

B_2 型最高ウェイトクリスタルのグラフ理論的特徴付け

(A graph theoretic characterization of B_2 highest weight crystals)

東京大学大学院数理科学研究科 土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

1 はじめに

2018年6月のRIMS研究集会「表現論と代数, 解析, 幾何をめぐる諸問題」での発表について, 簡単に報告させていただく. [Ts1]では, B_2 型最高ウェイトクリスタル $B(\lambda)$ (のクリスタルグラフ) の特徴付けをあたえた. これは A_2 型するときになされた [Ste] の類似の結果であるが, 15年ほど未解決であった. 部分的な先行研究としては [Ster, DKK] があり, 差分について §9 で論じる. なお本稿の少なくない部分か [Ts1, §1] の日本語訳になってしまったが, その多くは公理の記述についてである. §9 は改訂版と overlap があるが, (読んでいただければわかるか) かなり時間をかけて準備した原稿であり, これ以上の説明は難しいと感じるし, これより省略すると説得力に欠けると思われるので, その点もご容赦いただければ幸いである.

2 柏原クリスタル

記法を固定しておく. $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を [Kac, §1.1, §2.1] の意味で対称化可能一般カルタン行列とする. A のカルタンデータとは, 以下の条件を満たす4つ組 $(P, P^\vee, \Pi, \Pi^\vee)$ のことである.

1. P はランク $2|I| - \text{rank } A$ の自由 \mathbb{Z} 加群で, $P^\vee := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$.
2. $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\} (\subseteq P)$, $\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\} (\subseteq P^\vee)$ は, $\forall i \in I, \forall j \in I, a_{ij} = \langle h_i, \alpha_j \rangle$ なるそれぞれ P, P^\vee の \mathbb{Z} 線形独立な元たち (ここで $\langle \cdot, \cdot \rangle : P^\vee \times P \rightarrow \mathbb{Z}$ は, 標準的な評価写像).

定義 1. (抽象的な) 柏原クリスタルとは, 以下の公理 (K1)–(K5) を満たす6つ組

$$(B, \text{wt}, (\tilde{e}_i)_{i \in I}, (\tilde{f}_i)_{i \in I}, (\varepsilon_i)_{i \in I}, (\varphi_i)_{i \in I})$$

のことである [Ka2, §7.2]. ここで B は集合, $\text{wt} : B \rightarrow P, \varepsilon_i, \varphi_i : B \rightarrow \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \rightarrow B \sqcup \{\mathbf{0}\}$ は関数で, (K1)–(K3) においては $\forall a \in \mathbb{Z}, a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$ と約束する.

$$(K1) \quad \forall i \in I, \forall b \in B, \varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \text{wt}(b) \rangle.$$

$$(K2) \quad \forall i \in I, \forall b \in B, \tilde{e}_i b \neq \mathbf{0} \Rightarrow \text{wt}(\tilde{e}_i b) = \text{wt}(b) + \alpha_i, \varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1, \varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1.$$

$$(K3) \quad \forall i \in I, \forall b \in B, \tilde{f}_i b \neq \mathbf{0} \Rightarrow \text{wt}(\tilde{f}_i b) = \text{wt}(b) - \alpha_i, \varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1, \varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1.$$

$$(K4) \quad \forall i \in I, \forall b \in B, \forall b' \in B, \tilde{e}_i b = b' \Leftrightarrow b = \tilde{f}_i b'.$$

$$(K5) \quad \forall i \in I, \forall b \in B, \varphi_i(b) = -\infty \Rightarrow \tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = \mathbf{0}.$$

3 最高ウェイトクリスタル・正則クリスタル

支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ について、柏原は量子群 $U_q(A)$ の可積分最高ウェイト表現 $V(\lambda)$ の結晶基底 $B(\lambda)$ の存在と一意性を証明した [Ka1, Theorem 2] (最高ウェイトクリスタル). $B(\lambda)$ の disjoint union を正則クリスタルといい、柏原クリスタルの中でも特に重要である. これらは、テンソル積中の組成重複度や parabolic 部分代数に関する分岐則を与え、さらに Young 図形や Littlewood-Richardson 規則といった有名だがアドホックに思われた対象の統一的な理解 (例えば [Ka2, §5] を参照) や類似物の構成 (例えば [KN, GJK³] を参照) をもたらす. なお正確には、正則クリスタルは、ウェイト空間に関するある種の有限性 [Ka1, §1.2] などいくつかの条件をもつ $U_q(A)$ 加群の結晶基底として定義されるので、勝手な disjoint union が許されるわけではないが、本稿ではそのような細かい話には深入りしないことにする (だから、先に述べた正則クリスタルの定義は、許される disjoint union の条件を正確に書き下したとしても、本当は定理である [Ka1, Theorem 3]).

4 クリスタルグラフ

柏原クリスタル $(B, \text{wt}, (\tilde{e}_i)_{i \in I}, (\tilde{f}_i)_{i \in I}, (\varepsilon_i)_{i \in I}, (\varphi_i)_{i \in I})$ は、規則

B が頂点集合で、 $\tilde{f}_i x = y$ に限って x から y へ i 色有向辺が存在する

によって、 I 色有向グラフを与える (クリスタルグラフ). 本稿の目的は、 I 色有向グラフが与えられたとき、それが正則 A クリスタルのクリスタルグラフかどうかの「局所的な」判定法を論じることである. 局所的の意味は、注意 13 のとおりである.

定義 2. 任意の $x \in X$ と $i \in I$ について以下が成り立つとき、 I 色有向グラフ X を good とよぶ.

(G1) x からの i 色有向辺は高々 1 つであり、 x への i 色有向辺も高々 1 つである

(G2) x を通る i 色有向辺たち (i ストリング) の長さは有限

good な I 色有向グラフ X において、 x から y へ i 色有向辺が存在するとき $\tilde{f}_i x = y, \tilde{e}_i y = x$ と書くことにし (公理 (G1) より well-defined である), $\tilde{f}_i x = \mathbf{0}, \tilde{e}_i x = \mathbf{0}$ はそれぞれ「 x からの i 色有向辺は存在しない」「 x への i 色有向辺は存在しない」を意味すると約束する. 公理 (G2) によって

$$\varphi_i(x) = \max\{m \geq 0 \mid \tilde{f}_i^m x \neq \mathbf{0}\}, \quad \varepsilon_i(x) = \max\{m \geq 0 \mid \tilde{e}_i^m x \neq \mathbf{0}\}$$

は有限確定値をとるという意味で well-defined である. 最高ウェイトクリスタル $B(\lambda)$ のクリスタルグラフは good で、 ε_i, φ_i は $B(\lambda)$ に付随する同じ記号で書かれる関数と同一になる [Ka1, (2.4.1)].

定義 3. good な I 色有向グラフ X の頂点 $x_0 \in X$ が最大元であるとは

(M1) $\forall i \in I, \tilde{e}_i x_0 = \mathbf{0}$ (つまり $\varepsilon_i(x_0) = 0$),

(M2) $\forall x \in X, \exists s \geq 0, \exists (i_1, \dots, i_s) \in I^s, \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_s} x_0 = x$ (つまり $\tilde{e}_{i_s} \cdots \tilde{e}_{i_1} x = x_0$).

いうまでもないが、最大元は存在するとすればただ 1 つである.

定義 4. X を good な I 色有向グラフとする. $g \in \{e, f\}, \beta \in \{\varepsilon, \varphi\}, x \in X, i, j \in I$ で $\tilde{g}_i x \neq \mathbf{0}$ となるものについて、以下の整数を定義する.

$$\Delta_\beta^g(i, j, x) = \beta_j(\tilde{g}_i x) - \beta_j(x)$$

5 Stembridge クリスタル

Stembridge は, 対称化可能一般カルタン行列 A に付随する最高ウェイトクリスタルは A 正則性をみたすことを証明した. 証明には Littelmann のパス模型 [Li1, Li2] が用いられる.

定理 5 ([Ste, Definition 1.1, Proposition 2.4]). $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を対称化可能一般カルタン化行列とする. 支配的整ウェイト $\lambda \in P^+$ について, $B(\lambda)$ は $\forall i \in I, \varphi_i(b_\lambda) = \langle h_i, \lambda \rangle$ なる最大元 $b_\lambda \in B(\lambda)$ をもつ A 正則グラフである. ここで有向グラフ X が A 正則であるとは, 以下の公理 (S1)–(S5) をみたすことと定義される.

(S1) X は定義 2 の意味における good な I 色有向グラフである.

$$(S2) \quad \forall x \in X, \forall i \in I, \tilde{e}_i x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \forall j \in I \setminus \{i\}, \Delta_\varphi^e(i, j, x) - \Delta_\varepsilon^e(i, j, x) = a_{ji}.$$

$$(S3) \quad \forall x \in X, \forall i \in I, \tilde{e}_i x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \forall j \in I \setminus \{i\}, \Delta_\varphi^e(i, j, x) \leq 0 \leq \Delta_\varepsilon^e(i, j, x).$$

$$(S4) \quad \forall i \neq j \in I, \forall x \in X, \tilde{e}_i x \neq \mathbf{0} \neq \tilde{e}_j x \Rightarrow (A_{i,j}^-, (A_{j,i}^-), (B^-)).$$

$$(S5) \quad \forall i \neq j \in I, \forall x \in X, \tilde{f}_i x \neq \mathbf{0} \neq \tilde{f}_j x \Rightarrow (A_{i,j}^+, (A_{j,i}^+), (B^+)).$$

$$(A_{k,\ell}^-) \quad \Delta_\varepsilon^e(k, \ell, x) = 0 \Rightarrow \exists z = \tilde{e}_\ell \tilde{e}_k x = \tilde{e}_k \tilde{e}_\ell x, \Delta_\varphi^f(\ell, k, z) = 0.$$

$$(B^-) \quad (\Delta_\varepsilon^e(i, j, x), \Delta_\varepsilon^e(j, i, x)) = (1, 1) \Rightarrow \exists z = \tilde{e}_i \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i x = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j x, (\Delta_\varphi^f(i, j, z), \Delta_\varphi^f(j, i, z)) = (1, 1).$$

$$(A_{k,\ell}^+) \quad \Delta_\varphi^f(k, \ell, x) = 0 \Rightarrow \exists z = \tilde{f}_\ell \tilde{f}_k x = \tilde{f}_k \tilde{f}_\ell x, \Delta_\varepsilon^e(\ell, k, z) = 0.$$

$$(B^+) \quad (\Delta_\varphi^f(i, j, x), \Delta_\varphi^f(j, i, x)) = (1, 1) \Rightarrow \exists z = \tilde{f}_i \tilde{f}_j^2 \tilde{f}_i x = \tilde{f}_j \tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j x, (\Delta_\varepsilon^e(i, j, z), \Delta_\varepsilon^e(j, i, z)) = (1, 1).$$

本稿におけるヨの記法について確認しておく. 例えば (B^-) における $\exists z = \tilde{e}_i \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i x = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j x$ は

1. $\tilde{e}_i x, \tilde{e}_j \tilde{e}_i x, \tilde{e}_j \tilde{e}_j \tilde{e}_i x, \tilde{e}_i \tilde{e}_j \tilde{e}_i x, \tilde{e}_i \tilde{e}_j \tilde{e}_j \tilde{e}_i x, \tilde{e}_j x, \tilde{e}_i \tilde{e}_j x, \tilde{e}_i \tilde{e}_i \tilde{e}_j x, \tilde{e}_j \tilde{e}_i \tilde{e}_i \tilde{e}_j x \neq \mathbf{0}$,
2. $\tilde{e}_i \tilde{e}_j \tilde{e}_j \tilde{e}_i x = \tilde{e}_j \tilde{e}_i \tilde{e}_i \tilde{e}_j x$ であって, これを z とする

の略記法である. [Ste, pp.4810] でも注意されているが, 1 は「そのいくつかが無条件に成り立つ」という意味で冗長である. 実際, $(\Delta_\varepsilon^e(i, j, x), \Delta_\varepsilon^e(j, i, x)) = (1, 1), \varepsilon_j(x), \varepsilon_j(x) \geq 1$ から

$$\tilde{e}_i x, \tilde{e}_j \tilde{e}_i x, \tilde{e}_j \tilde{e}_j \tilde{e}_i x, \tilde{e}_j x, \tilde{e}_i \tilde{e}_j x, \tilde{e}_i \tilde{e}_i \tilde{e}_j x \neq \mathbf{0}$$

であることが従う. $(A_{k,\ell}^\pm)$ についても同様の含意関係がある. しかし「本当の」公理を書き下すことには深入りせず, 以上の意味におけるヨの記法を用いることにする.

注意 6. 定義されるなら $\Delta_\varepsilon^e(i, i, x) = -1, \Delta_\varphi^e(i, i, x) = 1, \Delta_\varepsilon^f(i, i, x) = 1, \Delta_\varphi^f(i, i, x) = -1, \Delta_\beta^f(i, j, x) = -\Delta_\beta^e(i, j, \tilde{f}_i x)$ である ($i \in I, x \in X, \beta \in \{\varepsilon, \varphi\}$). よって (S2) は, 以下の (S2_k) のどれにでもできる ($k \in \{a, b, c\}$). 同様に (S3) は (S3') に変えてもよい.

$$(S2_a) \quad \forall x \in X, \forall i \in I, \tilde{e}_i x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \forall j \in I, \Delta_\varphi^e(i, j, x) - \Delta_\varepsilon^e(i, j, x) = a_{ji}.$$

$$(S2_b) \quad \forall x \in X, \forall i \in I, \tilde{f}_i x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \forall j \in I \setminus \{i\}, \Delta_\varepsilon^f(i, j, x) - \Delta_\varphi^f(i, j, x) = a_{ji}.$$

$$(S2_c) \quad \forall x \in X, \forall i \in I, \tilde{f}_i x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \forall j \in I, \Delta_\varepsilon^f(i, j, x) - \Delta_\varphi^f(i, j, x) = a_{ji}.$$

$$(S3') \quad \forall x \in X, \forall i \in I, \tilde{f}_i x \neq \mathbf{0} \Rightarrow \forall j \in I \setminus \{i\}, \Delta_\varepsilon^f(i, j, x) \leq 0 \leq \Delta_\varphi^f(i, j, x).$$

例 7. $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を $\det A \neq 0$ なる対称化可能一般カルタン行列とすると

$$\forall j \in I, \langle h_j, \Lambda_i \rangle = \delta_{ij}$$

によって、基本ウェイト Λ_i が well-defined である。下図は、左と右がそれぞれ A_2 クリスタル $B(2\Lambda_1), B(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ で (太線が 1 色有向辺である)、公理 $(A_{1,2}^-, (B^-))$ のあらわれが観察される。



定義 8. $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ が simply-laced とは

$$\forall i \neq j \in I, A|_{i,j} := \begin{pmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{pmatrix} = A_1 \oplus A_1, A_2.$$

A が simply-laced のとき、(S2),(S3) は $\tilde{e}_i x \neq 0 \neq \tilde{e}_j x$ ならば $(\Delta_\varepsilon^e(i, j, x), \Delta_\varepsilon^e(j, i, x)) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ を演繹する ($i \neq j$)。同様に $\tilde{f}_i x \neq 0 \neq \tilde{f}_j x$ ならば $(\Delta_\varphi^f(i, j, x), \Delta_\varphi^f(j, i, x)) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ である ($i \neq j$)。Stembridge の定義した A 正則性は、simply-laced な一般カルタン行列に付随する最高ウェイトクリスタルを特徴づける。その正確な意味は、次のとおりである。

定理 9 ([Ste, Proposition 1.4, Theorem 3.3]). $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を simply-laced, X を最大元 $x_0 \in X$ をもつ A 正則グラフとする。このとき、ただ 1 つの I 色有向グラフ同型 $X \xrightarrow{\sim} B(\lambda)$ が存在する。ここで $\lambda \in P^+$ は $\forall i \in I, \langle h_i, \lambda \rangle = \varphi_i(x_0)$ であればよい ($\det A \neq 0$ ならば一意的に定まる)。

6 Stembridge の特徴付けに基づくクリスタルグラフの描画法

定理 9 によって、simply-laced な一般カルタン行列 A に付随する最高ウェイトクリスタル $B(\lambda)$ を描くことができる [Ste, Remark 1.5]. $A = A_2, \lambda = 2\Lambda_1 + \Lambda_2$ の場合に説明してみよう。

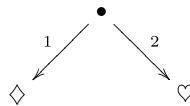
Step 1 まず最高ウェイトに対応する頂点を描く。



当然、以下のように関数の値が割り当てられる。

$$(\varphi_1(\bullet), \varphi_2(\bullet)) = (2, 1), \quad (\varepsilon_1(\bullet), \varepsilon_2(\bullet)) = (0, 0), \quad \text{wt}(\bullet) = 2\Lambda_1 + \Lambda_2.$$

Step 2 この次の世代を描く。● は 1 色有向辺を 2 世代分もつが、ここでは 1 世代分までを描く。



関数の割り当ては以下のように決定される。まず

$$(\varepsilon_1(\diamond), \varepsilon_2(\diamond)) = (1, 0), \quad \text{wt}(\diamond) = 2\Lambda_1 + \Lambda_2 - \alpha_1$$

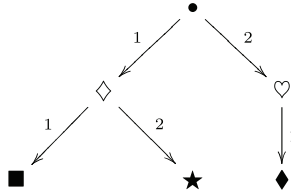
である。すると、柏原クリスタルの公理 (K1) より

$$(\varphi_1(\diamond), \varphi_2(\diamond)) = (\langle h_1, \text{wt}(\diamond) \rangle, \langle h_2, \text{wt}(\diamond) \rangle) - (\varepsilon_1(\diamond), \varepsilon_2(\diamond)) = (1, 2)$$

と定まる。同様に

$$(\varphi_1(\heartsuit), \varphi_2(\heartsuit)) = (3, 0), \quad (\varepsilon_1(\heartsuit), \varepsilon_2(\heartsuit)) = (0, 1), \quad \text{wt}(\heartsuit) = 2\Lambda_1 + \Lambda_2 - \alpha_2.$$

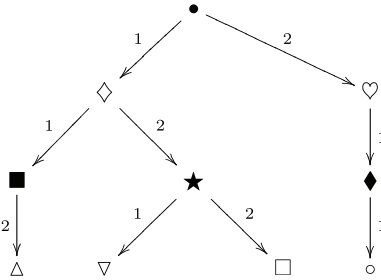
Step 3 以上に基づいて次の世代を描く．先と同様 1 世代分だけを描く．



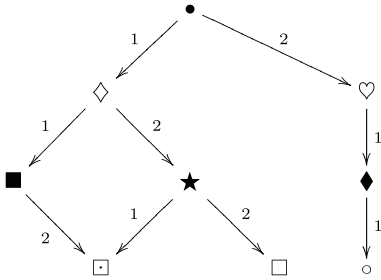
関数の割り当ては，同様に以下のように計算される．

$$\begin{aligned}
 (\varphi_1(\blacksquare), \varphi_2(\blacksquare)) &= (0, 3), & (\varepsilon_1(\blacksquare), \varepsilon_2(\blacksquare)) &= (2, 0), & \text{wt}(\heartsuit) &= 2\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2\alpha_1, \\
 (\varphi_1(\blackstar), \varphi_2(\blackstar)) &= (1, 1), & (\varepsilon_1(\blackstar), \varepsilon_2(\blackstar)) &= (0, 1), & \text{wt}(\blackstar) &= 2\Lambda_1 + \Lambda_2 - \alpha_1 - \alpha_2, \\
 (\varphi_1(\blacklozenge), \varphi_2(\blacklozenge)) &= (2, 0), & (\varepsilon_1(\blacklozenge), \varepsilon_2(\blacklozenge)) &= (1, 0), & \text{wt}(\blacklozenge) &= 2\Lambda_1 + \Lambda_2 - \alpha_1 - \alpha_2.
 \end{aligned}$$

Step 4 同様に次の世代を描く．



ここで $\Delta, \nabla, \square, \circ$ について関数の割り当てを計算する前に， $\varphi_1(\blacklozenge) = \varphi_1(\blackstar) = 1$ だから，Stembridge の公理 (S5) の $(A_{2,1}^+)$ を \blacklozenge に適用すると $\Delta = \nabla$ でなければならない（これを \square と書こう）．よって，4 世代目までの正しいグラフは以下ようになる．



つまり

$$(\varepsilon_1(\square), \varepsilon_2(\square)) = (1, 1), \quad \text{wt}(\square) = 2\Lambda_1 + \Lambda_2 - 2\alpha_1 - \alpha_2$$

なのである．これから (K1) を用いて $(\varphi_1(\square), \varphi_2(\square))$ が計算される．以下同様である．

以下，同様の step を繰り返す．つまり「安直な方法で世代を更新し，Stembridge の公理から合流すべきところは合流させ，必要な関数値を計算する」を繰り返すのである．すると，このアルゴリズムは well-defined で，有限回で停止し（ある世代で $(\varphi_1(\clubsuit), \varphi_2(\clubsuit)) = (0, 0)$ なる頂点が 1 つ残る）， $B(\lambda)$ のクリスタルグラフがえられる．well-definedness と停止性を，クリスタルの存在を用いることなく，純粋に組合せ論的に示すことは [Ste, Remark 1.5] によると未解決らしい．

7 主定理

simply-laced な一般カルタン行列の正則クリスタルを知らば, [BS, §5], [NS], [Ka3] 等の diagram folding の技法によって有限型やアフィン型の正則クリスタルがえられる. しかしこれらの GCM に付随する正則クリスタルの直接の特徴付けを知っておくことは悪くないことである. [KMN₁², Proposition 2.4.4] によって, 問題はランク 2 の場合に還元される. 以下の主定理は, $B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の場合に解答を与える. 先行研究との違いについては, §9 において論じる.

定理 10. $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を $\forall i \neq \forall j \in I, A|_{i,j} = A_1 \oplus A_1, A_2, B_2, {}^t B_2$ なる対称化可能一般カルタン行列 (doubly-laced GCM) とし, X を最大元 $x_0 \in X$ をもつ A 正則グラフで, さらに

$$\forall i \neq \forall j \in I, A|_{i,j} = B_2 \Rightarrow (S6),(S7),(S8),(S9)$$

をみたすとする. このとき, ただ 1 つの I 色有向グラフ同型 $X \xrightarrow{\sim} B(\lambda)$ が存在する. ここで $\lambda \in P^+$ は $\forall i \in I, \langle h_i, \lambda \rangle = \varphi_i(x_0)$ であればよい.

$$(S6) \quad \forall x \in X, \tilde{e}_i x \neq \mathbf{0} \neq \tilde{e}_j x, \Delta(x) = (1, 2) \Rightarrow (D^-).$$

$$(S7) \quad \forall x \in X, \tilde{f}_i x \neq \mathbf{0} \neq \tilde{f}_j x, \Delta'(x) = (1, 2) \Rightarrow (D^+).$$

$$(S8) \quad \forall x \in X, \tilde{f}_i x \neq \mathbf{0} \neq \tilde{f}_j x, \Delta'(x) = (1, 1), \varphi_i(x) \geq 2 \Rightarrow (C_1^+).$$

$$(S9) \quad \forall x \in X, \tilde{f}_i x \neq \mathbf{0} \neq \tilde{f}_j x, \Delta'(x) = (0, 2), \tilde{f}_j \tilde{f}_i^2 x \neq \mathbf{0}, \Delta_\varphi^f(j, i, \tilde{f}_i^2 x) = 0 \Rightarrow (C_1^+).$$

$$(D^-) \quad \exists y = \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j x, \exists y' = \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i x, (P_1^-, (Q_1^-), (R^-), (\Delta_\varphi^f(i, j, y), \Delta_\varphi^f(i, j, y'))) \neq (1, 0).$$

$$(D^+) \quad \exists y = \tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j x, \exists y' = \tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j^2 \tilde{f}_i x, (\Delta_\varepsilon^e(i, j, y), \Delta_\varepsilon^e(i, j, y')) = (0, 1) \Rightarrow \exists z = \tilde{f}_j \tilde{f}_i^3 \tilde{f}_j^2 \tilde{f}_i x = \tilde{f}_i \tilde{f}_j^2 \tilde{f}_i^3 \tilde{f}_j x.$$

$$(C_1^+) \quad \exists z = \tilde{f}_i \tilde{f}_j^2 \tilde{f}_i^2 x = \tilde{f}_j \tilde{f}_i^3 \tilde{f}_j x.$$

$$(P_1^-) \quad (\Delta_\varphi^f(i, j, y), \Delta_\varphi^f(i, j, y')) = (1, 1) \Rightarrow \tilde{f}_j y' = \tilde{e}_i y, \Delta_\varphi^f(j, i, y') = 1.$$

$$(Q_1^-) \quad (\Delta_\varphi^f(i, j, y), \Delta_\varphi^f(i, j, y')) = (0, 1) \Rightarrow \exists z = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^3 \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i x = \tilde{e}_i \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i^3 \tilde{e}_j x, \Delta'(z) = (1, 2).$$

$$(R^-) \quad (\Delta_\varphi^f(i, j, y), \Delta_\varphi^f(i, j, y')) = (0, 0) \Rightarrow \tilde{f}_j y' = \tilde{e}_i y, \Delta_\varphi^f(j, i, y') = 2, \Delta_\varphi^f(j, i, \tilde{f}_i^2 y') = 0.$$

ここで $\Delta(x) = (\Delta_\varepsilon^e(i, j, x), \Delta_\varepsilon^e(j, i, x))$, $\Delta'(x) = (\Delta_\varphi^f(i, j, x), \Delta_\varphi^f(j, i, x))$ である. 前と同様, (D^-) や (D^+) における y の存在 (\exists) は, 公理の真の内容ではない (それぞれ $\Delta_\varepsilon^e(j, i, x) = 2$, $\Delta_\varphi^f(j, i, x) = 2$ から従う). (P_1^-) と (R^-) において $\tilde{e}_i y \neq \mathbf{0}$ であることも注意しておく (これは $\Delta_\varepsilon^e(j, i, x) = 2$, $\varepsilon_i(x) \geq 1$ から従う).

例 11. 次ページの図 1 は [Ste, Figure 5] を再現したものである. 例 7 と同じく, 太線が 1 色有向辺である. 左から右にかけて, 公理 $(Q_1^-), (P_1^-), (R^-)$ が観察される. 公理 $(S7), (S8)$ はそれぞれ左, 中央グラフの z において, 公理 $(S9)$ は右グラフの y において観察される.

8 公理の変種について

B_2 型最高ウェイトクリスタルを特徴付ける公理は 1 つに定まるわけではなく, 述べ方にはいくつかの変種がありうる. 本節の目的はそれについて論じることである.

まず \tilde{e}_k と \tilde{f}_k に関する対称性から (ここで k は $i \neq j \in I$ は $A|_{i,j} = B_2$ なる i, j のどれか), $(S8)$ の対称 version である以下の $(S8)'$ を公理に付け加えてもよいはずである.

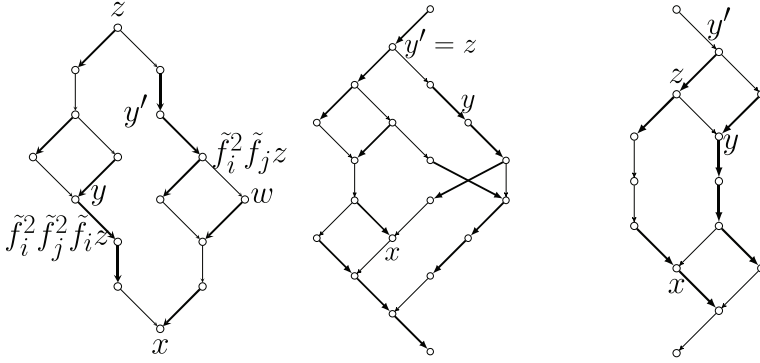


図 1: B_2 crystals $B(\Lambda_1 + \Lambda_2), B(3\Lambda_1), B(2\Lambda_2)$ from left to right

(S8') $\forall x \in X, \tilde{e}_i x \neq \mathbf{0} \neq \tilde{e}_j x, \Delta(x) = (1, 1), \varepsilon_i(x) \geq 2 \Rightarrow (C_1^-)$.

ここで $i \neq j \in I$ は $A|_{i,j} = B_2$ で, (C_1^-) は (C_1^+) の対称 version 「 $\exists z = \tilde{e}_i \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i^2 x = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^3 \tilde{e}_j x$ 」である. 同様に, (S6) の完全に対称 version ((S7) はその一部にしかになっていない) や (S9) の対称 version も付け加えてもよいのだが, 不必要なので主定理ではそうしなかった. どうして不必要なのかは [Tsl, §3] からわかるので, 興味があれば参照されたい.

$(P_1^-), (Q_1^-)$ は, それぞれ (独立に) もっと詳細な公理 $(P^-), (Q^-)$ に置き換えてよい.

(P^-) $(\Delta_\varphi^f(i, j, y), \Delta_\varphi^f(i, j, y')) = (1, 1) \Rightarrow y' = \tilde{e}_i \tilde{e}_j \tilde{e}_i \tilde{e}_j \tilde{e}_i x = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^3 \tilde{e}_j x, \Delta_\varphi^f(j, i, y') = 1$.

(Q^-) $(\Delta_\varphi^f(i, j, y), \Delta_\varphi^f(i, j, y')) = (0, 1)$

$\Rightarrow \exists z = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j \tilde{e}_i \tilde{e}_j \tilde{e}_i x = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^3 \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i x = \tilde{e}_i \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i^3 \tilde{e}_j x = \tilde{e}_i \tilde{e}_j \tilde{e}_i \tilde{e}_j \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j x, \Delta'(z) = (1, 2)$.

どうして $(P_1^-), (Q_1^-)$ のような「短い」公理でうまくいくのかについては, 以下の意味での「弱 Church-Rosser 性」(これは「局所合流性 (local confluence property)」ともよばれる. 詳しくは [BN, §2.7] といった書き換え系の教科書を参照されたい) のみが重要な場面がいくつかあるからである, ということとどめておく.

定義 12. X を good な I 色有向グラフとする. X が斉次局所合流性を持つとは,

$$\forall x \in X, \forall i \neq j \in I, \tilde{e}_i x \neq \mathbf{0} \neq \tilde{e}_j x,$$

$$\Rightarrow \exists s \geq 2, \exists (i_1, \dots, i_s), \exists (i'_1, \dots, i'_s) \in I^s,$$

$$i_s = i, i'_s = j, \exists z = \tilde{e}_{i_1} \dots \tilde{e}_{i_s} x = \tilde{e}_{i'_1} \dots \tilde{e}_{i'_s} x, \{i_k \mid 1 \leq k \leq s\} = \{i'_k \mid 1 \leq k \leq s\}$$

が成り立つことである (最右辺の等式は多重集合としての等式である).

$(P_1^-), (Q_1^-)$ のような「短い」公理を選んだ理由だが, $(P_1^-), (Q_1^-)$ は $(P^-), (Q^-)$ における合流関係式中, i, j スtringの個数が最小になるような合流関係式を取り出している. 言い換えれば, 柏原作用素の最大べきに沿った合流関係式を取り出している. 先に「弱 Church-Rosser 性」のみが重要な場面があるといったのと同じ理由で, $(P_1^-), (Q_1^-)$ には別の合流関係式を取り出した変種もある. しかし $(P_1^-), (Q_1^-)$ はベストだと思われるので, それらの変種については考慮しないことにする. 例えば (Q_1^-) において, 対称性 (これについて図 1 が参考になるだろう)

$$\tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j z = \tilde{f}_i y', \quad \tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j^2 \tilde{f}_i z = \tilde{f}_i y$$

と、注意 6 から

$$(\Delta_\varepsilon^e(i, j, \tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j z), \Delta_\varepsilon^e(i, j, \tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j^2 \tilde{f}_i z)) = (0, 1) \quad (1)$$

が導出できる。もしもこのような「ボーナス」がなければ、公理 (Q_1^-) には本来 (1) が最後に追加されていないといけないのだが、 (Q_1^-) の合流関係式では幸運なことにそれは不要なのである。

9 先行研究との比較

筆者の知る限り、 B_2 型最高ウェイトクリスタルの局所の特徴付けを与えることは、[Ste] 以来の未解決問題である。このことは業界ではよく知られているとあってよいと思う。例えば、ごく最近の柏原クリスタル理論の教科書 [BS] では、Stembridge の A 正則性公理と diagram folding の技法に基づいた新しいアプローチがとられている。しかし、 B_2 型に関する先行研究 [Ster, DKK] は、この教科書では参考文献にすら挙げられていない！これが本節冒頭に述べたことの「社会的な」証明である（ちなみに [Ster] は [BS] の著者の 1 人の A.Schilling の指導のもとで書かれた博士論文の一部である）。以下では、先行研究と主定理との比較を「数学的に」説明する。

9.1 [Ster] との比較

$(P^-), (Q^-), (R^-)$ における合流関係式（ただし (R^-) では、それと (S4) の $(A_{i,j}^+)$ から演繹される $\tilde{e}_i \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i x = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j x$ のこと）は、[Ste, pp.4822] で観察され、[Ster, Theorem 1] で証明された。しかし、 $\Delta(x) = (1, 2)$ なる x で実際にどの合流が起きるのかを、 x の局所的情報に基づいて決定するには、公理 (D^-) における y, y' の存在が決定的な役割をはたす。これが [Ster]（および [DKK]）で見逃されていた事項である。

注意 13. 本稿において、 $x \in X$ についての「局所的」公理とは、 $\Delta_\beta^g(k, \ell, y), \beta_k(y)$ と等号 = のみで書かれる条件のことである。ここで $k, \ell \in I, g \in \{e, f\}, \beta \in \{\varepsilon, \varphi\}$ かつ y は x の「近く」である。 y が x の近くとは、ある x に依らない定数 N が存在して、 y は x から高々 N 個の有向辺をたどって行けばえられる、という意味である。Stembridge の公理では $N = 4$ で、主定理では $N = 7$ となっている。

大雑把に言えば、Stembridge の公理は 4 つ前の親までが「分かる」ならば A_2 正則クリスタルかどうか判定できる、ということで、主定理は 7 つ前の親までが「分かる」ならば B_2 正則クリスタルかどうか判定できる、ということである。

[Ster] にない公理 (S8), (S9) は、[Ts1] で初めて提示されたもので、以下のような役割をはたす。特に (S9) によって、§6 で説明した simply-laced 型最高ウェイトクリスタルを描くアルゴリズムは、主定理の doubly-laced 型でも同様に機能する。

(S8) は、 (P_1^-) における「対称性のやぶれ」を補正する。ここで「対称性のやぶれ」とは、合流した $z = \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i x = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j x (= y')$ において、 $\Delta'(z) = (1, 2)$ ではなく $\Delta'(z) = (1, 1)$ となってしまうことを意味している。

(S9) は、 (R^-) において合流した $z = \tilde{e}_i \tilde{e}_j^2 \tilde{e}_i x = \tilde{e}_j \tilde{e}_i^2 \tilde{e}_j x$ は問題なく $\Delta'(z) = (1, 2)$ となっているが、 $\tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j^2 \tilde{f}_i z$ が x よりも下に来てしまうことに対処するための、代わりの公理である。

9.2 [DKK] との比較

[DKK] では、彼らによる公理 (B0),(B1),(B2),(B3),(B3'),(B5)-(B13),(B5')-(B13') が, B_2 型最高ウェイトクリスタルを特徴付けると主張されている（「はっきりと定理の形では書かれていないが, [DKK, §3] の最初の段落にそのような主張がある」と言いたいところだが, そこでの書き方は漠然としていると筆者には見受けられる. [DKK] の最後の段落も同様である）. [Ts1] の主定理が Stembridge の議論のちょっとした修正なのに対して, [DKK] のアイデアはまったく異なったものであり, 相互関係を明らかにするのは興味深い問題だと思われる（[DKK] が正しいと仮定して）. 例えば, §6 で述べた doubly-laced 型の最高ウェイトクリスタルを描くアルゴリズムが, [DKK] の公理でも可能かどうかは明らかではない. 強調しておきたいのは, [DKK] と [Ts1] には明らかな論理的含意関係は（今のところ）存在しない, という点である.

筆者が言えるのは, [DKK] の公理は注意 13 の意味で局所的ではないということだ（少なくとも, 局所性は明らかではない）. 例えば, 公理 (B1) [DKK, pp.272] は, 各 2 ストリング ([DKK] の B_2 の規約を本稿のそれに合わせた) が, ただ 1 つの「central edge または central vertex」をもつことを要求している. 「central edge または central vertex」というのは, 文字通り 2 ストリングの「中央に」位置するというものではなく, [DKK, pp.273, line 21–29] にその局所的な特徴付けが与えられている（ただしこれは, すぐ後に論じるように数学的に間違っている）. しかし, 公理 (B1) は, 2 ストリングについての制約であり, edge や vertex が central かどうか局所的に判定できたとしても, (B1) の局所判定可能性は従わない.

注意 14. [DKK, pp.273,(i),(ii),(iii)] に述べられている「central vertex」の判定法は数学的に間違っている. 図 1 の $\tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j z$ から w へ向かう 2 ストリングを考えよう. 有向辺 $(\tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j z, w)$ は, [DKK, pp.273, line 26] によって central ではない. 頂点 $\tilde{f}_i^2 \tilde{f}_j z, w$ のいずれも [DKK, pp.273,(i),(ii),(iii)] によって central ではない. するとこの 2 ストリングは (B1) をみたさないことになってしまう.

以上の他にも, [DKK] が数学的な間違いや議論のギャップを含んでいることを論じることができるが, 本稿は [DKK] のサーベイではないから深入りはしないことにする. なお [DKK] についてはそれなりの時間をかけ, 少なくとも（時には日本人とは限らない）専門家と議論したが, [DKK] を「読めた」とか「理解した」と明言した人はいなかった（筆者もその 1 人である）. もし上記の指摘が誤りである, という方はご教授いただければ幸いである（ただし [DKK] は, 結局何が定義なのか, はっきりと何が主張されているかを特定できるスタイルで書かれていない箇所も多々あるので, [DKK] について数学的議論が成立することは非自明だと感じる）.

10 研究の動機

本研究の動機は, 渡部正樹氏との共同研究で証明した Schur 分割定理の一般化 [TW, Theorem 1.2] であった ([Ts2] は [TW] の日本語による解説である). これは奇数 $p \geq 3$ ごとの分割定理で, $p = 3$ の場合が Schur が 1926 年に証明した Schur 分割定理 (Rogers-Ramanujan 分割定理の mod 6 版) である. $p = 5$ の場合は, 1970 年代に Andrews が予想し [And, Conjecture 2], 1994 年に Andrews-Bessenrodt-Olsson が計算機も援用して証明した分割定理になっている [ABO]. [TW] の (Andrews-Bessenrodt-Olsson 分割定理の) 証明の key step は, 分割定理を証明したい分割の部分集合 S_5 が $A_4^{(2)}$ 型正則クリスタルになっていることを示すことである. S_5 には明示的で組合せ論的な柏原作用素が定義できるが, 正則性を示すには完全結晶の理論 [KMN₂, KMN₃] を使わず, 圏論化で非負性を示すような「間接的な」証明になっている.

主定理は「手で」柏原作用素を入れた集合が doubly-laced 型正則クリスタルになっていることを確立する直接的な方法を与えているから、整数の分割理論などの表現論とは直接関係なさそうな分野への応用もありえる。また筆者は詳しく知らないが、Kirillov-Reshetikhin クリスタルの研究 ([FOS] やその文献を参照されたい) にも [Ste] の A 正則性公理が使われるらしいので、主定理は diagram folding を避ける 1 つの方法を与えると期待される。

11 未解決問題

主定理に続いて、 G_2 型正則クリスタルの局所的特徴付けは自然な問題としてありえるだろう。これについては、正しい公理が (計算機実験などで) 見つければ [Ste, Ts1] と同様に証明できるはずだが、証明にも Fourier-Motzkin 消去法などを計算機で実行する必要があるかもしれない。少なくともその公理は「短くない」と考えられる ([Ster] の最後の段落の観察も参照されたい)。主定理 (B_2 型正則クリスタルの局所的特徴付け) の 1 つの利点は、これが Stembridge の A 正則性公理と比べて「それほど複雑でない」(少なくとも半ページの追加ですむ) こと、そしてリー理論の実質的研究対象とってよい有限型・アフィン型 GCM については、 $G_2, A_1^{(1)}, G_2^{(1)}, A_2^{(2)}, D_4^{(3)}$ を除いて適用できることである。

残る $A_1^{(1)}, A_2^{(2)}$ 型正則クリスタルの局所的特徴付けについてだが、筆者は合流関係系は無限にあるのではないかと、という印象をもっている。その場合 [Ste, Ts1] のような「有限個の公理」による特徴付けはあきらめることになるが、無限個の公理が (Jordan 標準形のように) 「パラメータをともなって一様書き下せる」可能性もある。そのようなパラメータ付き公理系を見つけること (もしあるのならば)、あるいは適切な定式化でそのようなものが存在しないこと (例えば、表現論における wild 表現型は直既約加群の分類をあきらめさせる 1 つの定式化である) を証明することは、アフィン型正則クリスタルについてさらなる洞察をもたらすと期待される。

いずれにせよ [Ste] の局所的アプローチについて、さらなる理解が望まれる。

12 最後に

講演の機会を与えてくださった久保利久さんに感謝いたします。ありがとうございました。なお本研究は JSPS 科研費 17K14154 の助成を受けています。

参考文献

- [ABO] G.E. Andrews, C. Bessenrodt and J.B. Olsson, *Partition identities and labels for some modular characters*, Trans.Amer.Math.Soc. **344** (1994), 597–615.
- [And] G.E. Andrews, *On the general Rogers-Ramanujan theorem*, Memiors of the American Mathematical Society, **152**. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1974.
- [BN] F. Baader and T. Nipkow, *Term rewriting and all that*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [BS] D. Bump and A. Schilling, *Crystal bases, Representations and combinatorics*. World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2017.
- [BZ] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties*, Invent.Math. **143** (2001), 77–128.
- [DKK] V. Danilov, A. Karzanov and G. Koshevoy, *B_2 -crystals: axioms, structure, models*, J.Combin.Theory Ser.A **116** (2009), 265–289.

- [FOS] G. Fourier, M. Okado and A. Schilling, *Kirillov-Reshetikhin crystals for nonexceptional types*, Adv.Math. **222** (2009), 1080–1116.
- [Gra] W.A. de Graaf, *Constructing canonical bases of quantized enveloping algebras*, Exper.Math. **11** (2002), 161–170.
- [GJK³] D. Grantcharov, J.H. Jung, S.-J. Kang, M. Kashiwara and M. Kim *Crystal bases for the quantum queer superalgebra and semistandard decomposition tableaux*, Trans.Amer.Math.Soc. **366** (2014), 457–489.
- [Kac] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.
- [Ka1] M. Kashiwara, *On crystal bases of the Q -analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math.J. **63** (1991), 465–516.
- [Ka2] M. Kashiwara, *On crystal bases*, Representations of Groups, Proceedings of the 1994 Annual Seminar of the Canadian Math. Soc. Banff Center, Banff, Alberta, CMS Conference proceedings, 16 (1995), 155–197, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [Ka3] M. Kashiwara, *Similarity of crystal bases*, Lie algebras and their representations (Seoul, 1995), 177–186, Contemp.Math., **194**, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 1996.
- [KMN₁²] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, Internat. J. Modern Phys. A **7**, Suppl. 1A (1992), 449–484.
- [KMN₂²] S.-J. Kang, M. Kashiwara, K. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Perfect crystals of quantum affine Lie algebras*, Duke Math.J. **68** (1992), 499–607.
- [KN] M. Kashiwara and T. Nakashima, *Crystal graphs for representations of the q -analogue of classical Lie algebras*, J.Algebra **165** (1994), 295–345.
- [Li1] P. Littelmann, *A Littlewood-Richardson rule for symmetrizable Kac-Moody algebras*, Invent.Math. **116** (1994), 329–346.
- [Li2] P. Littelmann, *Paths and root operators in representation theory*, Ann.Math. **142** (1995), 499–525.
- [Lus] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J.Amer.Math.Soc. **3** (1990), 447–498.
- [NS] S. Naito and D. Sagaki, *Lakshmibai-Seshadri paths fixed by a diagram automorphism*, J.Algebra **245** (2001), 395–412.
- [Ste] J. Stembridge, *A local characterization of simply-laced crystals*, Trans.Amer.Math.Soc. **355** (2003), 4807–4823.
- [Ster] P. Sternberg, *On the local structure of doubly laced crystals*, J.Combin.Theory Ser.A **114** (2007), 809–824
- [Ts1] S. Tsuchioka, *A local characterization of B_2 regular crystals*, arXiv:1710.09622
- [Ts2] 土岡俊介, Schur の分割定理の一般化について, 第 62 回代数学シンポジウム報告集
- [TW] S. Tsuchioka and M. Watanabe, *Schur partition theorems via perfect crystal*, arXiv:1609.01905