nu)$ と記す．このとき形式的冪級数環 $\mathcal{R}(T)[[q]]$ において

$$\sum_{i=0}^{\infty}q^i\sum_{\nu\in\Lambda}\dim\mathcal{H}_\mu^i(\nu)e^\nu=\frac{\chi_\mu}{\prod_{\alpha\in\Delta}(1-qe^\alpha)}\sum_{w\in W^\mu}q^{\ell(w)}. \tag{3.15}$$

証明　良く知られているように $\sum_{i=0}^{\infty}\dim(\mathcal{H}'^i)q^i=\sum_{w\in W^\mu}q^{\ell(w)}$ である（[Bo, Ch.VI, §4, Exercise 10]）．従って上式で $\mathcal{H}_\mu$ を $\mathcal{P}(\mathfrak{n}+\mathfrak{n}_-)\otimes\mathcal{H}$ に置き換えたものが成立する．定理 A と同型 (3.13) より $\mathcal{H}_\mu$ に対しても成立する，　□

4　定理 B と定理 C の証明

4.1　定理 B の前半部分の証明

$\mu \in \Lambda^+$ とする．一般に，$(\xi, v) \in \mathfrak{g}^* \times V_\mu$，$i = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $\varphi = \xi^i \otimes v \in \mathcal{P}^i_\mu$ と置くと，任意の $\delta = \sum_k D_k \otimes u_k \in \mathcal{S}^j(\mathfrak{g}) \otimes V_\mu$ に対して

$$\partial(\delta)\varphi = \sum_k \partial(D_k)(\xi^i) \otimes u_k v = \begin{cases} 0 & \text{if } j > i, \\ \frac{i!}{(i-j)!}\xi^{i-j} \otimes (\delta(\xi)v) & \text{if } j \leq i \end{cases}$$

であるから，$(\xi, v) \in \mathcal{N}^*_\mu$ であれば $\varphi \in \mathcal{H}_\mu$ が成り立つ．これで定理の前半が示された．

4.2　次数環 $\mathcal{K}_\mu$ の性質

$\mu \in \Lambda^+_{\mathrm{m}}$ とする．$\mathcal{I}_\mu = (\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G$ は, $\mathcal{I}_\mathfrak{g} = \mathcal{P}(\mathfrak{g})^G$ 上の可換代数である．定理 B の後半, 定理 C の証明の準備として, 次数環 $\mathcal{K}_\mu := \mathcal{I}_\mu / \mathcal{I}^+_\mathfrak{g} \mathcal{I}_\mu$ を調べていく ($\mathcal{I}^+_\mathfrak{g} := \bigoplus_{i>0} \mathcal{I}^i_\mathfrak{g}$)．$\mathcal{K}_\mu$ が 4 つの次数線形空間と自然に同型になることに注目してほしい．

$\mathcal{I}_\mu = (\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G = \mathcal{I}_\mathfrak{g} \otimes (\mathcal{H}_\mathfrak{g} \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G$ と $\mathcal{I}_\mathfrak{g} = \mathcal{I}^+_\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$ から最初の同型

$$\mathcal{K}_\mu \simeq (\mathcal{H}_\mathfrak{g} \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G \tag{4.1}$$

を得る．

系 4.1　任意の正則元 $x \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\dim \mathcal{K}_\mu = \dim(\mathcal{H}_\mathfrak{g} \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G = \mathrm{End}_{G^x} V_\mu = \dim V_\mu.$$

証明　(4.1) と (3.7) からそれぞれ最初の 2 つの等式を得る．特に $x \in T$ とすると $\dim \mathrm{End}_{G^x} V_\mu = \dim \mathrm{End}_T V_\mu = \dim V_\mu$. □

$\mathcal{K}^0_\mu = \mathcal{I}^0_\mu = \mathbb{C}$ であり，$\mathcal{K}^+_\mu := \sum_{i>0} \mathcal{K}^i_\mu$ の各元は冪零なので，$\mathcal{K}_\mu$ は唯一の極大イデアル $\mathcal{K}^+_\mu$ を持つ局所環である．

$\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ を単純ルートとし，それらのルート空間から 0 でないルートベクトル $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}$ を取って $x = x_{\alpha_1} + \cdots + x_{\alpha_l}$ と置くと，これは主冪零元である．これに対して $x_0 \in \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_{\mathrm{ss}}$ で $[x_0, x] = x$ を満たすものが唯一定まる．x は $\mathcal{I}^+_\mathfrak{g}$ の零点で $\mathcal{I}^+_\mathfrak{g} = \mathcal{I}_\mathfrak{g}(x)$ であったから，定理 1.3 の評価写像

$$\mathrm{ev}_x : \mathcal{I}_\mu = (\mathcal{P}(\mathfrak{g}) \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G \ni \delta = \sum_k D_k \otimes u_k \longmapsto \delta(x) = \sum_k D_k(x) \otimes u_k \in \mathrm{End}\, V_\mu$$

は環同型

$$\mathrm{ev}_x : \mathcal{K}_\mu \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{G^x} V_\mu \tag{4.2}$$

を誘導する（(3.7) と同じもの）．$\mathrm{End}\, V_\mu$ が次数環となるように，V_μ に次数構造を入れる．一般に，ルート格子の元 $\nu = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l \in \mathbb{Z}\Delta$ に対して整数 $o(\nu) = n_1 + \cdots + n_l$ を定める．($o(\nu) = \nu(x_0)$ としてもよい．) W の最長元を w_0 とし，V_μ の i 次同次成分を

$$V_\mu^i = \sum\{V_\mu(w\mu) \,|\, o(w\mu - w_0\mu) = i \text{ であるような } w \in W/W^\mu\}$$

と定める（$i = 0, 1, \ldots, o(\mu - w_0\mu)$）．$v \in V_\mu^i$ であるためには $\pi_\mu(x_0)v = (i + w_0\mu(x_0))v$ が必要十分である．

命題 4.2　$\mathrm{End}_{G^x} V_\mu$ は $\mathrm{End}\, V_\mu$ の同次部分空間であり，誘導される次数に関して (4.2) は次数環の同型となる．

証明　$\delta \in (\mathcal{H}_\mathfrak{g}^i \otimes \mathrm{End}\, V_\mu)^G$，$v \in V_\mu^j$ として $\delta(x)v \in V_\mu^{i+j}$ を示せば十分である（$i + j > o(\mu - w_0\mu)$ のときは $V_\mu^{i+j} := \{0\}$ とする）．任意の $t \in \mathbb{C}$ に対して，δ の同次性から

$$\delta(\mathrm{Ad}(e^{tx_0})x)v = \delta(e^t x)v = e^{it}\delta(x)v$$

が得られるが，δ の G 不変性からは

$$\delta(\mathrm{Ad}(e^{tx_0})x)v = \pi_\mu(e^{tx_0})\delta(x)\pi_\mu(e^{-tx_0})v = e^{-(j+w_0\mu(x_0))t}\pi_\mu(e^{tx_0})\delta(x)v$$

を得る．故に

$$\pi_\mu(e^{tx_0})\delta(x)v = e^{(i+j+w_0\mu(x_0))t}\delta(x)v. \qquad \square$$

命題 2.3 は，次数環の同型

$$\mathcal{K}_\mu \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\mathfrak{t})^{W^\mu} / \mathcal{P}^+(\mathfrak{t})^W \mathcal{P}(\mathfrak{t})^{W^\mu} \tag{4.3}$$

を導く．$\alpha \in \Delta$ のコルートを $\alpha^\vee \in \mathfrak{t}$ とし，$\Delta^\mu = \{\alpha \in \Delta \,|\, \mu(\alpha^\vee) = 0\}$ と置く．また，$o_\mu = \#(\Delta^+ \setminus \Delta^\mu)$ とする．

命題 4.3　$\mathcal{K}_\mu$ の元の最大の次数は o_μ であり，$\dim \mathcal{K}_\mu^{o_\mu} = 1$ である．$\mathcal{K}_\mu^{o_\mu} = \mathbb{C}\kappa$ とすると，任意の $\delta \in \mathcal{K}_\mu \setminus \mathcal{K}_\mu^{o_\mu}$ に対して $\delta'\delta = \kappa$ となる $\delta' \in \mathcal{K}_\mu^+$ が存在する．特に $\mathcal{K}_\mu^{o_\mu}$ は $\mathcal{K}_\mu$ の唯一の極小イデアルである．

この命題は非自明で重要だが，本稿では証明を省略する．(4.3) により W 調和多項式の差積に関する議論に移行して示される．

系 4.4　$v_{w_0\mu} \in V_\mu(w_0\mu) \setminus \{0\}$ とすると，$\eta : \mathrm{End}_{G^x} V_\mu \ni u \mapsto uv_{w_0\mu} \in V_\mu$ は次数線形空間の同型を与える．特に，$o_\mu = o(w\mu - w_0\mu)$ である．

証明　v_μ を V_μ の最高ウェイトベクトルとする．§1 で見たように $G^x = Z \times (G^x)_0$，$(G^x)_0 \subset N$ であるから，$u'(cv_{w_0\mu} + v') = cv_\mu$ ($c \in \mathbb{C}, v' \in V_\mu^+ := \sum_{i>0} V_\mu^i$) で定まる

$u' \in \operatorname{End} V_\mu$ は G^x の作用と可換である．u' は明らかに $\operatorname{End}_{G^x} V_\mu \simeq \mathcal{K}_\mu$ の最大次数の元で，命題 4.3 より $\mathcal{K}_\mu^{o_\mu} = \mathbb{C}u'$ である．$\operatorname{Ker}\eta$ は $\mathcal{K}_\mu^{o_\mu}$ を含まない $\mathcal{K}_\mu$ のイデアルなので $\{0\}$ である．従って η は単射だが，$\dim \operatorname{End}_{G^x} V_\mu = \dim V_\mu$ だったので全射でもある． □

注意 4.5　Panyushev は [P, Propositions 5.1, 5.4] で，より一般的な設定のもとに命題 4.3，系 4.4 と同じ結果を与えている（V_μ がウェイト重複度自由であればよい）．しかしその手法は我々のものとは異なり，Graham の結果 [Gr]（＝次の系の後半部分）に基づいている．

系 4.6　V_μ^+ は V_μ の唯一の極大部分 G^x 加群である．また $V_\mu^{(G^x)_0} = V_\mu^{o_\mu}$ であり，これは唯一の既約 G^x 部分加群である（$\dim V_\mu^{o_\mu} = \dim \mathcal{K}^{o_\mu} = 1$ に注意）．

証明　$G^x = Z \times (G^x)_0$ より V_μ の「部分 G^x 加群」と「部分 $\mathfrak{g}^x$ 加群」は同義である．まず V_μ が $\mathfrak{g}^x$ 加群として $v_{w_0\mu}$ で生成されることを示す．$\mathfrak{g}^x$ は $\operatorname{Ad}(x_0)$ の固有値 (>0) により次数 Lie 環になっているので，$v_{w_0\mu}$ で生成される部分 $\mathfrak{g}^x$ 加群 $E := \pi_\mu(\mathcal{U}(\mathfrak{g}^x))v_{w_0\mu}$ は V_μ の同次部分空間である．ここで $E \subsetneq V_\mu$ と仮定すると，$E^{i_0} \neq V_\mu^{i_0}$ であるような最小の次数 i_0 は正である．よって，$E' := E^{i_0} + \sum_{i\neq i_0} V_\mu^i$ は $v_{w_0\mu}$ を含む部分 $\mathfrak{g}^x$ 加群で，V_μ/E' には $\mathfrak{g}^x$ が自明に作用する．$L : V_\mu/E' \to V_\mu^{o_\mu}$ を任意の非自明な線形写像として $u : V_\mu \twoheadrightarrow V_\mu/E' \xrightarrow{L} V_\mu^{o_\mu} \hookrightarrow V_\mu$ を定めると，これは $uv_{w_0\mu} = 0$ であるような非自明な $\operatorname{End}_{\mathfrak{g}^x} V_\mu = \operatorname{End}_{G^x} V_\mu$ の元となり，系 4.4 に矛盾する．以上より $E = V_\mu$ を得た．これから $V_\mu \setminus V_\mu^+$ の任意の元が $\mathfrak{g}^x$ 加群 V_μ の巡回ベクトルになることが容易に示されるので，前半の主張が証明された．

後半．V_μ^* もミニスキュルなので，唯一の極大 $\mathfrak{g}^x$ 部分加群を持ちその余次元は 1 である．双対性から V_μ は唯一の既約 $\mathfrak{g}^x$ 部分加群を持ちその次元は 1 である．$V_\mu^{(G^x)_0} \supset V_\mu^{o_\mu}$ であるが，$V_\mu^{(G^x)_0}$ の任意の 1 次元部分空間は既約 $\mathfrak{g}^x$ 部分加群なので，$V_\mu^{(G^x)_0} = V_\mu^{o_\mu}$ となる． □

以上は特別に選んだ主冪零元についての議論であった．主冪零元はすべて共役なので，諸結果は次の形式に一般化される．

補題 4.7　x を $\mathfrak{g}$ の任意の主冪零元とする．$\operatorname{End}_{G^x} V_\mu$ は唯一の極大イデアル $\operatorname{End}_{G^x}^+ V_\mu = \operatorname{ev}_x(\mathcal{I}_\mu^+)$ と唯一の極小イデアル $\mathbb{C}\kappa$ を持つ．任意の $u \in \operatorname{End}_{G^x} V_\mu \setminus \mathbb{C}\kappa$ に対して $u'u = \kappa$ となる $u' \in \operatorname{End}_{G^x}^+ V_\mu$ が存在する．一方，任意の $u' \in \operatorname{End}_{G^x}^+ V_\mu$ に対して $u'\kappa = 0$ である．$\operatorname{Ker}\kappa = (\operatorname{End}_{G^x}^+ V_\mu)V_\mu$ は V_μ の唯一の極大 G^x 部分加群でその余次元は 1，κV_μ は V_μ の唯一の既約 G^x 部分加群でその次元は 1 である．さらに，G^x 加群として $V_\mu/\operatorname{Ker}\kappa \simeq \kappa V_\mu$．

4.3　定理 C の証明

$\mu \in \Lambda_{\mathrm{m}}^{+}$ とする．定理 C の Jordan 分解 $x = s + n$ において $s \in \mathfrak{t}$ と仮定しても一般性を失わない．このとき T は G^s の極大トーラスでもある．[Ko3, Lemma 5] より $\mathrm{Ad}(G^s) = \mathrm{Ad}(G)^s$ は連結簡約群なので，$G^s = Z(G^s_{\mathrm{ss}})_0 = T(G^s_{\mathrm{ss}})_0$ も同様である．

V_μ の G^s 加群としての既約分解

$$(\pi_\mu|_{G^s}, V_\mu) = (\sigma_1, E_1) \oplus \cdots \oplus (\sigma_k, E_k) \tag{4.4}$$

の各成分はウェイト空間の直和になっている．V_μ はウェイト重複度自由だったので，(4.4) も重複度自由である．一般に G^s の既約表現 (σ, E) がミニスキュルであるためには E の任意のウェイト λ と G^s の任意のルート α が $\lambda(\alpha^\vee) \in \{0, 1, -1\}$ を満たすことが必要十分である（[Bo, Ch.VI, §1, Exercises] 参照）．G^s のルート系は Δ の部分集合であり，(σ_j, E_j) のウェイトはどれも (π_μ, V_μ) のウェイトのいずれかであるから，各 (σ_j, E_j) は G^s のミニスキュル表現になる．Z_{G^s} を G^s の中心とすると，G^s のミニスキュル表現と Z_{G^s} の指標の間には (1.2) のような 1 対 1 対応があるので，$E_1, \ldots, E_k$ に対する Z_{G^s} のスカラー作用はすべて異なる．

[Ko3, Proposition 13]により，n は $\mathfrak{g}^s$ の主冪零元であり $(G^s)^n = G^s \cap G^n = G^x$ であるから，補題 4.7 が各 E_j（$j = 1, \ldots, k$）に適用できる．例えば，$\mathrm{End}_{G^x} E_j$ は唯一の極小イデアル $\mathbb{C}\kappa_j$ を持ち，$\kappa_j E_j$ が G^x 加群 E_j の半単純成分（ソクル）になる．特に E_j は直既約 G^x 加群であり，$Z_{G^s} \subset G^x$ なので $(\sigma_1|_{G^x}, E_1), \ldots, (\sigma_k|_{G^x}, E_k)$ の中に同型なものはない．

系 4.8　$\mathrm{End}_{G^x} V_\mu \simeq \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{End}_{G^x} E_j$.

同じことが V_μ^* の G^s 加群としての既約分解

$$V_\mu^* = E_1^* \oplus \cdots \oplus E_k^* \tag{4.5}$$

についてもいえる．ここで，各成分 E_j^* を E_j の双対空間と自然に同一視している．G^x 加群 E_j^* のソクルを $\mathbb{C}v_j^*$ とすると

$$V_\mu^{v_j^*} := \{v \in V_\mu \mid \langle v_j^*, v\rangle = 0\} = E_1 \oplus \cdots E_{j-1} \oplus \mathrm{Ker}\,\kappa_j \oplus E_{j+1} \oplus \cdots \oplus E_k \tag{4.6}$$

であり，$V_\mu / V_\mu^{v_j^*} \simeq \kappa_j E_j$．この 1 次元表現 τ_j における Z_{G^s} の作用は j ごとに異なる．以上で定理 C の (i) と (ii) が証明された．

$j = 1, \ldots, k$ とし，(iii) の制限写像

$$\zeta_j : \mathcal{P}_\mu \ni \varphi \mapsto \langle \pi_\mu^*(g) v_j^*, \varphi(\mathrm{Ad}(g)x)\rangle \in \mathrm{Ind}_{G^x}^{G} \tau_j$$

について見ていく．これが well-defined な G 準同型であることはすぐ確認できる．

補題 4.9 $\mathcal{H}_\mu \cap \operatorname{Ker} \zeta_j = \{0\}$.

証明 $\mathcal{H}_\mu \cap \operatorname{Ker} \zeta_j \neq \{0\}$ とすると，適当な $\lambda \in \Lambda^+$ と $\Phi \in \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu \cap \operatorname{Ker} \zeta_j) \setminus \{0\}$ が存在する．このとき (3.6) の評価写像のもと $\operatorname{ev}_x(\Phi) \in \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, V_\mu^{v_j^*})$．実際，任意の $e \in V_\lambda$ に対して $\zeta_j(\Phi(e)) = 0$ なので

$$\langle v_j^*, \operatorname{ev}_x(\Phi)(e) \rangle = \langle v_j^*, \Phi(e)(x) \rangle = \zeta_j(\Phi(e))(1_G) = 0.$$

一方，(3.8) は ev_x と整合した同型写像なので，$u \in \operatorname{End}_{G^x} V_\mu = \operatorname{ev}_x\big((\mathcal{H}_\mathfrak{g} \otimes \operatorname{End} V_\mu)^G\big)$ が 0 でなければ $u \circ \operatorname{ev}_x(\Phi) \neq 0$．ところが u として系 4.8 の分解において j 番目の成分が κ_j で他の成分が 0 であるものを取ると，(4.6) より $u \circ \operatorname{ev}_x(\Phi) = 0$ となり矛盾する． □

$\zeta_j|_{\mathcal{H}_\mu}$ の単射性が示された．全射性は既約表現の重複度に関する次の補題から従い，定理 C の証明が完了する．

補題 4.10 任意の $\lambda \in \Lambda^+$ に対して $\dim \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu) = \dim \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, \kappa_j E_j)$.

証明 (3.5)，(3.7)，(3.8) より，写像の合成による線形写像

$$\operatorname{End}_{G^x} V_\mu \otimes \operatorname{ev}_x\big(\operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu)\big) \to \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, V_\mu)$$

は同型写像である．$\operatorname{ev}_x\big(\operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu)\big) \subset \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, V_\mu)$ と $\dim \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu) = \dim \operatorname{ev}_x\big(\operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu)\big)$ に注意．$\{F_i\}$ を $\operatorname{ev}_x\big(\operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu)\big)$ の基とすると，任意の $F \in \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, \kappa_j E_j) \subset \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, V_\mu)$ に対して $\{u_i\} \subset \operatorname{End}_{G^x} V_\mu$ で

$$\sum_i u_i \circ F_i = F$$

を満たすものが唯一組存在する．系 4.8 と一意性から $\{u_i\} \subset \operatorname{End}_{G^x} E_j$ である．実はもっと強く $\{u_i\} \subset \mathbb{C}\kappa_j$ が成り立つ．実際，ある $i = i_0$ に対して $u_{i_0} \notin \mathbb{C}\kappa_j$ とすると，補題 4.7 より $u' \in \operatorname{End}^+_{G^x} E_j$ で $u' u_{i_0} = \kappa_j$ となるものがある．このとき

$$0 \neq \sum_i u' u_i \circ F_i = u' F \in \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, u' \kappa_j E_j) = \{0\}$$

となり矛盾が生じる．以上より，線形同型

$$\kappa_j \circ \cdot : \operatorname{ev}_x\big(\operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu)\big) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{G^x}(V_\lambda, \kappa_j E_j)$$

が得られた． □

4.4 定理 B の後半部分の証明

${}^\backprime\mathcal{H}_\mu$ を $\{\xi^i \otimes v \mid (\xi, v) \in \mathcal{N}_\mu^*,\ i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ で張られる線形空間とする．$\mathcal{N}_\mu^*$ は G 安定なので，${}^\backprime\mathcal{H}_\mu$ は $\mathcal{H}_\mu$ の G 安定な同次部分空間である．${}^\backprime\mathcal{H}_\mu$ の $\mathcal{H}_\mu$ における直交補空間 ${}^\backprime\mathcal{H}_\mu^\perp$ が $\{0\}$ で

あることを示す．$\varphi \in {}^{\backprime}\mathcal{H}_\mu^\perp \cap \mathcal{P}_\mu^i$ とすると，任意の $(\xi, v) \in \mathcal{N}_\mu^*$ に対して

$$0 = (\varphi, \xi^i \otimes v) = (\partial(\xi^\star)^i \varphi, v) = i!(\varphi(\xi^\star), v) = i!\langle v^\star, \varphi(\xi^\star)\rangle.$$

ここで $v^\star := (\cdot, v) \in V_\mu^*$ とした．$x \in \mathfrak{g}$ を主冪零元とし，$\mathbb{C}v^*$ を G^x 加群 V_μ^* のソクルとすると，補題 4.7 より任意の $\delta \in \mathcal{I}_\mu^+$ に対して $\mathrm{ev}_x(\delta)V_\mu \subset V_\mu^{v^*}$ となる．これから，$(x, v^*) = (\xi^\star, v^\star)$ となる $(\xi, v) \in \mathfrak{g}^* \times V_\mu$ は $\mathcal{N}_\mu^*$ に属することが容易に示される．任意の $g \in G$ に対して $g^{-1}\varphi \in {}^{\backprime}\mathcal{H}_\mu^\perp \cap \mathcal{P}_\mu^i$ であるから

$$\langle v^*, (g^{-1}\varphi)(x)\rangle = \langle \pi_\mu^*(g)v^*, \varphi(\mathrm{Ad}(g)x)\rangle = 0.$$

φ の (x, v^*) を通る拡張 G 軌道への制限が 0 であるから，定理 C (iii) より $\varphi = 0$.

5 次数付き重複度公式

$\mu \in \Lambda_{\mathrm{m}}^+$ とする．§1 で述べたようにベクトル値調和多項式の空間 $\mathcal{H}_\mu$ には自然な次数構造がある．定理 C により $\mathcal{H}_\mu \simeq \mathrm{Ind}_T^G e^\mu$ であるが，Brylinski は [Bry1] で（一般の $\mu \in \Lambda^+$ に対して）**ファイバー次数**なる $\mathrm{Ind}_T^G e^\mu$ のフィルターを導入した．このフィルターのある特徴付けが [Bry2, Proposition 13.1, Conjecture 13.3] で予想されたが，それはこのフィルターが $\mathcal{H}_\mu$ の次数によるものと同じであることを示す（予想は [Bro1] で証明された）．Brylinski は（一般の $\mu \in \Lambda^+$ の $\mathrm{Ind}_T^G e^\mu$ に対する）定理 D を旗多様体の余接束上の可逆層の高次コホモロジーの消滅に結び付けて予想したが，これも [Bro1] が解決した．また，[JLZ] はこの結果に対する別証明を与えている．

この種の話の起源は Hesselink [He] と Peterson が独立に示した $\mu = 0$ に対する定理 D である．Hesselink の方法は変数分離定理 (1.1) と Macdonald の結果 [Ma] に基づいた組み合わせ論的なものである．ここでは，一般の $\mu \in \Lambda_{\mathrm{m}}^+$ に対しても定理 A に基づいた同様の手法で定理 D が証明できることを述べる．

$\mathcal{R}(T) = \mathbb{C}[e^\nu \mid \nu \in \Lambda]$ を係数とし q を不定元とする形式的冪級数環 $\mathcal{R}(T)[[q]]$ 内で議論する．W の $\mathcal{R}(T)$ への自然な作用は q への自明な作用と併せて $\mathcal{R}(T)[[q]]$ に延長される．この作用に関する反対称子を $J = \sum_{w \in W} \mathrm{sgn}(w)w$ とする．また，$J^\mu = \sum_{w \in W^\mu} \mathrm{sgn}(w)w$, $\Delta^\mu = \{\alpha \in \Delta \mid \mu(\alpha^\vee) = 0\}$ とする．

補題 5.1 (i) 任意の $\lambda \in \Lambda^+$ に対して $J(e^{\lambda+\rho}) = \chi_\lambda J(e^\rho)$.

(ii) $J^\mu\bigl(e^{\mu+\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+\cap\Delta^\mu}(1-qe^{-\alpha})\bigr) = \bigl(\sum_{w\in W^\mu} q^{\ell(w)}\bigr)J^\mu(e^{\mu+\rho})$.

(iii) $J\bigl(e^{\mu+\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta^\mu}(1-qe^{-\alpha})\bigr) = J(e^{\mu+\rho})$.

(iv) $J\bigl(e^{\mu+\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-qe^{-\alpha})\bigr) = \bigl(\sum_{w\in W^\mu} q^{\ell(w)}\bigr)J(e^{\mu+\rho})$.

証明 (i) は指標公式．(ii) は [He, Proposition 5] による．

(iii). [Ma] に倣って部分集合 $F \subset \Delta^+$ に対して $|F| := \sum_{\alpha \in F} \alpha \in \mathfrak{t}^*$ という記号を使う．左辺の q が入っている項がキャンセルすることがいえればよいので，$\mu+\rho-|F|$ が正則（W 作用による固定部分群が自明）であるような $F \subset \Delta^+ \setminus \Delta^\mu$ が $F=\emptyset$ に限られることを示せば十分である．正則だとすると，ある $w \in W$ に対して $w(\mu+\rho-|F|)$ が真に優な整ウェイト（strictly dominant integral weight）になる．$\rho-|F| = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+\setminus F}\alpha - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in F}\alpha$ なので，$w(\rho-|F|) = \rho-|F'|$ となる $F' \subset \Delta^+$ がある．

$$w(\mu+\rho-|F|) = w\mu+\rho-|F'| = \mu+\rho-((\mu-w\mu)+|F'|)$$

が真に優であることから，$\mu-((\mu-w\mu)+|F'|)$ は優であり，V_μ のウェイトの 1 つになる．ところが V_μ はミニスキュルなのでこのウェイトは μ に等しく，$\mu=w\mu$，$|F'|=0$ を得る．$\Delta(w^{-1}) = \Delta^+ \cap -w^{-1}\Delta^+$ と置くと $\rho-|F| = w^{-1}\rho = \rho-|\Delta(w^{-1})|$ となるので，[Ma, Lemma 2.14] より $F=\Delta(w^{-1})$．$w \in W^\mu$，$F \subset \Delta^+ \setminus \Delta^\mu$ なので $w=1$，$F=\emptyset$ となる．

(iv) を示す．(ii) の両辺に W^μ 不変である $\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta^\mu}(1-qe^{-\alpha})$ を掛けた

$$J^\mu\Biggl(e^{\mu+\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-qe^{-\alpha})\Biggr) = \Biggl(\sum_{w\in W^\mu} q^{\ell(w)}\Biggr) J^\mu\Biggl(e^{\mu+\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta^\mu}(1-qe^{-\alpha})\Biggr)$$

から

$$J\Biggl(e^{\mu+\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-qe^{-\alpha})\Biggr) = \Biggl(\sum_{w\in W^\mu} q^{\ell(w)}\Biggr) J\Biggl(e^{\mu+\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+\setminus\Delta^\mu}(1-qe^{-\alpha})\Biggr)$$

を得るが，(iii) によりこの右辺は (iv) の右辺に等しい． □

定理 D を証明する．各 $\nu \in \Lambda$，$i=0,1,\ldots$ に対して $P(\nu;q) = \sum_{i=0}^\infty p_i(\nu)q^i$ により $p_i(\nu) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を定める．つまり

$$\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-qe^\alpha)^{-1} = \sum_{i=0}^\infty q^i \sum_{\nu\in\Lambda} p_i(\nu)e^\nu$$

である．これと補題 5.1 を使って (3.15) の右辺に $J(e^\rho)$ を掛けたものを変形すると

$$\begin{aligned}
\frac{\chi_\mu J(e^\rho)}{\prod_{\alpha\in\Delta}(1-qe^\alpha)}\sum_{w\in W^\mu} q^{\ell(w)} &= \frac{J\bigl(e^{\mu+\rho}\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-qe^{-\alpha})\bigr)}{\prod_{\alpha\in\Delta}(1-qe^\alpha)} \qquad (\because\ \text{(i), (iv)})\\
&= J\Biggl(\frac{e^{\mu+\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+}(1-qe^\alpha)}\Biggr)\\
&= \sum_{i=0}^\infty q^i \sum_{\nu\in\Lambda} p_i(\nu) J(e^{\nu+\mu+\rho})\\
&= \sum_{i=0}^\infty q^i \sum_{\nu'\in\Lambda} p_i(\nu'-(\mu+\rho)) J(e^{\nu'})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} q^i \sum_{\lambda \in \Lambda^+} \sum_{w \in W} p_i(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)) J(e^{w(\lambda+\rho)}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} q^i \sum_{\lambda \in \Lambda^+} \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) p_i(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)) J(e^{\lambda+\rho}) \\
&= J(e^{\rho}) \sum_{i=0}^{\infty} q^i \sum_{\lambda \in \Lambda^+} \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) p_i(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)) \chi_\lambda .
\end{aligned}
$$

一方 (3.15) の左辺は

$$
\sum_{i=0}^{\infty} q^i \sum_{\nu \in \Lambda} \dim \mathcal{H}_\mu^i(\nu) e^{\nu} = \sum_{i=0}^{\infty} q^i \sum_{\lambda \in \Lambda^+} \dim \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu^i) \chi_\lambda
$$

であるから，各 $\lambda \in \Lambda^+$ について

$$
\sum_{i=0}^{\infty} \dim \operatorname{Hom}_G(V_\lambda, \mathcal{H}_\mu^i) q^i = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{w \in W} \operatorname{sgn}(w) p_i(w(\lambda+\rho) - (\mu+\rho)) q^i
$$

となる．

参考文献

[Bo] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chapitres 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.

[Bro1] B. Broer, *Line bundles on the cotangent bundle of the flag variety*, Invent. Math. **113** (1993), 1–20.

[Bro2] A. Broer, *The sum of generalized exponents and Chevalley's restriction theorem for modules of covariants*, Indag. Math. N. S. **6** (1995), no.4, 385–396.

[Bry1] R. K. Brylinski, *Limits of weight spaces, Lusztig's q-analogs, and fiberings of adjoint orbits*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), 517–533.

[Bry2] R. K. Brylinski, *Twisted ideals of the nullcone*, Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras, and invariant theory (Paris, 1989), 289–316, Progr. Math., **92**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[C] C. Chevalley, *Invariants of Finite Groups Generated by Reflections*, Amer. J. Math. **77** (1955), 778–782.

[De] A. Deitmar, *Invariant operators on higher K-types*, J. reine angew. Math. **412** (1990), 97–107.

[Gi] V. Ginzburg, *Perverse sheaves on a loop group and Langlands duality*, arXiv:alg-geom/9511007v4 (2000).

[GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Symmetry, Representations, and Invariants*, Graduate Texts in Mathematics **255**, Springer, 2009.

[Gr] W. Graham, *Functions on the universal cover of the principal nilpotent orbit*, Invent. Math. **108** (1992), 15–27.

[He] W. H. Hesselink, *Characters of the nullcone*, Math. Ann. **252** (1980), 179–182.

[JLZ] A. Joseph, G. Letzter, and S. Zelikson, *On the Brylinski-Kostant filtration*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 945–970.

[Ka] S-I, Kato, *Spherical functions and a q-analogue of Kostant's weight multiplicity formula*, Invent. Math. **66** (1982), 461–468.

[Ki] A. A. Kirillov, *Family algebras*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **6** (2000), 7–20.

[Ko1] B. Kostant, *A formula for the multiplicity of a weight*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 53–73.

[Ko2] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math. **81** (1959), 973–1032.

[Ko3] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings*, Amer. J. Math. **85** (1963), 327–404.

[KR] B. Kostant and S. Rallis, *Orbits and representations associated with symmetric spaces*, Amer. J. Math. **93** (1971), 753–809.

[L] G. Lusztig, *Singularities, character formulas, and a q-analog of weight multiplicities*, Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981), 208–229, Astérisque, 101-102, Soc. Math. France, Paris, 1983.

[Ma] I. G. Macdonald, *The Poincaré series of a Coxeter group*, Math. Ann. **199** (1972), 161–174.

[Mc] W. M. McGovern, *Rings of regular functions on nilpotent orbits and their covers*, Invent. Math. **97** (1989), 209–217.

[P] D. I. Panyushev, *Weight multiplicity free representations, g-endomorphism algebras, and Dynkin polynomials*, J. London Math. Soc. (2) **69** (2004), 273–290.

[Ro] N. Rozhkovskaya, *Commutativity of quantum family algebras*, Lett. Math. Phys. **63** (2003), no. 2, 87–103.